HY370

Ασκήσεις 3

6/11/2020

- **ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Ζ – Ευστάθεια**
  - Παράδειγμα:
  - Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + 3z^{-1})}, \ R_H$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, σχεδιάστε πόλους και μηδενικά, και χαρακτηρίστε το ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα

$$\cdot \frac{z^3}{z^3}$$

$$H(z) = \frac{z^3 + z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot(z+3)} =$$

$$= \frac{z^2(z+1)}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)(z+3)}$$

Μηδενικα : $z=0$ πολλαπλότητα 2, $z=-1$

Πόλοι: $z=1$, $z=\frac{1}{2}$, $z=-3$

πεδία σύγκλισης:

α) $|z| < \frac{1}{2}$

β) $\frac{1}{2} < |z| < 1$

γ) $1 < |z| < 3$

δ) $|z| > 3$

$$H(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{1+3z^{-1}}$$

με $A = 1$ $\quad B = -\frac{2}{7}$ $\quad C = \frac{3}{7}$

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{7}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7}\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

α) $|z| < \frac{1}{2}$

$$h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7}\cdot(-3)^n\cdot u[-n-1]$$

β) $\frac{1}{2} < |z| < 1$:

$$h[n] = -u[-n-1] - \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$$

$$H(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C}{1+3z^{-1}}$$

με $A = 1$ $\quad B = -\frac{2}{7}$ $\quad C = \frac{3}{7}$

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{2}{7}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7}\,\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

	Ευσταθές	Αιτιατό
α	×	×
β	×	×

α) $|z| < \frac{1}{2}$

$$h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7}\cdot(-3)^n\cdot u[-n-1]$$

β) $\frac{1}{2} < |z| < 1$:

$$h[n] = -u[-n-1] - \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$$

$$\frac{\;}{7}\,\frac{\;}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \;+\; \frac{\;}{7}\,\frac{1}{1+3z^{-1}}$$

α) $|z| < \frac{1}{2}$

$$h[n] = -u[-n-1] + \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7}\cdot(-3)^n\cdot u[-n-1]$$

β) $\frac{1}{2} < |z| < 1$:

$$h[n] = -u[-n-1] - \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$$

γ) $1 < |z| < 3$

$$h[n] = u[n] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$$

δ) $|z| > 3$

$$h[n] = u[n] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7}(-3)^n u[n]$$

β) $\frac{1}{2} < |z| < 1$:

$$h[n] = -u[-n-1] - \frac{2}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$$

γ) $1 < |z| < 3$

$$h[n] = u[n] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7}(-3)^n u[-n-1]$$

δ) $|z| > 3$

$$h[n] = u[n] - \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7}(-3)^n u[n]$$

	αιτιατό	ευσταθές
γ)	✗	✗
δ)	✓	✗

10.16. Consider the following system functions for stable LTI systems. Without utilizing the inverse z-transform, determine in each case whether or not the corresponding system is causal.

(a) $\dfrac{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1}(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$

(b) $\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z^2+\frac{1}{2}z-\frac{3}{16}}$

(c) $\dfrac{z+1}{z+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}z^{-2}-\frac{2}{3}z^{-3}}$

$\dfrac{\cdot z^3}{\cdot z^3} = \dfrac{z^3-\frac{4}{3}z^2+\frac{1}{2}z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}$

έχει πόλο στο άπειρο

(δεν είναι αιτιατό)

(b) $\dfrac{z-\frac{1}{2}}{(z+\frac{3}{4})(z-\frac{1}{4})} =$ πόλοι είναι $z=\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$

$|z|>\frac{3}{4}$

άρα αιτιατό

(c) $\dfrac{z+1}{(z+\frac{4}{3})-\frac{1}{2}z^{-3}(z+\frac{4}{3})} =$

δεν είναι αιτιατό

$\dfrac{z+1}{(z+\frac{4}{3})(1-\frac{1}{2}z^{-3})} = \dfrac{z^4+z^3}{(z+\frac{4}{3})(z^3-\frac{1}{2})}$ πόλος στο $-\frac{4}{3}$ $|z|=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

6.4. Consider a linear-phase discrete-time LTI system with frequency response $H(e^{j\omega})$ and real impulse response $h[n]$. The group delay function for such a system is defined as

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\sphericalangle H(e^{j\omega}),$$

where $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ has no discontinuities. Suppose that, for this system,

$$|H(e^{j\pi/2})| = 2, \quad \sphericalangle H(e^{j0}) = 0, \quad \text{and} \quad \tau\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Determine the output of the system for each of the following inputs:

(a) $\cos(\frac{\pi}{2}n)$ **(b)** $\sin(\frac{7\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = x_1[n] + x_2[n]$

$$x_1[n] = \frac{1}{2}\cdot e^{j\frac{\pi n}{2}}$$

$$x_2[n] = \frac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi n}{2}}$$

όταν το $x_1[n]$ "περνάει" από το σύστημα έχει καθυστέρηση 2 δειγμάτων. Επειδή $h[n]$ είναι πραγματική, τότε η καθυστέρηση ομάδας είναι άρτια συναρτ.

$$y[n] = 2x_1[n-2] + 2x_2[n-2] =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-2)\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \pi\right)$$

b) $x[n] = \sin\left(\frac{7\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

μπορούμε να το γράψουμε ως άθροισμα εκθετικών με συχνότητες $\omega = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

Η έξοδος y είναι (όμοια)

$$y[n] = 2x[n-2] = 2 \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2}(n-2) + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2 \cdot \sin\left(\frac{7\pi n}{2} - 7\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{7\pi n}{2} \underbrace{- \pi + \frac{\pi}{4}}\right) = 2\sin\left(\frac{7\pi n}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)$$

6.37. Consider a causal LTI system whose frequency response is given as:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\frac{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

(a) Show that $|H(e^{j\omega})|$ is unity at all frequencies.

(b) Show that

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega - 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}\right).$$

(c) Show that the group delay for this filter is given by

$$\tau(\omega) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\cos\omega}.$$

Sketch $\tau(\omega)$.

(d) What is the output of this filter when the input is $\cos(\frac{\pi}{3}n)$?

a

$$|H(e^{j\omega})| = \left|e^{-j\omega}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right|$$

$$= |e^{-j\omega}|\cdot\frac{|1-\frac{1}{2}e^{j\omega}|}{|1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}|} = 1$$

6.37. Consider a causal LTI system whose frequency response is given as:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\frac{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

(a) Show that $|H(e^{j\omega})|$ is unity at all frequencies.

(b) Show that

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega - 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}\right).$$

(c) Show that the group delay for this filter is given by

$$\tau(\omega) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\cos\omega}.$$

Sketch $\tau(\omega)$.

(d) What is the output of this filter when the input is $\cos(\frac{\pi}{3}n)$?

c) $T(\omega) = \dfrac{-d\sphericalangle H(e^{j\omega})}{d\omega}$

b) $\sphericalangle H(e^{j\omega}) =$

$= \sphericalangle e^{-j\omega} + \sphericalangle\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega}\right) - \sphericalangle\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)$

$= \sphericalangle e^{-j\omega} +$

$\sphericalangle\left(1-\frac{1}{2}\cos w - \frac{j}{2}\sin w\right) -$

$\sphericalangle\left(1 - \frac{1}{2}\cos w + \frac{j}{2}\sin w\right) =$

$= -\omega - 2\tan^{-1}\left(\dfrac{\frac{1}{2}\sin w}{1-\frac{1}{2}\cos w}\right)$

6.37. Consider a causal LTI system whose frequency response is given as:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\frac{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

(a) Show that $|H(e^{j\omega})|$ is unity at all frequencies.

(b) Show that

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega - 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}\right).$$

(c) Show that the group delay for this filter is given by

$$\tau(\omega) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\cos\omega}.$$

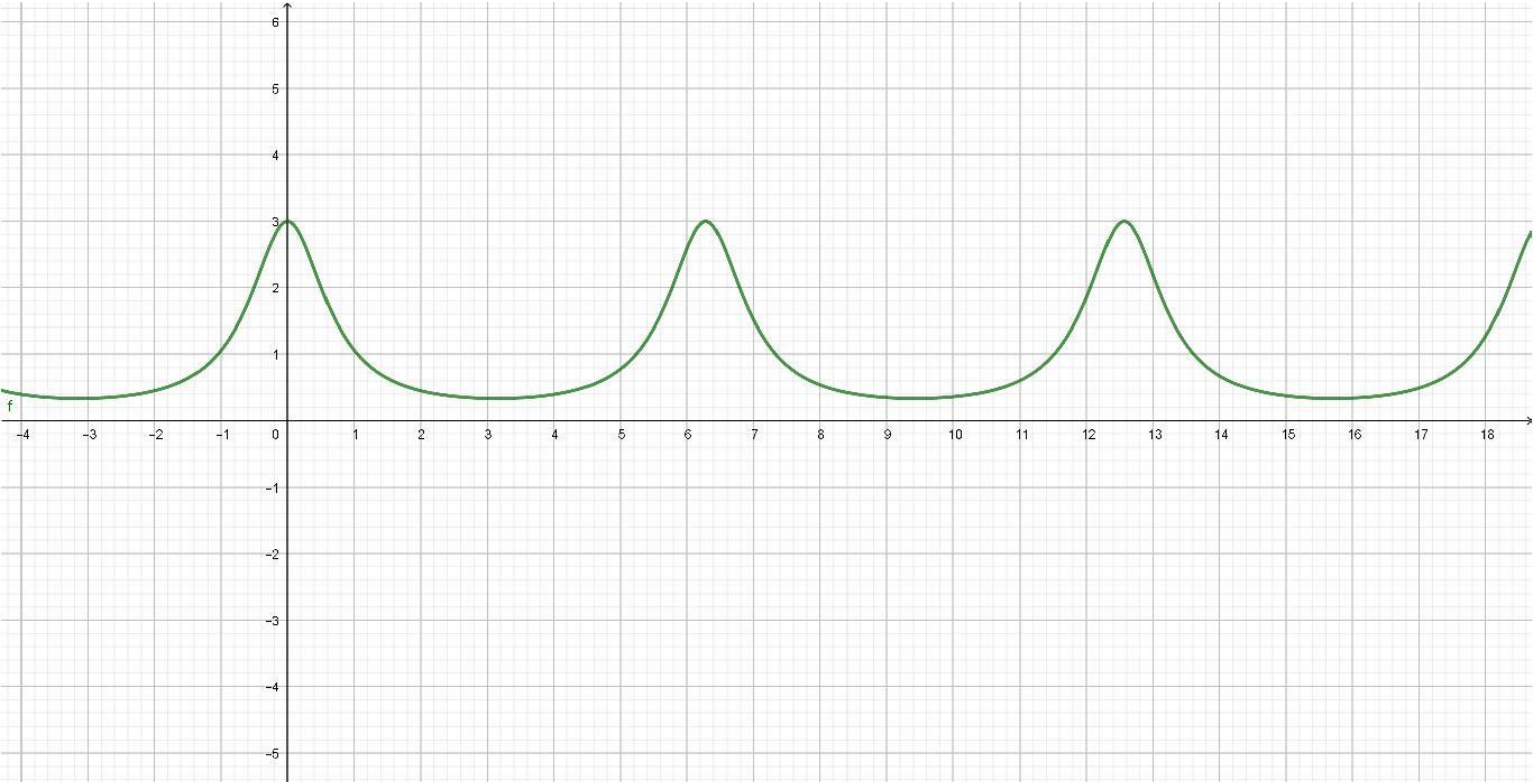
Sketch $\tau(\omega)$.

(d) What is the output of this filter when the input is $\cos(\frac{\pi}{3}n)$?

c)

$$\tau(\omega) = -\frac{d\,\sphericalangle H(e^{j\omega})}{d\omega}$$

$$\boxed{\frac{d(\tan^{-1}x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}}$$



f

6.37. Consider a causal LTI system whose frequency response is given as:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\frac{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.$$

(a) Show that $|H(e^{j\omega})|$ is unity at all frequencies.
(b) Show that

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega - 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}\right).$$

(c) Show that the group delay for this filter is given by

$$\tau(\omega) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\cos\omega}.$$

Sketch $\tau(\omega)$.
(d) What is the output of this filter when the input is $\cos(\frac{\pi}{3}n)$?

d) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

$= \dfrac{e^{j\frac{\pi}{3}n}}{2} + \dfrac{e^{-j\frac{\pi}{3}n}}{2}$

από ερώτημα (c) έχουμε ότι η καθυστέρηση ενός μιγαδ. εκθ. με συχνότητα $\frac{\pi}{3}$ δίνεται από τον τύπο

$\tau\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3/4}{\frac{5}{4}-\cos\frac{\pi}{3}} = 1$

όμοια για συχνότητα $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sphericalangle H(e^{j\omega}) = -\omega - 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}\right).$$

(c) Show that the group delay for this filter is given by

$$\tau(\omega) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\cos\omega}.$$

Sketch $\tau(\omega)$.

(d) What is the output of this filter when the input is $\cos(\frac{\pi}{3}n)$?

από ερώτημα c έχουμε ότι η καθυστέρηση ενός μιγαδ. εκθ. με συχνότητα $\frac{\pi}{3}$ δίνεται από τον τύπο

$$\tau\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3/4}{\frac{5}{4}-\cos\frac{\pi}{3}} = 1$$

όμοια για συχνότητα $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y[n] = \frac{e^{j\pi(n-1)/3}}{2} + \frac{e^{-j\pi(n-1)/3}}{2} = \cos\left(\frac{(n-1)\cdot\pi}{3}\right)$$

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = -\omega - 2\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin\omega}{1-\frac{1}{2}\cos\omega}\right).$$

(c) Show that the group delay for this filter is given by

$$\tau(\omega) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-\cos\omega}.$$

Sketch $\tau(\omega)$.

(d) What is the output of this filter when the input is $\cos(\frac{\pi}{3}n)$?

από ερώτημα (c) έχουμε ότι η καθυστέρηση ενός μιγαδ. εκθ. με συχνότητα $\frac{\pi}{3}$ δίνεται από τον τύπο

$$\tau\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3/4}{\frac{5}{4}-\cos\frac{\pi}{3}} = 1$$

όμοια για συχνότητα $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Η έξοδος του συστήματος θα είναι

$$y[n] = \frac{e^{j\pi(n-1)/3}}{2} + \frac{e^{-j\pi(n-1)/3}}{2} = \cos\left(\frac{(n-1)\cdot\pi}{3}\right)$$

10.13. Consider the rectangular signal

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

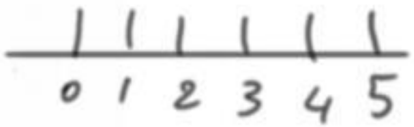
Let

$$g[n] = x[n] - x[n-1].$$

(a) Find the signal $g[n]$ and directly evaluate its z-transform.
(b) Noting that

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k],$$

use Table 10.1 to determine the z-transform of $x[n]$.



a) $g[n] = \delta[n] - \delta[n-6]$

$\downarrow z$

$G(z) = 1 - z^{-6}, \quad |z| > 0$

b) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k]$

$\updownarrow z$

$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot G(z), \quad |z| > 1$

$= \frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}$

ROC $|z|>0$, αφού $x[n]$ είναι πεπερασμένου μήκους

10.14. Consider the triangular signal

$$g[n] = \begin{cases} n-1, & 2 \le n \le 7 \\ 13-n, & 8 \le n \le 12 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

(a) Determine the value of n_0 such that

$$g[n] = x[n] * x[n-n_0],$$

where $x[n]$ is the rectangular signal considered in Problem 10.13.

(b) Use the convolution and shift properties in conjunction with $X(z)$ found in Problem 10.13 to determine $G(z)$. Verify that your answer satisfies the initial-value theorem.

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

έχουμε από 10.13

$$X(z) = \frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}}, \quad |z|>0$$

α) αν είχαμε $x[n] * x[n]$ η πρώτη μη μηδενική τιμή θα ήταν στο $n=0$.

εδώ $x[n] * x[n-n_0]$ η πρώτη μη μηδενική τιμή είναι στο n_0

από τον τύπο της $g[n]$ έχουμε $n_0 = 2$.

$$\begin{cases} \ldots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ἐχουμε απο 10.13

$$X(z) = \frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}} \quad , |z|>0$$

(a) Determine the value of n_0 such that

$$g[n] = x[n] * x[n - n_0],$$

where $x[n]$ is the rectangular signal considered in Problem 10.13.

(b) Use the convolution and shift properties in conjunction with $X(z)$ found in Problem 10.13 to determine $G(z)$. Verify that your answer satisfies the initial-value theorem.

α) αν είχαμε $x[n] * x[n]$ η πρώτη μη μηδενική τιμή θα ήταν στο $n = 0$.

εδώ $x[n] * x[n-n_0]$ η πρώτη μη μηδενική τιμή είναι στο n_0

από τον τύπο της $g[n]$ έχουμε $n_0 = 2$.

b) από ιδιότητα μετατόπισης:

$$x[n-2] \xleftrightarrow{z} z^{-2} X(z) = z^{-2} \frac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}} \quad , |z|>0$$

από ιδιότητα συνέλιξης

α) αν είχαμε $x[n] * x[n]$ η πρώτη μη μηδενική τιμή θα ήταν στο $n=0$.

εδώ $x[n] * x[n-n_0]$ η πρώτη μη μηδενική τιμή είναι στο n_0

από τον τύπο της $g[n]$ έχουμε $n_0 = 2$.

b) από ιδιότητα μετατόπισης:

$$x[n-2] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-2} X(z) = z^{-2} \cdot \frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}} \quad , |z|>0$$

από ιδιότητα συνέλιξης

$$g[n] = x[n] * x[n-2] \xrightarrow{z} z^{-2} \cdot \left(\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}} \right)^2 = G(z) \quad , |z|>0$$

επιβεβαιώνουμε το θεωρ. αρχικής τιμής:

$$\lim_{z \to \infty} G(z) = 0 = g[0]$$

α) αν είχαμε $x[n] * x[n]$ η πρώτη μη μηδενική τιμή θα ήταν στο $n=0$.

εδώ $x[n] * x[n-n_0]$ η πρώτη μη μηδενική τιμή είναι στο n_0

από τον τύπο της $g[n]$ έχουμε $n_0 = 2$.

b) από ιδιότητα μετατόπισης:

$$x[n-2] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-2} X(z) = z^{-2} \cdot \frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}} \quad , |z|>0$$

από ιδιότητα συνέλιξης

$$g[n] = x[n] * x[n-2] \xrightarrow{z} z^{-2} \cdot \left(\frac{1-z^{-6}}{1-z^{-1}} \right)^2 \quad , |z|>0$$

$= G(z)$

επιβεβαιώνουμε το θεωρ. αρχικής τιμής:

$$\lim_{z \to \infty} G(z) = 0 = g[0]$$

(ισχύει)

Thank you!