

HY370

Ασκήσεις

13/11/2020

Άσκηση 4.

Παραγοντοποιήστε τα παρακάτω συστήματα σε γινόμενο συστημάτων ελάχιστης φάσης και all-pass.

$$\text{i. } H_1(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$\text{ii. } H_2(z) = \frac{(1 + 3z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}$$

Λύση

i) μηδενικό στο θέση $z=2$ θα
αυξάνει χιβτεί στο all pass σύστημα
(αφού είναι έξω από το μοναδιαίο
κύκλο)

$$H_{ap} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

ο πόλος στο $z = \frac{1}{2}$ του

συστήματος all pass

πρέπει να ακυρωθεί με
ένα μηδενικό στο σύστημα ελάχιστης
φάσης

Άσκηση 4.

Παραγοντοποιήστε τα παρακάτω συστήματα σε γινόμενο συστημάτων ελάχιστης φάσης και all-pass.

$$\text{i. } H_1(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{(1 - 2z^{-1})}{(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} \cdot \frac{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$\text{ii. } H_2(z) = \frac{(1 + 3z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = (-2) \cdot \frac{(z^{-1} - \frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z) = \\ &= -2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{το } |H_{ap}(z)| &= 1 \\ \frac{|z^{-1} - \frac{1}{2}|}{|1 - \frac{1}{2}z^{-1}|} &= 1 \end{aligned}$$

οι συζυγείς
μικαδικοί έχουν
ισά μέτρα

Άσκηση 4.

Παραγοντοποιήστε τα παρακάτω συστήματα σε γινόμενο συστημάτων ελάχιστης φάσης και all-pass.

i. $H_1(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$

ii. $H_2(z) = \frac{(1 + 3z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}$

$$\frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{3\left(\frac{1}{3} + z^{-1}\right)}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

ο όρος αυτός αντιστοιχεί στο
all pass σύστημα

ο όρος $\frac{1}{z^{-1}}$ συνιστά ένα ζεύγος πόλου - μηδενικού
στο 0 και $+\infty$
αρα πρέπει να περιέλθει στο all pass σύστημα

$$H_{min}(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$i. H_1(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$ii. H_2(z) = \frac{(1 + 3z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}$$

$$\frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{3\left(\frac{1}{3} + z^{-1}\right)}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

ο όρος αυτός αναιετοίχει στο
all pass βύβτημα

ο όρος $\frac{1}{z^{-1}}$ βυβτὰ ένα [έγος πόλου - μηδενικού
στο 0 και $+\infty$
αρα πρέπει να περιέλθει στο all pass βύβτημα

$$H_{min}(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z) = \left[3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \right] \cdot \left[\frac{\frac{1}{3} + z^{-1}}{z^{-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}z^{-1} \right)} \right]$$

Άσκηση 6.

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = \frac{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 4z^{-2})}{(1 + 0.36z^{-2})} = \frac{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 + j0,6z^{-1})(1 - j0,6z^{-1})}$$

- i. Είναι το σύστημα ευσταθές;
- ii. Παραγοντοποιήστε το παραπάνω σύστημα σε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{min}(z)$ επί ένα all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$.

i) οι πόλοι βρίσκονται $z = \pm 0,6j$
 εντός του μοναδιαίου κύκλου.
 οπότε το σύστημα είναι ευσταθές.

οπότε το σύστημα είναι ευσταθές.

ii) τα μη δένικα ζεύγη πόλων $z = \pm 2$ θα αντιστοιχούν στο all pass σύστημα.

$$H_{ap}(z) = \frac{(-4) (z^{-1} - 1/2) \cdot (z^{-1} + 1/2)}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \cdot (1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$$

το $H_{min}(z) = \frac{(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) \cdot (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \cdot (1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 + j0,6z^{-1}) \cdot (1 - j0,6z^{-1})}$

τελικά

$$H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z)$$

τελικά

$$(1 + j0,6z^{-1}) \cdot (1 - j0,6z^{-1})$$

$$H(z) = H_{\text{min}}(z) \cdot H_{\text{ap}}(z)$$

$$= \left[-4 \frac{(1 + 0,5z^{-1}) \cdot (1 - \frac{1}{2}z^{-1}) \cdot (1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 + j0,6z^{-1}) \cdot (1 - j0,6z^{-1})} \right] \cdot \left[\frac{(z^{-1} - \frac{1}{2})(z^{-1} + \frac{1}{2})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \right]$$

Thank you!