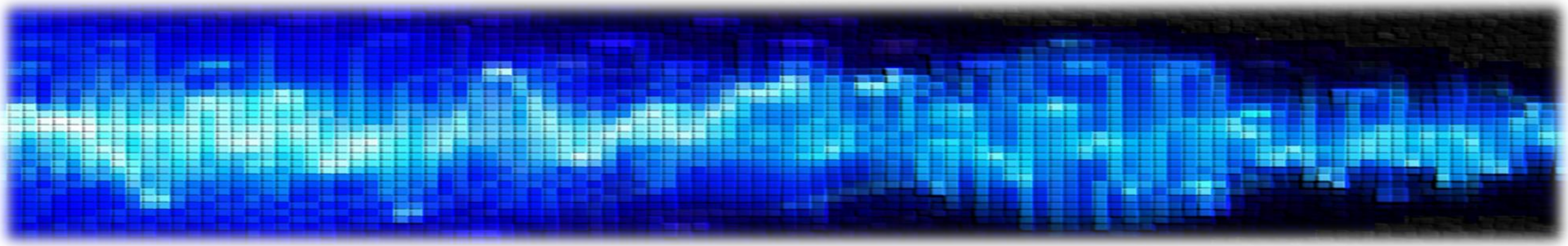
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 24Η



- Φασματική Ανάλυση

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Στο εξής θα γράφουμε το Διακριτό Μετασχ. Fourier ως **DFT** και το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου ως **DTFT**, για συντομία

- Πρόβλημα: πολλή από τη θεωρία που μάθαμε για σήματα άπειρης διάρκειας έχει πρόβλημα εφαρμογής στην πράξη
  - Άπειρη διάρκεια!!! ☺

- Στην πράξη, έχουμε ένα πεπερασμένο τμήμα/κομμάτι ενός σήματος άπειρης διάρκειας
  - Για παράδειγμα, έχουμε μόνο N δείγματα ενός ημιτόνου

- Μπορούμε όμως να μελετήσουμε τέτοια σήματα υποθέτοντας ότι το άπειρης διάρκειας σήμα $x[n]$ πολλαπλασιάστηκε με ένα πεπερασμένης διάρκειας (N δειγμάτων) παράθυρο $w[n]$, και το αποτέλεσμα της πράξης είναι αυτό που έχουμε στα χέρια μας

- Άρα εμείς έχουμε το

$$\hat{x}[n] = x[n]w[n]$$

και η εικόνα του στο χώρο του Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου είναι η

$$\hat{X}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right) * W\left(e^{j\omega}\right)$$

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας το κάνουμε πιο συγκεκριμένο: **μπορούμε να εκτιμήσουμε τη συχνότητα ενός ημιτόνου από ένα μόνο τμήμα του**?
- Έστω το **περιοδικό** σήμα

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1)\,, \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$X\left(e^{j\omega}\right) = A_1 \pi e^{j\phi_1}\delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1}\delta(\omega + \omega_1)$$

- Η «τετραγωνικώς» παραθυροποιημένη ☺ έκδοση του θα έχει DTFT

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]w[n]\} = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W\left(e^{j(\omega-\omega_1)}\right) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W\left(e^{j(\omega+\omega_1)}\right)$$

- Αντί για συναρτήσεις Δέλτα έχουμε το μετασχ. Fourier του παραθύρου!
  - Ο οποίος ονομάζεται **πυρήνας Dirichlet**
- Άρα θα δειγματοληπτήσουμε στη συχνότητα το σήμα

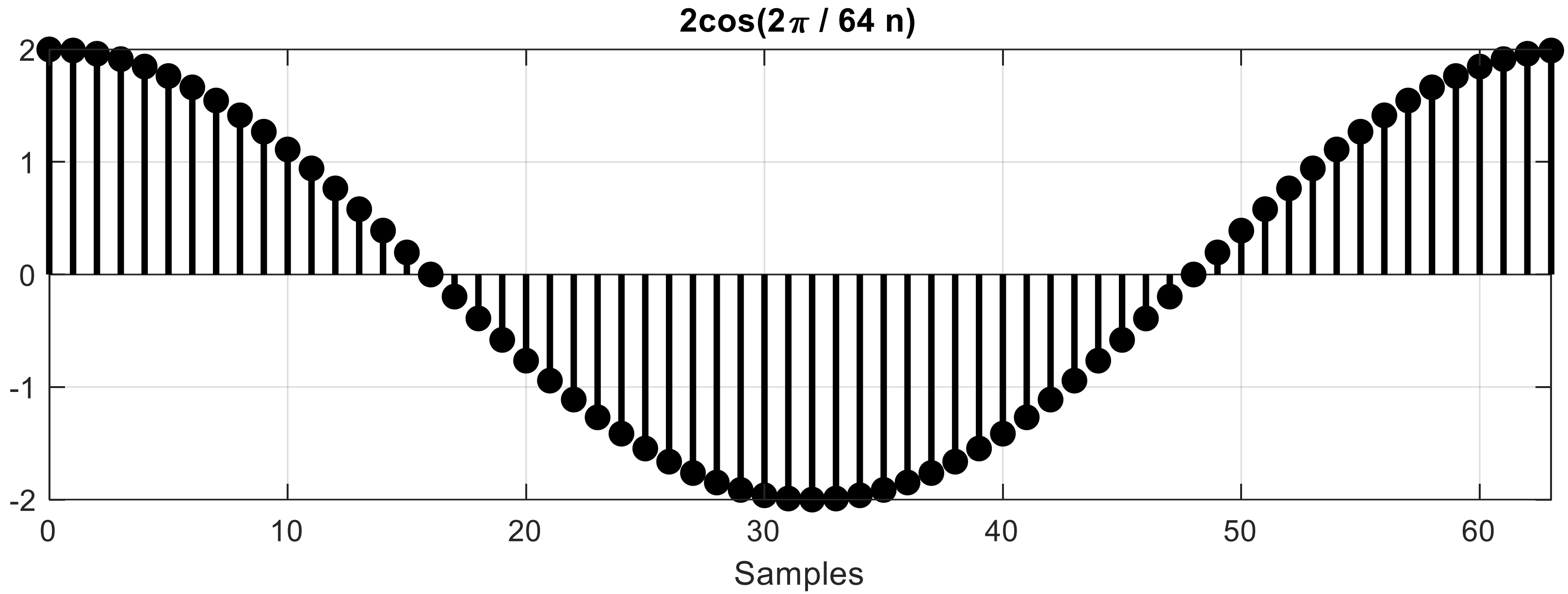
$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W\left(e^{j(\omega-\omega_1)}\right) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W\left(e^{j(\omega+\omega_1)}\right)$$

- Για ευκολία, $\phi_1 = 0,\ A_1 = 2$

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W\left(e^{j(\omega-\omega_1)}\right) + W\left(e^{j(\omega+\omega_1)}\right)$$

- Έστω ότι $\omega_1 = \frac{2\pi}{64}$ και επιλέγουμε να πάρουμε **ακριβώς 64 δείγματα** του σήματος στο χρόνο, δηλ.

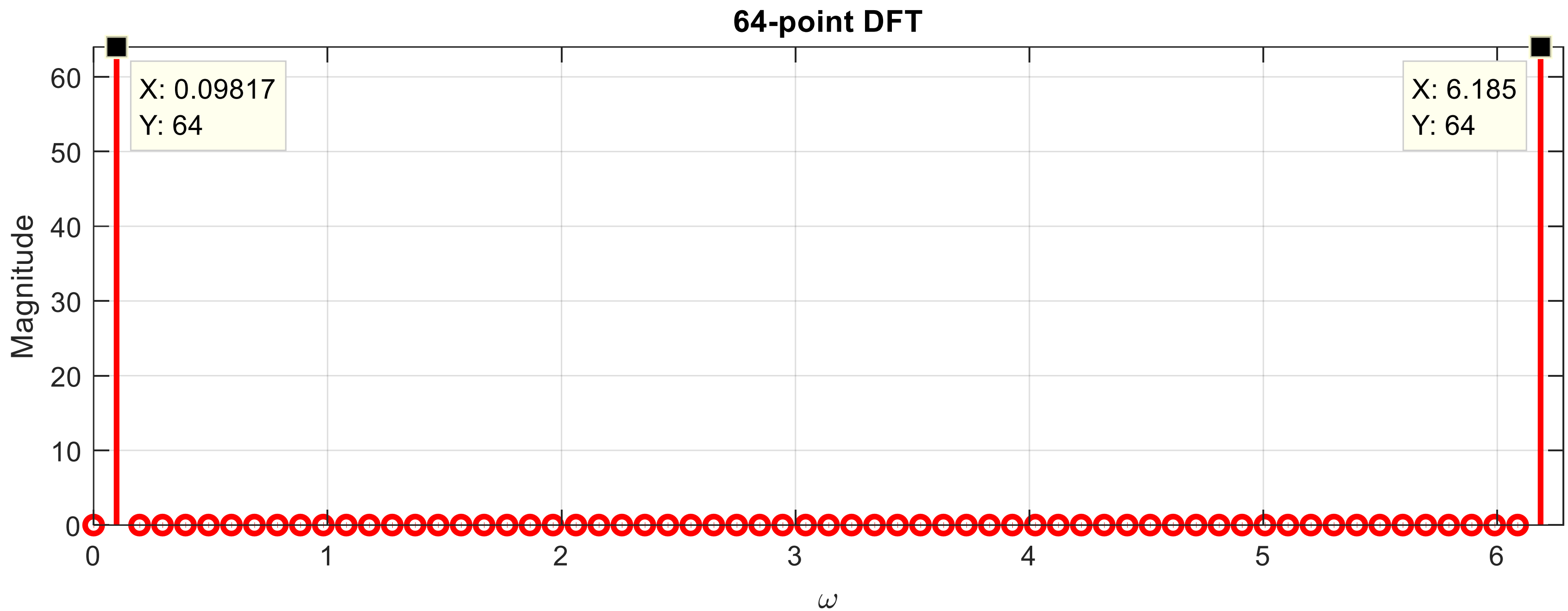


- Παρατηρήστε ότι πήραμε **ακριβώς μια περίοδο** του περιοδικού ημιτόνου (περίοδος $N = 64$)
- Ας κάνουμε DFT επάνω στο σήμα αυτό…

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

$$\hat{X}[k] = W\left(e^{j(2\pi k/64-2\pi/64)}\right) + W\left(e^{j(2\pi k/64+2\pi/64)}\right)$$

- Η εικόνα που παίρνουμε είναι αυτή:

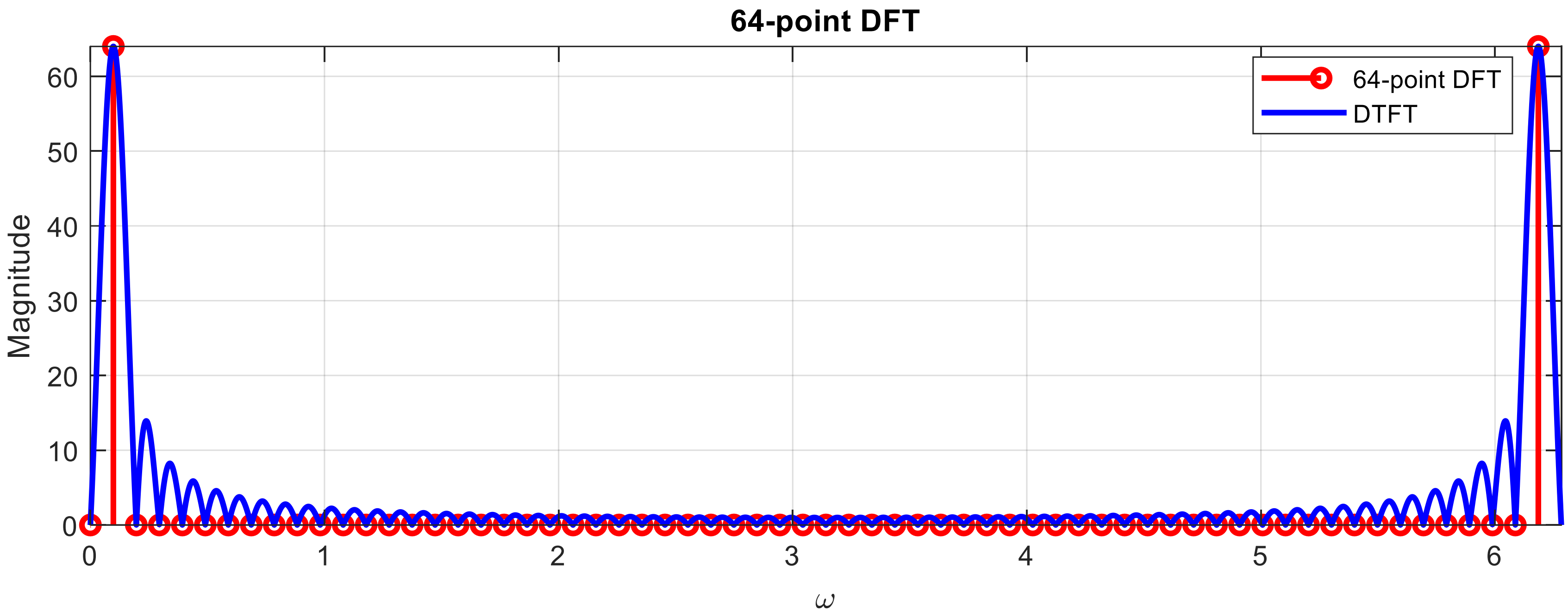


- Παρατηρήστε ότι έχουμε λάβει μη μηδενικές τιμές **ακριβώς** στις συχνότητες $2\pi/64$ και $2\pi - \frac{2\pi}{64}$!!
- Σαν να δειγματοληπτήσαμε ακριβώς στις υποτιθέμενες συναρτήσεις Δέλτα!
  - Γιατί συνέβη αυτό?

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

$$\hat{X}[k] = W\left(e^{j(2\pi k/64 - 2\pi/64)}\right) + W\left(e^{j(2\pi k/64 + 2\pi/64)}\right)$$

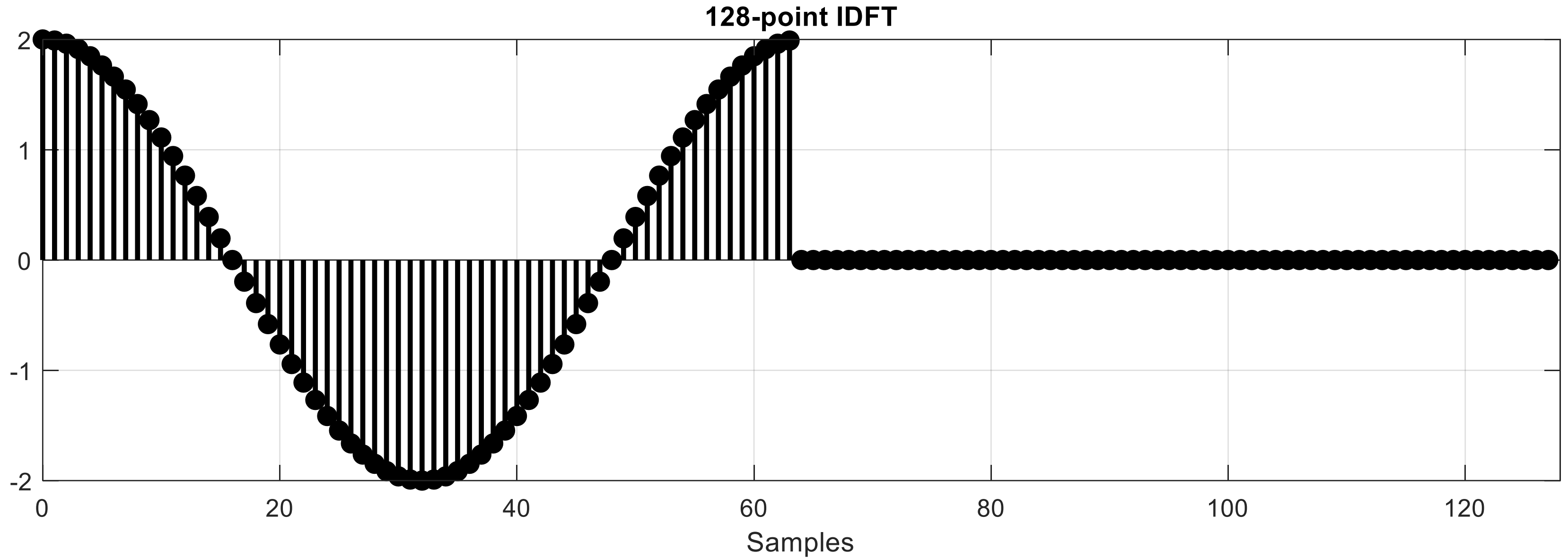
- Ας βάλουμε τον DTFT επάνω στο ίδιο γράφημα:



- Βλέπετε ότι δειγματοληπτήσαμε «βέλτιστα» τον DTFT!
- Τι θα συνέβαινε αν δειγματοληπτούσαμε με περισσότερα από 64 δείγματα στη συχνοτητα?
- Θα είχαμε zero-padded σήμα στο χρόνο!

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Το zero-padding οδηγεί σε ασυνέχεια!



- Μια τέτοια ασυνέχεια χρειάζεται υψηλές συχνότητες για να αναπαρασταθεί
  - Πράγματι, τέτοιες συχνότητες υπήρξαν όταν πήραμε παραπάνω δείγματα του DFT, σε συχνότητες διαφορετικές της $\frac{2\pi}{64}$

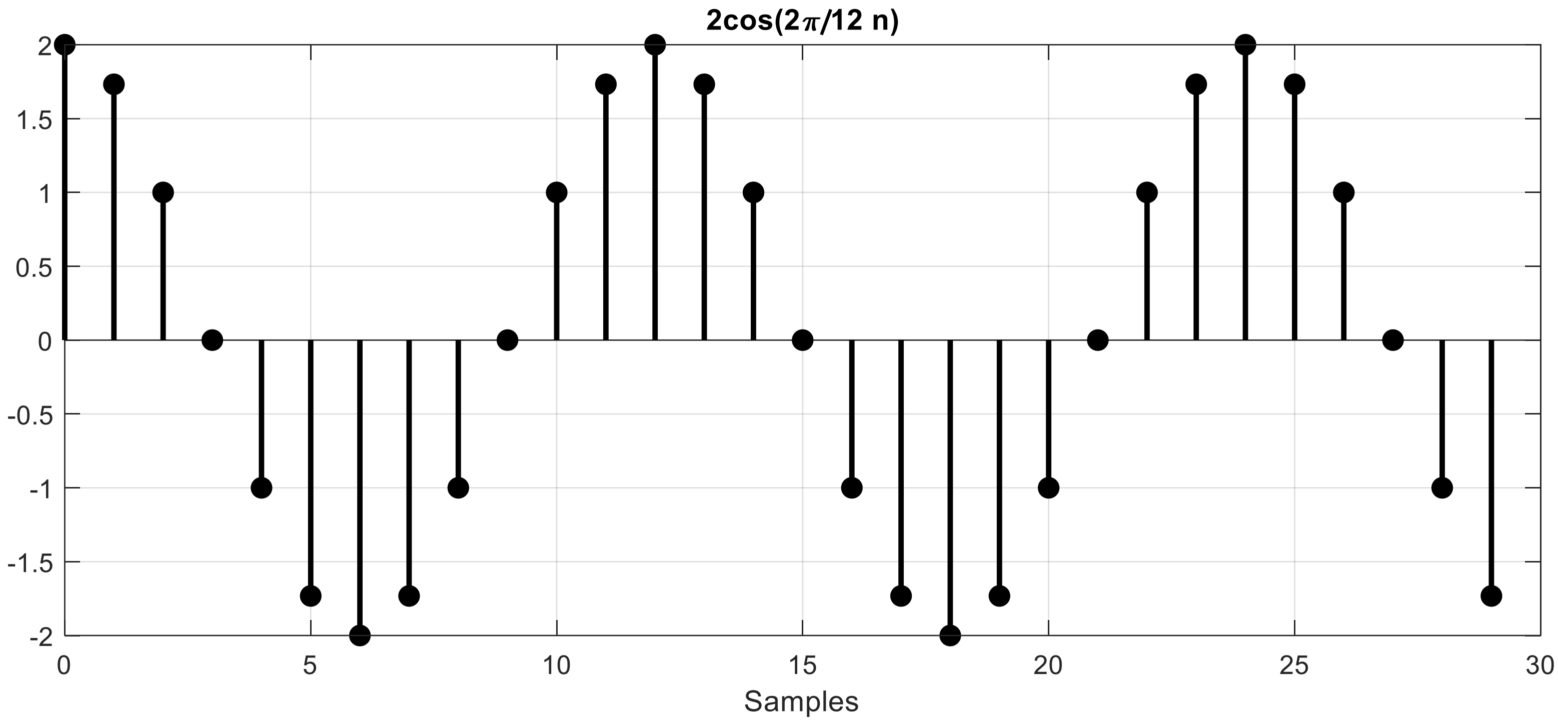
- Επιπλέον, επειδή δώσαμε **ακριβώς** μια περίοδο του ημιτόνου στον DFT, αυτός θεώρησε ότι το σήμα αυτό αντιστοιχεί σε ένα περιοδικό σήμα **ΜΙΑΣ** συχνότητας $\frac{2\pi}{64}$, και εμφάνισε μόνο **μια** μη μηδενική τιμή σε αυτή τη συχνότητα!

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

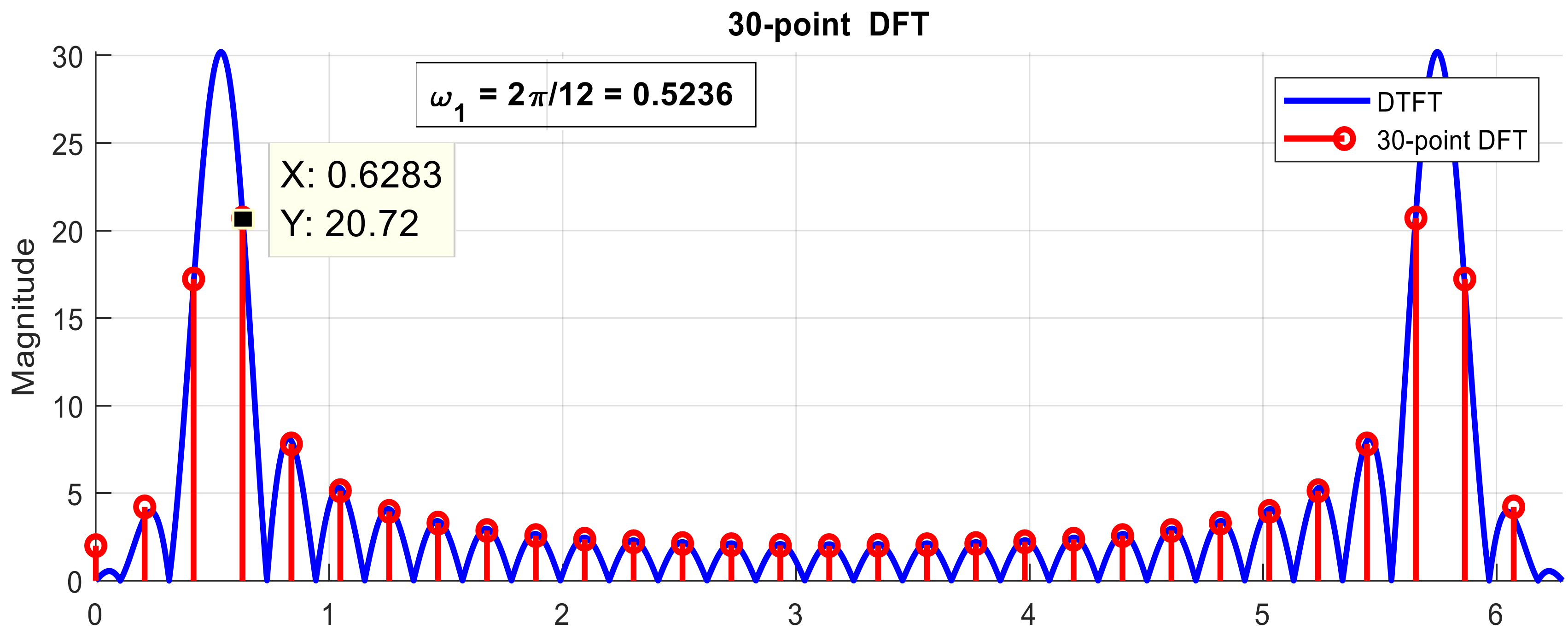
- Δεν μπορούμε όμως να ξέρουμε εκ των προτέρων την περίοδο ενός σήματος που θέλουμε να αναλύσουμε (ειδικά όταν αποτελείται από άθροισμα πολλών άγνωστων σημάτων)

- Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι – στο ίδιο παράδειγμα – τα δείγματα μας δεν αντιστοιχούν σε μια περίοδο αλλά σε 2.5 περιόδους

- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}$, για λόγους αισθητικούς (απεικόνισης)

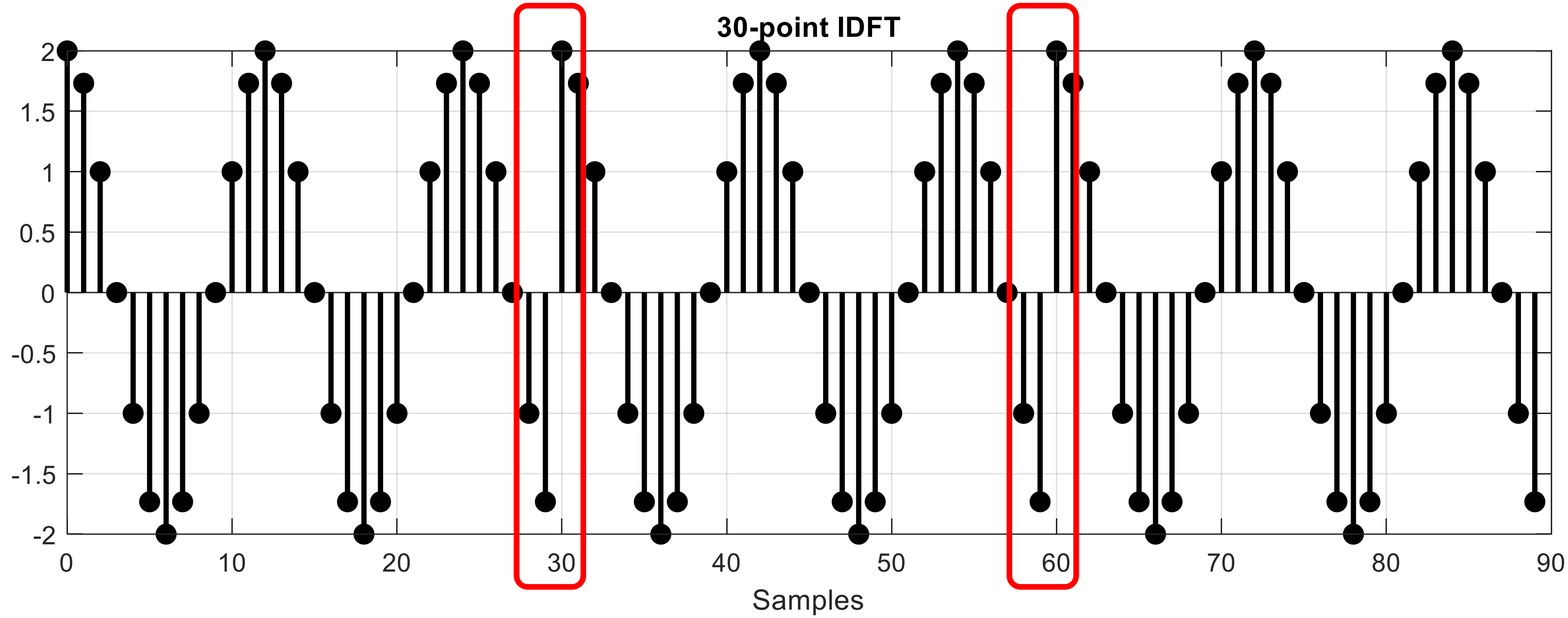


- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- O DFT σε 30 σημεία, μαζί με τον DTFT, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



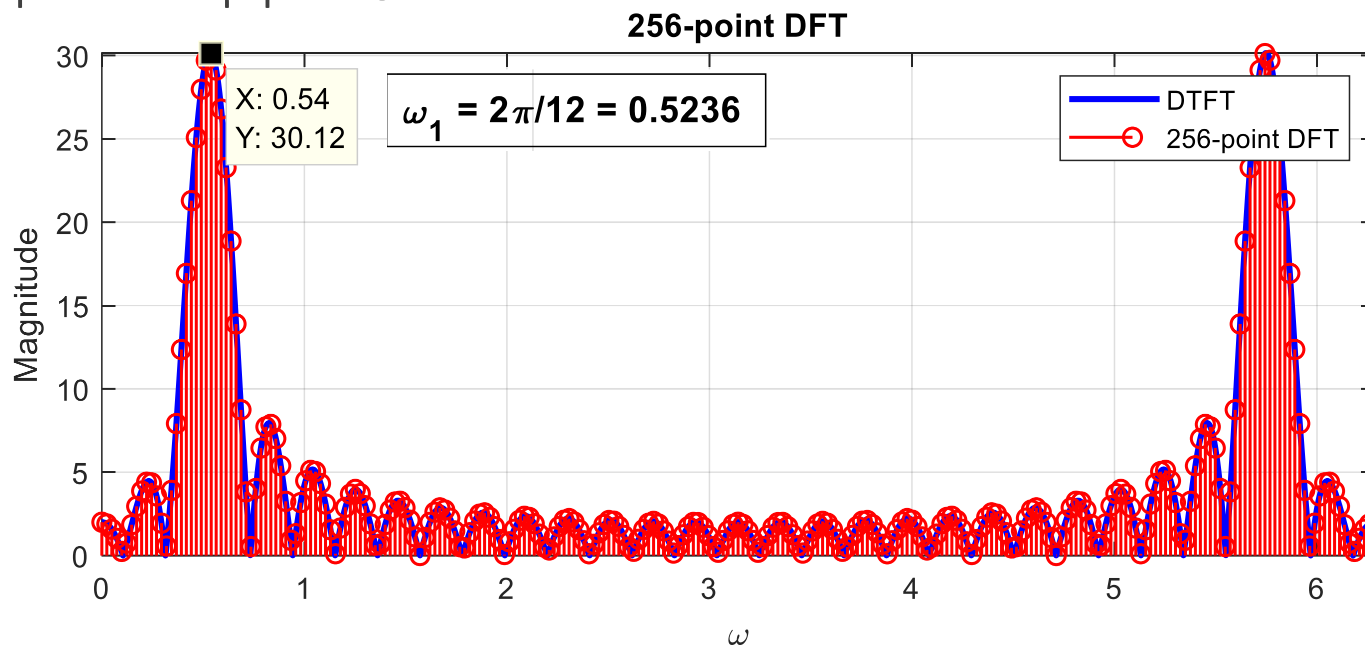
- Βλέπετε ότι όχι μόνο «χάσαμε» το peak που αντίστοιχεί στη συχνότητα μας…
  - …αφού τα frequency bins «πέφτουν» εκατέρωθεν της πραγματικής συχνότητας (**spectral scalloping**) …
- …αλλά δειγματοληπτήσαμε και συχνότητες που «ανήκουν» στο μετασχ. Fourier του παραθύρου!
- Γιατί συνέβη αυτό?

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ο DFT υπέθεσε ότι το σήμα που αναλύει είναι το παρακάτω:



- Οι ασυνέχειες αυτές απαιτούν κι άλλες συχνότητες (χαμηλές και υψηλές) για να μοντελοποιηθούν, πέραν της $\frac{2\pi}{12}$
  - Τις συχνότητες αυτές που δειγματοληπτήσαμε στον DTFT!
- Μπορούμε να βελτιώσουμε την κατάσταση?
  - Ναι! Να δειγματοληπτήσουμε **πυκνότερα** τον DTFT! ☺

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Δηλ. να αυξήσουμε τον αριθμό N των δειγμάτων που παίρνουμε στον DFT
- Κάποια από τα παραπάνω δείγματα θα «έπεφταν» πάνω στις δυο κορυφές του DTFT και θα «έπιαναν» τις σωστές συχνότητες
- **Πυκνότερη δειγματοληψία του DTFT** (ήτοι, μεγαλύτερος αριθμός δειγμάτων N του DFT) οδηγεί σε **zero-padding του σήματος στο χρόνο**
  - Η περιοδικότητα «καταργείται»!
  - Δημιουργούνται ασυνέχειες!
  - Αλλά η συχνότητα μπορεί να εκτιμηθεί! ☺



Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier

- Ενδεικτικός κώδικας

```
% Frequency
w0 = 2*pi/12;
% Period
N0 = 12;
% Number of periods
NoP = 2.5;
% Signal length
N = NoP*N0;
% Windowed signal
x = 2*cos(w0*(0:N-1));
% Plotting
figure; stem((0:N-1), x, 'k');
grid;
```

```
% FFT
NFFT = 256;
X = fft(x, NFFT);
omega = linspace(0, 2*pi, 6000);
% DTFT of w[n] centered aroun w0
W1 = (sin((omega-w0)*N/2)./sin((omega-w0)/2))...
    .*exp(-1i*(omega-w0)*(N-1)/2);
% DTFT of w[n] centered aroun 2pi-w0
W2 = (sin((omega-(2*pi-w0))*N/2)./sin((omega-(2*pi-w0))/2))...
    .*exp(-1i*(omega-(2*pi-w0))*(N-1)/2);
% Sum of DTFTs
W = W1+W2;
% Plotting
figure;  plot(omega, abs(W), 'b', 'LineWidth', 2)
axis([0 2*pi 0 max(abs(W))]); grid;
hold on; stem((0:NFFT-1)*2*pi/NFFT, abs(X), 'r', 'LineWidth', 1);
title('256-point DFT');
xlabel('\omega'); ylabel('Magnitude');
legend('DTFT', '256-point DFT');
```

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Όσον αφορά το **πλάτος** του ημιτόνου?
- Έχουμε

$$\left|\hat{X}\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{A_1}{2}\left|W\left(e^{j(\omega-\omega_1)}\right)\right| + \frac{A_1}{2}\left|W\left(e^{j(\omega+\omega_1)}\right)\right|$$

- Ξέρουμε ότι

$$\left|W\left(e^{j0}\right)\right| = N+1$$

με $N+1$ τη διάρκεια του παραθύρου στο χρόνο

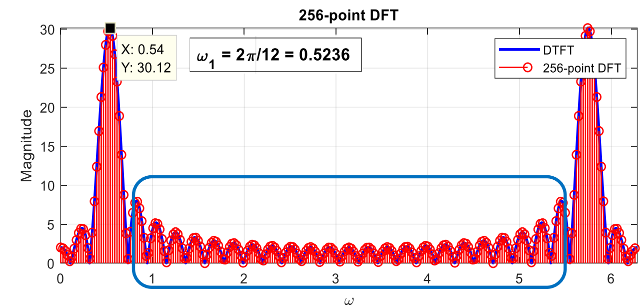
- Άρα πρέπει να διαιρέσουμε το πλάτος που αντιστοιχεί στη συχνότητα $\omega = \pm\omega_1$ που εκτιμούμε με τον αριθμό $N+1$
- Ο αριθμός $N+1$ συμπίπτει με τον αριθμό των δειγμάτων στο τετραγωνικό παράθυρο
- Για οποιοδήποτε παράθυρο έχουμε

$$W\left(e^{j0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Άρα πρέπει να διαιρέσουμε με το άθροισμα όλων των δειγμάτων του $w[n]$

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

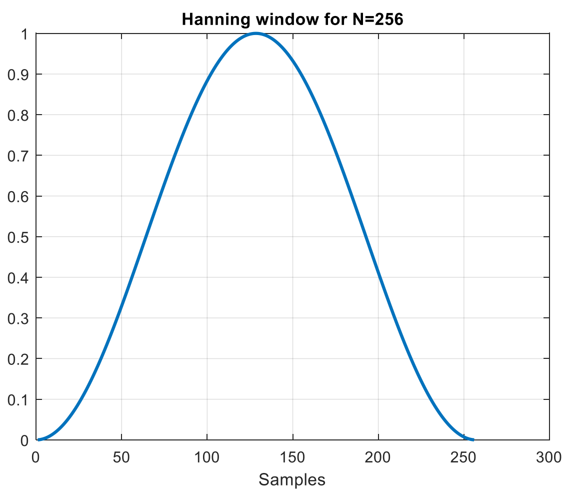
- Το πρόβλημα της **φασματικής διασποράς (spectral spreading)** - το γεγονός ότι ο μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου έχει ενέργεια και σε άλλες συχνότητες εκτός του $\omega = 0$ – παραμένει
  - Ύπαρξη ισχυρών πλευρικών λοβών!



- Πώς θα μπορούσαμε να το βελτιώσουμε κι αυτό?
  - Να αλλάξουμε παράθυρο! ☺

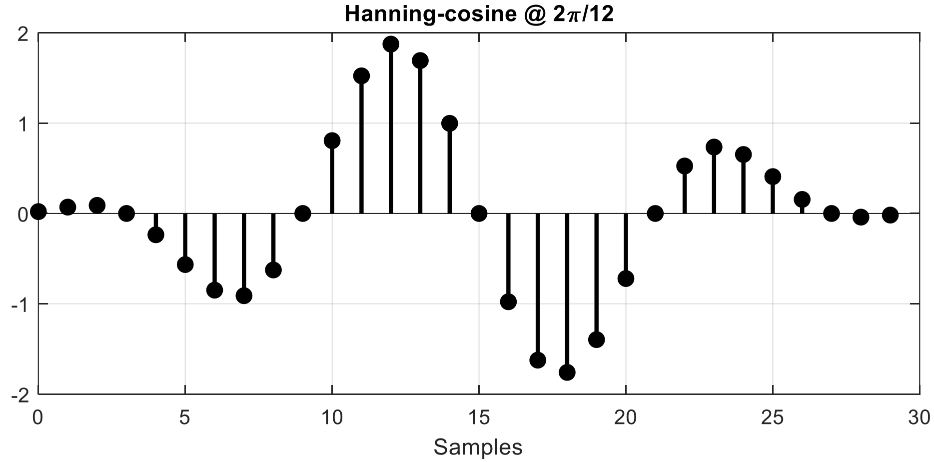
- Ας δοκιμάσουμε το παράθυρο Hanning (Von Hann) αντί του τετραγωνικού:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{u} \end{cases}$$

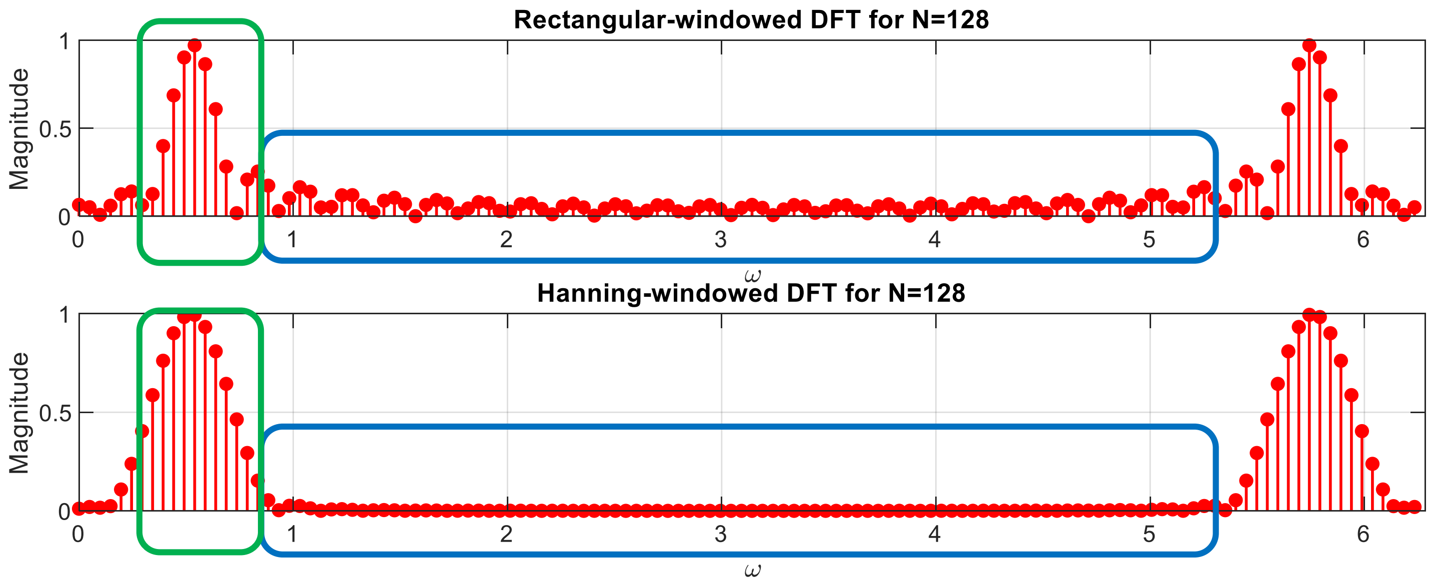


- Ο DTFT του αποτελείται από ένα γραμμικό συνδυασμό τριών DTFT του τετραγωνικού παραθύρου

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Πολλαπλασιάζοντας το ημίτονο με ένα παράθυρο Hanning:



- Παίρνοντας τώρα DFT σε 128 σημεία και κανονικοποιώντας, έχουμε:



+++ Μείωση διασποράς

--- Αύξηση εύρους κεντρικού λοβού

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι **το πλήθος N των συντελεστών του DFT** (το πλήθος των δειγμάτων που λαμβάνουμε από τον DTFT ανά $\frac{2\pi}{N}$) πρέπει να είναι **όσο μεγαλύτερο γίνεται**

- Αυτό επιτυγχάνεται κάνοντας **zero-padding του σήματος στο πεδίο του χρόνου**
  - Στα περισσότερα προγραμματιστικά περιβάλλοντα (MATLAB/Octave) γίνεται αυτόματα

- **Πυκνή δειγματοληψία** του DTFT μας δίνει μια **καλή προσέγγιση** της εικόνας του DTFT μέσω του DFT

- **Σωστή εύρεση του πλάτους** του σήματος γίνεται διαιρώντας τον DFT με την τιμή

$$W\left(e^{j0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]$$

- Η **φασματική διασπορά** μπορεί να μειωθεί επιλέγοντας διαφορετικό παράθυρο

- Ας εγκαταλείψουμε τώρα την ανάλυση ενός ημιτόνου και ας πάμε σε περισσότερες συχνότητες κι ας δούμε τι συμβαίνει εκεί

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

- Έστω

$$x[n] = A_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 n + \phi_2)\,, \qquad -\infty < n < +\infty$$

- Θεωρητικά,

$$X\left(e^{j\omega}\right) = A_1 \pi e^{j\phi_1} \delta(\omega - \omega_1) + A_1 \pi e^{-j\phi_1} \delta(\omega + \omega_1)$$

$$+ A_2 \pi e^{j\phi_2} \delta(\omega - \omega_2) + A_2 \pi e^{-j\phi_2} \delta(\omega + \omega_2)$$

- Η τετραγωνικώς παραθυροποιημένη έκδοση του θα έχει DTFT

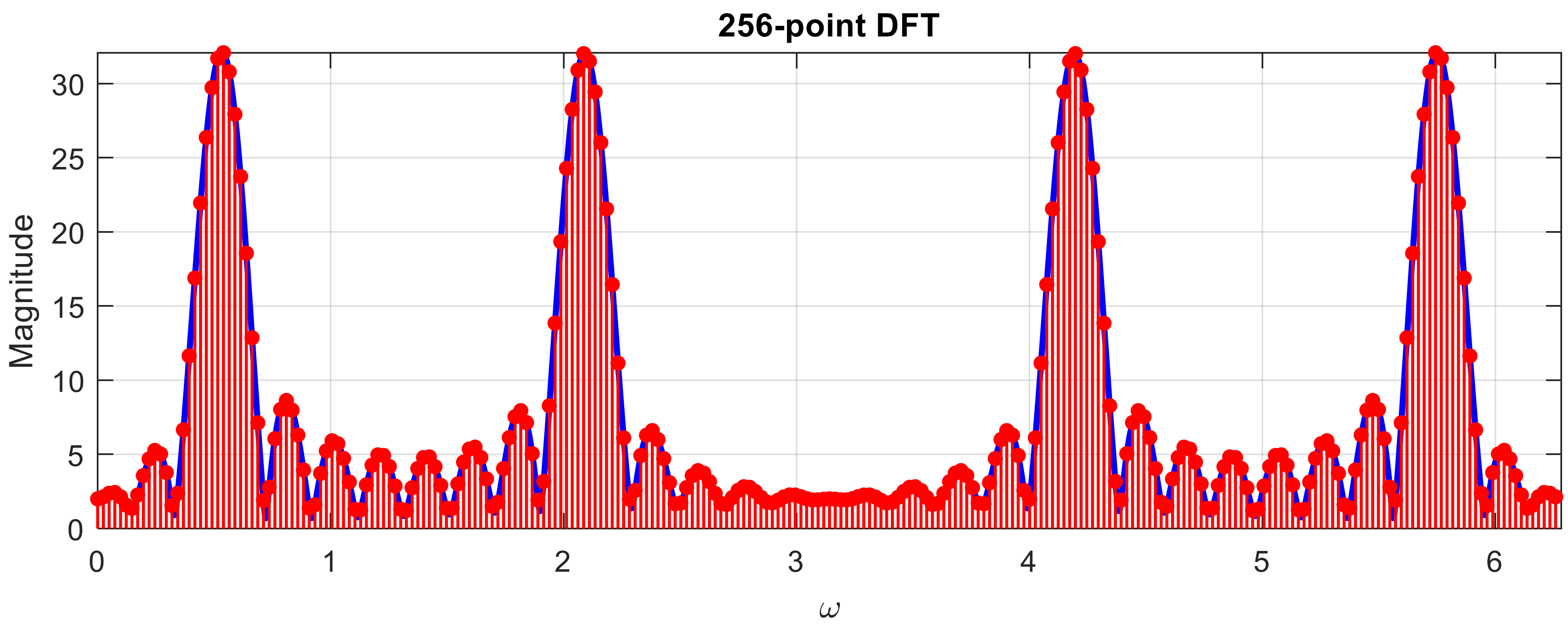
$$\mathrm{DTFT}\{x[n]w[n]\} = \frac{A_1}{2} e^{j\phi_1} W\left(e^{j(\omega-\omega_1)}\right) + \frac{A_1}{2} e^{-j\phi_1} W\left(e^{j(\omega+\omega_1)}\right)$$

$$+ \frac{A_2}{2} e^{j\phi_2} W\left(e^{j(\omega-\omega_2)}\right) + \frac{A_2}{2} e^{-j\phi_2} W\left(e^{j(\omega+\omega_2)}\right)$$

- Για ευκολία, $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_1 = A_2 = 2$, και $\omega_1 \neq \omega_2$

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = W\left(e^{j(\omega-\omega_1)}\right) + W\left(e^{j(\omega+\omega_1)}\right) + W\left(e^{j(\omega-\omega_2)}\right) + W\left(e^{j(\omega+\omega_2)}\right)$$

- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Αρχικά, έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{3}$

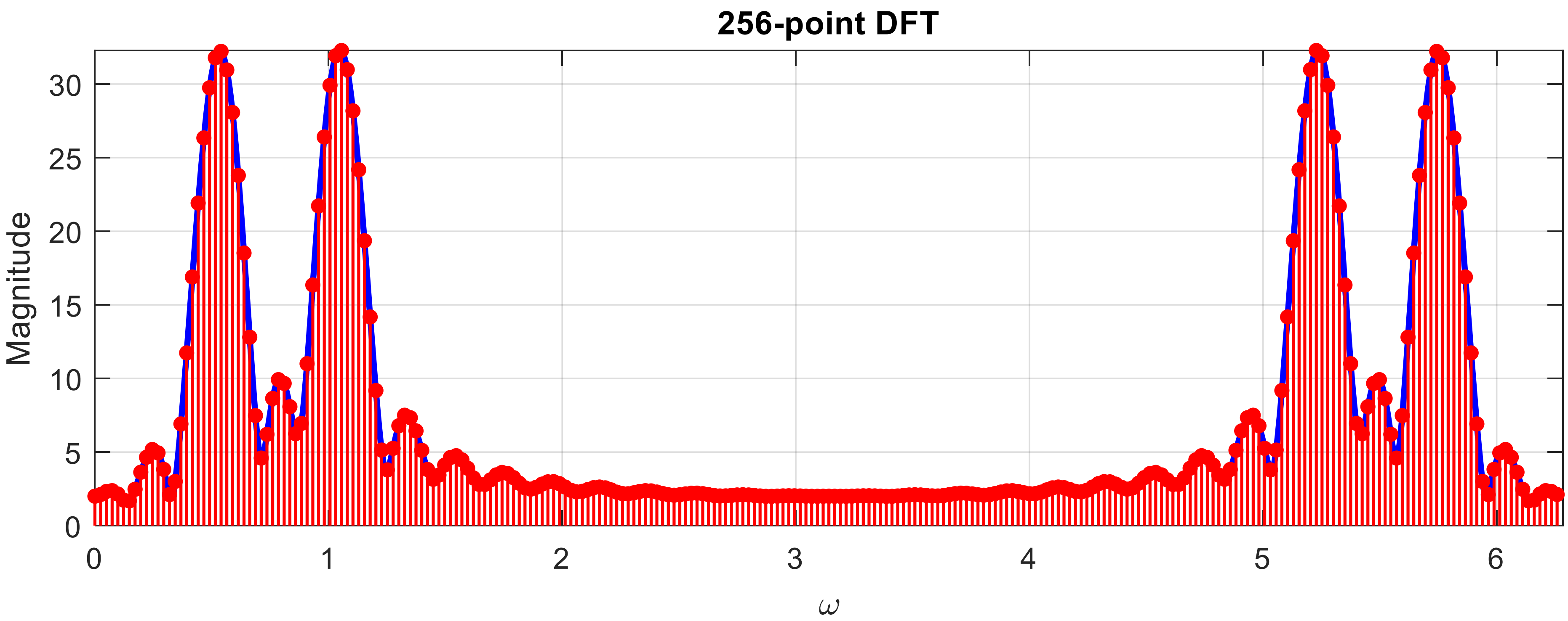


- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**

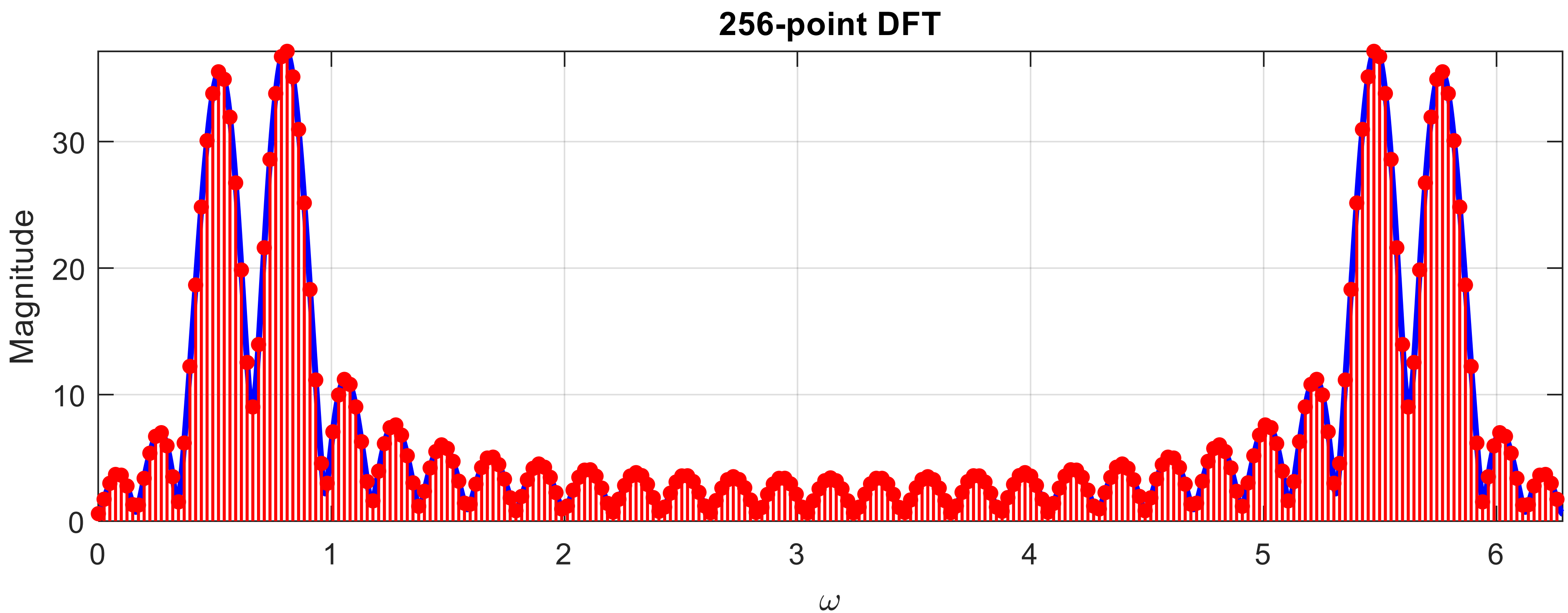
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο

- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2

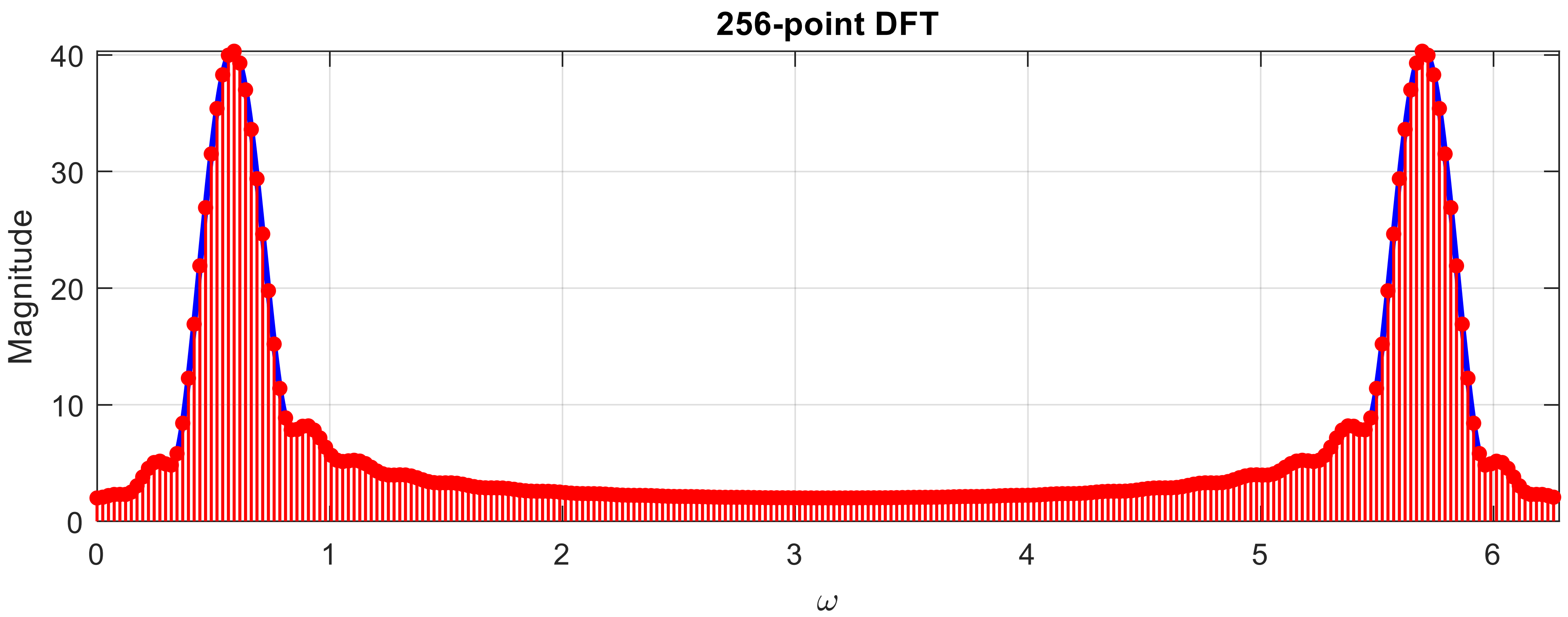
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{6}$



- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{8}$



- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Ας χρησιμοποιήσουμε έναν 256-σημείων DFT και ένα τετραγωνικό παράθυρο 30 δειγμάτων στο χρόνο
- Θα δούμε διάφορες τιμές των ω_1, ω_2
- Έστω $\omega_1 = \frac{2\pi}{12}, \omega_2 = \frac{2\pi}{10}$



- **Φασματική Ανάλυση με το Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier**
- Τι παρατηρήσατε?
- **α) Όταν οι συχνότητες ήρθαν «κοντά», το πλάτος της μιας επηρεάστηκε από αυτό της άλλης**
  - **Φασματική διαρροή (spectral leakage) λόγω φασματικής διασποράς!**
  - **Οποιοδήποτε παράθυρο διασπείρει τη φασματική ενέργεια σε συχνότητες διάφορες της $\omega = 0$**
- **β) Όταν οι συχνότητες πλησίασαν «πολύ κοντά», δεν ήταν πια διαχωρίσιμες!**
  - **Ανεπαρκής ανάλυση!**
- Υπεύθυνοι για τη φασματική διαρροή λόγω φασματικής διασποράς είναι κυρίως οι πλευρικοί λοβοί του μετασχ. Fourier ενός παραθύρου…
- …ενώ υπεύθυνος για την ανεπαρκή ανάλυση είναι κυρίως ο κεντρικός λοβός του μετασχ. Fourier του τετραγωνικού παραθύρου…
  - …είχε μεγάλο εύρος και επικαλύφθηκε με γειτονικούς…
- Ξέρουμε ότι τα περισσότερα παράθυρα έχουν κεντρικούς λοβούς μεγαλύτερους από του τετραγωνικού παραθύρου
  - Το κέρδος τους «προέρχεται» από τους πλευρικούς λοβούς
- Τι μπορούμε να κάνουμε?

Συνεχίζεται... ☺