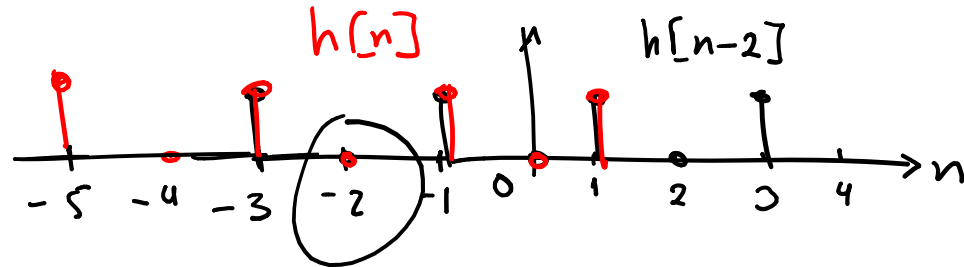


ΗΥ370-Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Άσκηση 1

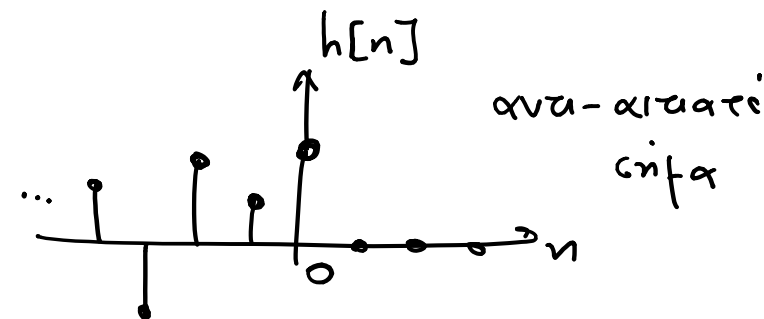


Έστω ένα σύστημα με μοναδιαία απόκριση $h[n]$ για το οποίο ισχύει:

1. $h[n] = 0, n > 0$

2. $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$

3. ο μετασχ. Fourier του $h[n-2]$ είναι πραγματική συνάρτηση.



πραγματικά σήματα : $h[n] \in \mathbb{R}$

(α') Δείξτε ότι το $h[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας.

(β') Αν

$$H(e^{j0}) = 6$$

$$H(e^{j\pi}) = 2$$

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 4$$

$F\{h[n-2]\} \in \mathbb{R}$: άρα συγχετρία στο χρόνο!

↓ άρα συγχετρία (18)

γύρω από το $n_0=0$ (19)

(20)

υπολογίστε τη μοναδιαία απόκριση $h[n]$.

(γ') Υπολογίστε το μετασχ. Fourier του $h[n]$ και γράψτε τον σε μορφή $A(e^{j\omega})e^{j2\omega}$.

Άσκηση 1 – Λύση

- α) Από τη σχέση (1), έχουμε ότι το $h[n]$ είναι αντι-αυτατό ($h[n]=0, n>0$).
- " ——— (2), ——— " ——— " ——— " ——— πραγματικό σήμα : $h[n] \in \mathbb{R}$
- " ——— (3), ——— " ——— " $h[n-2]$ είναι άρτια συσχετιστικό ως προς $n_0=0$,
άρα το $h[n]$ θα έχει χύτρο συσχετιστικό το $n_0=-2$.
- Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το σήμα είναι διάσπαστο από
 $n=-4$ ως $n=0$, δηλ. $N=5$ δείγματα.

Άσκηση 1 – Λύση

β) Μας δίνεται ότι $H(e^{j0}) = 6$, $H(e^{j\pi}) = 2$, $H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 4$

*
Αρα

$$h[n] = \begin{cases} 2, & n=0, -4 \\ 1, & n=-1, -3 \\ 0, & \text{αλλοι} \end{cases}$$

Δείξατε ότι το σήμα $h[n]$ είναι συγχερικό γύρω από το $n_0 = -2$.

Αρα :

$$h[0] = h[-4] = a$$

$$h[-1] = h[-3] = b$$

$$h[-2] = c$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}, \quad \text{θέτουμε } \begin{matrix} \omega=0 \\ \omega=\pi \\ \omega=\frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

$$\text{έχουμε : } H(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \underbrace{e^{-j0n}}_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]$$

$$\Rightarrow h[-4] + h[-3] + h[-2] + h[-1] + h[0] = 6 \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] = 6 \Rightarrow \sum_{n=-4}^0 h[n] = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a + 2b + c = 6 \quad \textcircled{A}. \text{ Με τον ίδιο τρόπο για } \omega=\pi, \quad 2a - 2b + c = 2 \quad \textcircled{B}$$

$$\text{και για } \omega=\frac{\pi}{2}, \text{ έχουμε } 2a - c = 4 \quad \textcircled{C}. \text{ Από } \textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C} \text{ παίρνουμε } \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases} *$$

Άσκηση 1 – Λύση

$$\delta[n-n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0}$$

γ) Χρησιμοποιήστε το $F\{h[n]\} = H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}) e^{j2\omega}$.

$$\text{Έχουμε } h[n] = \begin{cases} 2, & n=0, -4 \\ 1, & n=-1, -3 \\ 0, & \text{αλλοί} \end{cases} = 2\delta[n] + 2\delta[n+4] + 1 \cdot \delta[n+1] + 1 \cdot \delta[n+3]$$

$$\text{Οπότε } H(e^{j\omega}) = 2 + 2e^{j4\omega} + e^{j1\omega} + e^{j3\omega} = 2 + e^{j\omega} + e^{j3\omega} + 2e^{j4\omega}.$$

$$\text{Τέλος, } H(e^{j\omega}) = e^{j2\omega} \left(2e^{-j2\omega} + e^{-j\omega} + e^{j\omega} + 2e^{j2\omega} \right) \rightarrow 4\cos(2\omega) \text{ (Euler)}$$

$$= \underbrace{(2\cos(\omega) + 4\cos(2\omega))}_{A(e^{j\omega})} e^{j2\omega}$$

$$\begin{aligned} e^{j\omega} + e^{-j\omega} &= \\ &= 2\cos(\omega) \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Έστω το σήμα $w[n]$ με μετασχ. Fourier

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}(1 + 4\cos(\omega))$$

Θεωρήστε το σύστημα με φασματική απόκριση

$$H(e^{j\omega}) = e^{j2\omega} \left(W(e^{j\omega}) + W(e^{j(\omega+\pi)}) \right)$$

Υπολογίστε και σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος στην είσοδο $x[n] = u[n]$.

Άσκηση 2 – Λύση

Είναι

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{j2\omega} \left(W(e^{j\omega}) + W(e^{j(\omega+n)}) \right) \\ &= e^{j2\omega} \left(e^{-j2\omega} (1 + 4\cos(\omega)) + e^{-j2(\omega+n)} (1 + 4\cos(\omega+n)) \right) \\ &= 1 + 4\cos(\omega) + e^{j2\omega} \cdot e^{-j2(\omega+n)} (1 + 4\cos(\omega+n)) \\ &= 1 + 4\cos(\omega) + \cancel{e^{j2\omega}} \cdot \cancel{e^{-j2\omega}} \cdot \overset{1}{e^{-j2n}} (1 + 4\cos(\omega+n)) \\ &= 1 + 4\cos(\omega) + 1 + 4\cos(\omega+n) \\ &= 1 + \cancel{4\cos(\omega)} + 1 - \cancel{4\cos(\omega)} = 2 \end{aligned}$$

Άρα $H(e^{j\omega}) = 2, \forall \omega$

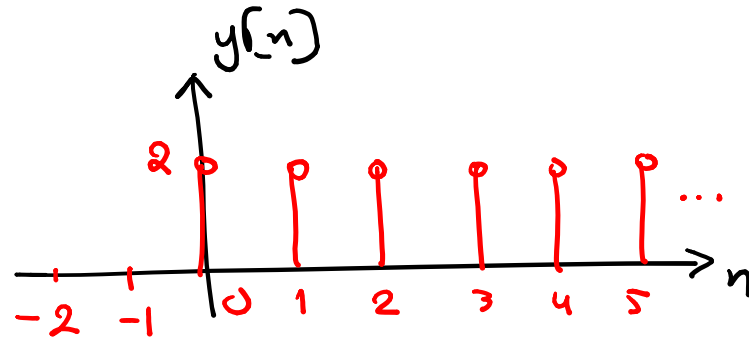
$$e^{\pm j2kn} = 1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\omega+n) = -\cos(\omega)$$

Άσκηση 2 – Λύση

$$\text{Άρα } h[n] = F^{-1} \{ H(e^{j\omega}) \} = F^{-1} \{ 2 \} = 2\delta[n]$$

$$\text{Οπότε } y[n] = x[n] * h[n] = u[n] * 2\delta[n] = 2u[n]$$



$$A\delta[n] \stackrel{F}{\longleftrightarrow} A$$

$$\delta[n] * x[n] = x[n]$$

Άσκηση 3

Ένα σήμα $x[n]$ έχει μετασχ. Z

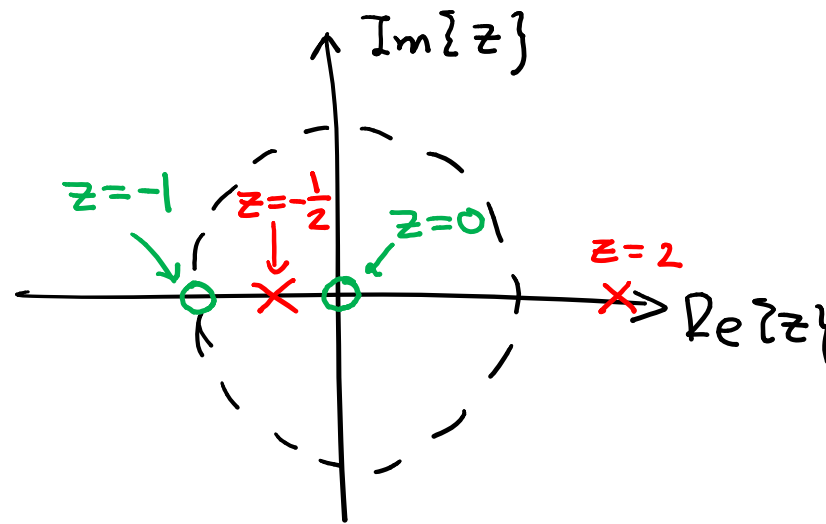
$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \quad (43)$$

- (α') Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών, αναφέροντας ρητά τις θέσεις όλων των πόλων και όλων των μηδενικών.
- (β') Βρείτε το σήμα $x[n]$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης
- (γ') Βρείτε το σήμα $x[n]$ αν το σήμα $x[n]$ είναι αιτιατό

Άσκηση 3 – Λύση

α) Ξχαφε $X(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} \xrightarrow{\cdot z^2} \frac{z^2(1+z^{-1})}{z^2(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{z^2+z}{(z+\frac{1}{2})(z-2)}$

$= \frac{z(z+1)}{(z+\frac{1}{2})(z-2)}$ $\sim$ Μονομικτά: $z=0, z=-1$
 $\sim$ Πόλοι: $z=-\frac{1}{2}, z=2$



- Πιθανά ROCs:
- $|z| > 2$
 - $\frac{1}{2} < |z| < 2$
 - $|z| < \frac{1}{2}$

Άσκηση 3 – Λύση

$$\beta) \text{ Έχουμε } X(z) = \frac{1+z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})} = \frac{A}{\underbrace{1+\frac{1}{2}z^{-1}}} + \frac{B}{\underbrace{1-2z^{-1}}}$$

$$A = X(z) \left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} \quad \left(1+\frac{1}{2}z^{-1}=0 \Rightarrow 1+\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1+z^{-1}}{\cancel{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}(1-2z^{-1})} \cancel{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1+z^{-1}}{1-2z^{-1}} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{5}$$

$$B = X(z) (1-2z^{-1}) \Big|_{z=2} = \frac{1+z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\cancel{(1-2z^{-1})}} \cancel{(1-2z^{-1})} \Big|_{z=2} = \frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=2} = \frac{6}{5}$$

$$\text{Άρα } X(z) = -\frac{1}{5} \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{6}{5} \frac{1}{1-2z^{-1}}.$$

Άσκηση 3 – Λύση:

Βρήκαμε ότι $X(z) = -\frac{1}{5} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{6}{5} \frac{1}{1 - 2z^{-1}}$

Ξέρουμε ότι οι πόλοι είναι οι $z = -\frac{1}{2}$, $z = 2$ και

είναι ότι ROC: $|z| > 2$, $|z| < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

- $|z| > 2$: $x[n] = -\frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{6}{5} (2)^n u[n]$

- $|z| < \frac{1}{2}$: $x[n] = \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{6}{5} (2)^n u[-n-1]$

- $\frac{1}{2} < |z| < 2 \Leftrightarrow \underbrace{\{|z| < 2\}} \cap \underbrace{\{|z| > \frac{1}{2}\}}$: $x[n] = -\frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{6}{5} (2)^n u[-n-1]$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \\ |z| > |a| \\ -a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \\ |z| < |a| \end{array} \right.$$

Άσκηση 3 – Λύση:

γ) Ένα αυθαίρετο σήμα ορίζεται ως $x[n] = 0, n < 0$.

Το μόνο που ικανοποιεί την παραπάνω περιγραφή είναι το:

$$x[n] = -\frac{1}{5} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{6}{5} (2)^n u[n]$$

