

HY370

Ασκήσεις

29/10/2020

Άσκηση 1

Έστω το σήμα $w[n]$ με μετασχ. Fourier

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \left(1 + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \right), \quad \omega \in (-\pi, \pi] \quad (51)$$

- (α) **(10 μονάδες)** Υπολογίστε το φάσμα πλάτους $|W(e^{j\omega})|$ και σχεδιάστε το με σχετική ακρίβεια στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.
- (β) **(15 μονάδες)** Υπολογίστε το φάσμα φάσης $\angle W(e^{j\omega})$ και σχεδιάστε το με σχετική ακρίβεια στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.
- (γ) **(5 μονάδες)** Υπολογίστε την καθυστέρηση ομάδας, $\tau_g(e^{j\omega})$, του σήματος $w[n]$ στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

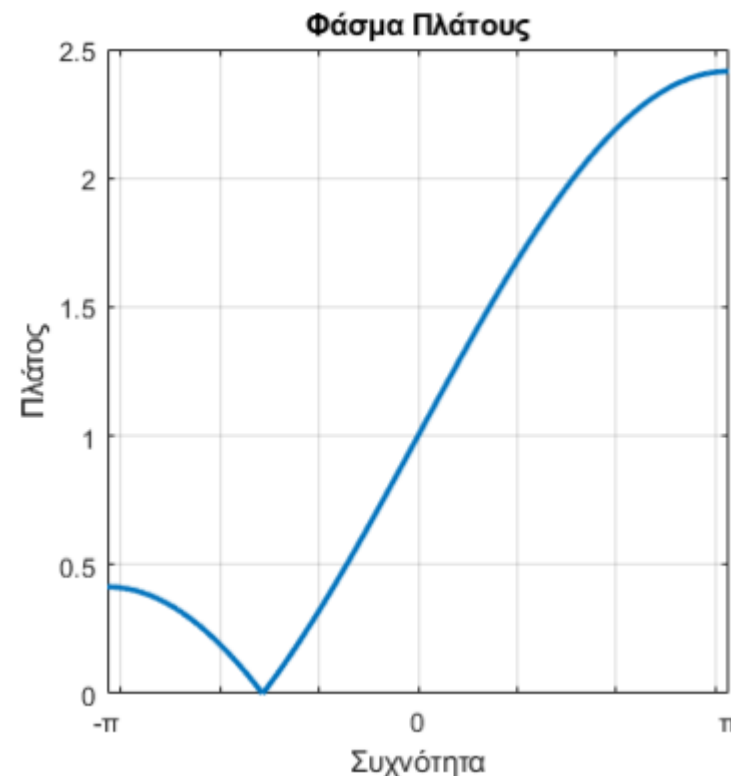
(α') Θα είναι

$$\left| W(e^{j\omega}) \right| = \left| e^{-j2\omega} \right| \left| \left(1 + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \right) \right| = \left| 1 + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \right| \quad (52)$$

Η εξίσωση εντός του μέτρου έχει ρίζα

$$\sin(\omega/2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(-\pi/4) \implies \omega/2 = -\pi/4 \implies \omega = -\frac{\pi}{2} \quad (53)$$

στο $(-\pi, \pi]$. Άρα το φάσμα πλάτους εκεί θα μηδενίζεται. Το Σχήμα 2(α) δείχνει το φάσμα πλάτους.



(β) Το φάσμα φάσης θα είναι

$$\angle W(e^{j\omega}) = \angle e^{-j2\omega} + \angle \left(1 + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = -2\omega + \angle \left(1 + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \quad (54)$$

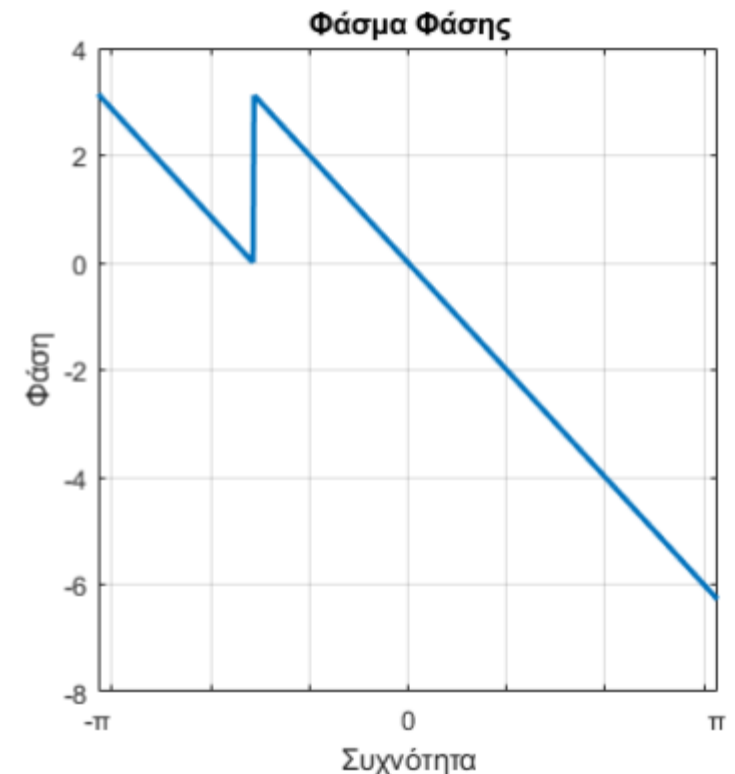
Πρέπει να βρούμε τη φάση του όρου $\left(1 + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\omega}{2}\right)\right)$. Ο όρος αυτός είναι αρνητικός στο διάστημα $(-\pi, -\pi/2)$ και θετικός στο $(-\pi/2, \pi]$. Έτσι, η φάση του όρου αυτού στο διάστημα $(-\pi, -\pi/2)$ θα είναι $-\pi$, ενώ η φάση του όρου αυτού στο $(-\pi/2, \pi]$ θα είναι μηδέν. Οπότε

$$\angle \left(1 + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = \begin{cases} -\pi, & \omega \in (-\pi, -\pi/2) \\ 0, & \omega \in (-\pi/2, \pi] \end{cases} \quad (55)$$

Οπότε συνολικά

$$\angle W(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega - \pi, & \omega \in (-\pi, -\pi/2) \\ -2\omega, & \omega \in (-\pi/2, \pi] \end{cases}$$

και είναι όπως στο Σχήμα 2(β).



(γ) Η καθυστέρηση ομάδας ορίζεται ως η αρνητική παράγωγος της συνάρτησης φάσης, οπότε

$$\tau_g(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2, & \omega \in (-\pi, -\pi/2) \\ 2, & \omega \in (\pi/2, \pi] \end{cases} \quad (57)$$

και προφανώς είναι σταθερή και ίση με 2 για κάθε $\omega \neq -\pi/2$.

Άσκηση 2

Ένα σήμα $x[n]$ έχει μετασχ. Z

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \quad (58)$$

- (α') **(2.5 μονάδες)** Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών, αναφέροντας ρητά τις θέσεις όλων των πόλων και όλων των μηδενικών.
- (β') **(2.5 μονάδες)** Αναφέρετε όλα τα πεδία σύγκλισης.
- (γ') **(15 μονάδες)** Βρείτε το σήμα $x[n]$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης.
- (δ') **(5 μονάδες)** Μπορείτε να υπολογίσετε το μετασχ. Fourier από τη Σχέση (58); Αν ναι, εξηγήστε γιατί και βρείτε τον. Αν όχι, εξηγήστε γιατί.

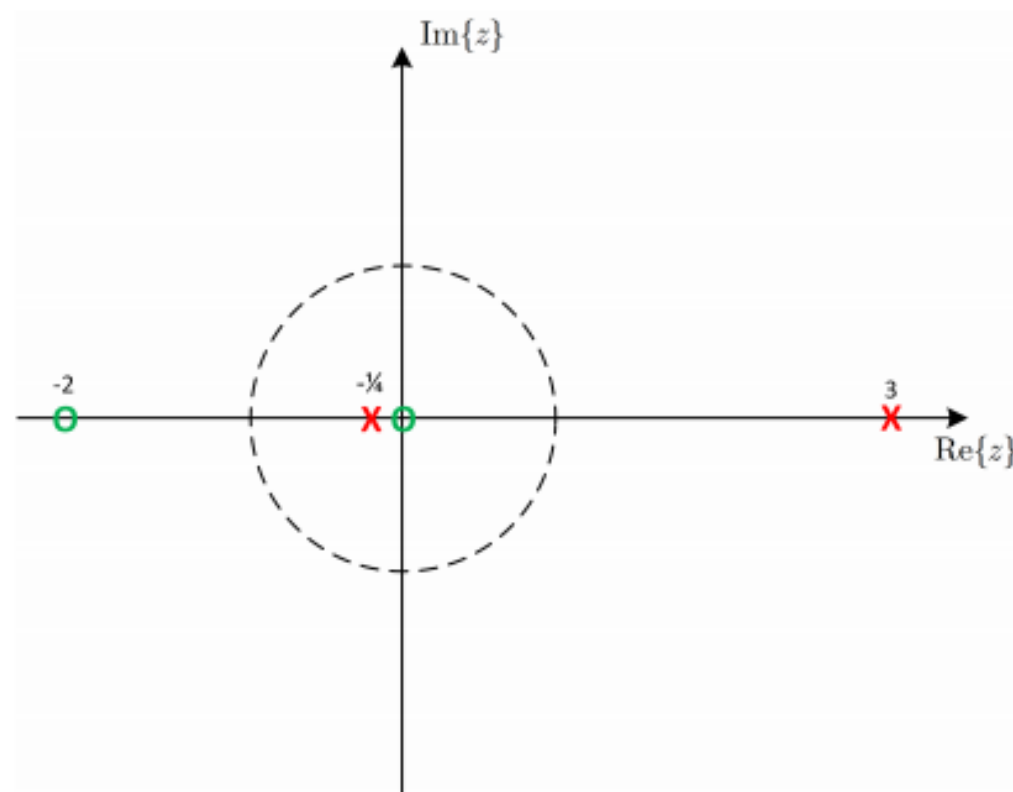
(α) Έχουμε

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})(1 - 3z^{-1})} = \frac{z(z + 2)}{(z + \frac{1}{4})(z - 3)} \quad (59)$$

Προφανώς έχουμε δυο πόλους, στις θέσεις $z = -1/4, z = 3$ και δυο μηδενικά στις θέσεις $z = 0, z = -2$. Το διάγραμμα πολων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα (3).

(β) Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι

- $|z| < 1/4$
- $|z| > 3$
- $1/4 < |z| < 3$



(γ) Το $X(z)$ έχει βαθμό πολυωνύμου αριθμητή 1 και παρονομαστή 2, οπότε μπορούμε να το αναπτύξουμε σε μερικά κλάσματα ως

$$X(z) = \frac{A}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - 3z^{-1}} \quad (60)$$

με

$$A = \left. \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1}} \right|_{z^{-1}=-4} = -\frac{7}{13} \quad (61)$$

$$B = \left. \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \right|_{z^{-1}=1/3} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{13}{12}} = \frac{20}{13} \quad (62)$$

Οπότε

$$X(z) = -\frac{7}{13} \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{20}{13} \frac{1}{1 - 3z^{-1}} \quad (63)$$

Για καθένα από τα πεδία έχουμε αντίστοιχα

Για καθένα από τα πεδία έχουμε αντίστοιχα

- Για $|z| < 1/4$, το $x[n]$ θα είναι αριστερόπλευρο. Τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι τα $|z| < 1/4$, $|z| < 3$, άρα από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$x[n] = \frac{7}{13} \left(-\frac{1}{4} \right)^n u[-n-1] - \frac{20}{13} 3^n u[-n-1] \quad (64)$$

- Για $|z| > 3$, το $x[n]$ θα είναι δεξιόπλευρο. Τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι τα $|z| > 1/4$, $|z| > 3$, άρα από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$x[n] = -\frac{7}{13} \left(-\frac{1}{4} \right)^n u[n] + \frac{20}{13} 3^n u[n] \quad (65)$$

- Για $1/4 < |z| < 3$, το $x[n]$ θα είναι αμφίπλευρο. Τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι τα $|z| > 1/4$, $|z| < 3$, άρα από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$x[n] = -\frac{7}{13} \left(-\frac{1}{4} \right)^n u[n] - \frac{20}{13} 3^n u[-n-1] \quad (66)$$

(δ) Για να μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier, θα πρέπει ο μοναδιαίος κύκλος να περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης. Άρα το πεδίο σύγκλισης $1/4 < |z| < 3$ είναι το κατάλληλο, οπότε το σήμα στο χρόνο είναι

$$x[n] = -\frac{7}{13} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{20}{13} 3^n u[-n-1] \quad (67)$$

και ο μετασχ. Fourier είναι ο

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-j\omega}}{(1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - 3e^{-j\omega})} \quad (68)$$

Thank you!