

Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 15^Η

- Συστήματα στο χώρο του Z

• Αντίστροφα Συστήματα

• Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι αυτό της ακύρωσης της επίδρασης ενός συστήματος επάνω σε μια είσοδο

• Έστω ότι έχουμε το σύστημα με έξοδο $y[n] = x[n] * h[n]$, και η επίδραση της κρουστικής απόκρισης είναι ανεπιθύμητη

• Όπως π.χ. όταν περνάμε ένα σήμα από ένα τηλεπικοινωνιακό κανάλι που διαταράσσει το σήμα εισόδου

• Τότε χρειαζόμαστε ένα σύστημα $h_i[n]$ τέτοιο ώστε

$$y[n] * h_i[n] = x[n] * h[n] * h_i[n] = x[n]$$

δηλ. να ανακτήσουμε την είσοδο από την έξοδο

• Από την παραπάνω σχέση εύκολα καταλαβαίνετε ότι $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$

• Φέρνοντας τη σχέση αυτή στο χώρο του Z προκύπτει ότι

$$H_i(z)H(z) = 1, \quad R_H \cap R_{H_i} \neq \emptyset$$

• Το σύστημα $h_i[n]$ ονομάζεται **αντίστροφο σύστημα** του $h[n]$

• Στο χώρο του Z, αν

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}$$

τότε

$$H_i(z) = \frac{1}{A} \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}$$

Οι πόλοι του συστήματος γίνονται μηδενικά του αντιστρόφου και τα μηδενικά του συστήματος γίνονται πόλοι του αντιστρόφου

• Αντίστροφα Συστήματα

• Παράδειγμα:

○ Έστω $H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}}$, $|z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

Είναι $H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$, ROC_{H_i} ?

Επιλογές ROC :

- $|z| > 0.5$
- $|z| < 0.5$

$\cap |z| > 0.8 \neq \emptyset$

Άρα $H_i(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$, $|z| > 0.5$

Επιλογή

$$h_i[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-0.5z^{-1}} - 0.8z^{-1} \frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \right\}, |z| > 0.5$$

$$= (0.5)^n u[n] - 0.8(0.5)^{n-1} u[n-1].$$

• Αντίστροφα Συστήματα

• Παράδειγμα:

○ Έστω $H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}$, $|z| > 0.8$. Βρείτε το αντίστροφο σύστημα $h_i[n]$

$$\left\{ \frac{1}{2} - z^{-1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{z} \right.$$

$z = 2$

Είναι $H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}}$, ROC H_i ?

Επιλογές :

- $|z| > 2$ (αιτιατό, ασταδές)
- $|z| < 2$ (ευσταδές, αναιτιατό)

$\cap |z| > 0.8 \neq \emptyset$

Και τα δύο είναι έγκυρα ROC αντίστροφα συστήματα!!

Είναι $H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{\frac{1}{2} - z^{-1}} = \frac{2 - 1.6z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} = \frac{2}{1 - 2z^{-1}} - 1.6 \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1}}$

Θα είναι:

- $h_i[n] = 2(2)^n u[n] - 1.6(2)^{n-1} u[n-1] \rightarrow$ αιτιατό, ασταδές
- $h_i[n] = -2 \cdot (2)^n u[-n-1] + 1.6(2)^{n-1} u[-n] \rightarrow$ ευσταδές, αναιτιατό

• Αντίστροφα Συστήματα

- Μας ενδιαφέρουν περισσότερο τα συστήματα που έχουν **ευσταθές και αιτιατό** αντίστροφο σύστημα
- Όπως είδατε πριν, μπορεί κανένα από τα υποψήφια αντίστροφα συστήματα να μην είναι **ταυτόχρονα** ευσταθές και αιτιατό
- Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$
 - Ως τέτοιο, θα έχει **όλους** τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου, αφού το πεδίο σύγκλισης του είναι $\{|z| > \max|c_k|\}$ και $|c_k| < 1, \forall k$
 - Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε
- Τι πρέπει να συμβαίνει στο σύστημα $H(z)$ έτσι ώστε το αντίστροφο σύστημα να είναι και αυτό **ευσταθές και αιτιατό**?
- Αν σκεφτούμε ότι στο αντίστροφο σύστημα τα μηδενικά του αρχικού συστήματος γίνονται πόλοι, τότε πρέπει αυτοί να βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου
 - Άρα **όλα** τα μηδενικά του αρχικού συστήματος πρέπει να βρίσκονται **ΚΑΙ ΑΥΤΑ** εντός του μοναδιαίου κύκλου
- Τέτοια συστήματα, με **όλους** τους πόλους και **όλα** τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου ονομάζονται **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης – Minimum Phase**
 - Θα τα μελετήσουμε λίγο αργότερα...

• Διάγραμμα Διανυσμάτων

- Μερικές διαλέξεις νωρίτερα, εισάγαμε το μετασχ. Z ως μια «γενίκευση» του μετασχ. Fourier επάνω στο μιγαδικό επίπεδο
- Είδαμε όμως ότι όταν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο, τότε ο μετασχ. Fourier συγκλίνει (\Rightarrow «υπάρχει» μέσω του ορισμού του)
- Όμως είδαμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά του μετασχ. Z «δρουν» επάνω στο φάσμα πλάτους και στο φάσμα φάσης του μετασχ. Fourier!
 - Πώς?
 - Ένας πόλος κοντά στο μοναδιαίο κύκλο αυξάνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
 - Ένα μηδενικό κοντά στο μοναδιαίο κύκλο μειώνει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από τη συχνότητα στην οποία βρίσκεται
 - Για το φάσμα φάσης δεν είπαμε κάτι σχετικό
- Η παραπάνω περιγραφή είναι κάπως «γενική» και «δαισθητική»
- Δε θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε ακριβώς πως επηρεάζονται οι φασματικές αποκρίσεις από τους πόλους και τα μηδενικά?

ΝΑΙ!! 😊

(...από το ακροατήριο)

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

- Ας γράψουμε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και την καθυστέρηση ομάδας μιας ρητής συνάρτησης μεταφοράς, όταν αυτή υπολογίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Απόκριση Πλάτους

$$|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{l=1}^N |1 - a_l e^{-j\omega}|}$$

- Απόκριση Φάσης

$$\begin{aligned} \angle H(e^{j\omega}) &= \angle A + \angle \prod_{k=1}^M (1 - b_k e^{-j\omega}) - \angle \prod_{k=1}^M (1 - a_k e^{-j\omega}) \\ &= \angle A + \sum_{k=1}^M \angle(1 - b_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^M \angle(1 - a_k e^{-j\omega}) \end{aligned}$$

- Καθυστέρηση Ομάδας

$$\tau_g(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \angle(1 - a_k e^{-j\omega}) - \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \angle(1 - b_k e^{-j\omega})$$

- Κοινό στοιχείο: όροι της μορφής $(1 - c_k e^{-j\omega})!!$

- **Διάγραμμα Διανυσμάτων**

- Ας θεωρήσουμε τον όρο $1 - ce^{-j\omega}$, με $c \in \mathbb{C}$

- Θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις

- Το c είναι πόλος
- Το c είναι μηδενικό

- Θα μελετήσουμε τις επιπτώσεις επάνω στις αποκρίσεις πλάτους και φάσης

- Ξεκινώντας από τη θεώρηση του $c = re^{j\theta}$ ως **μηδενικό**:

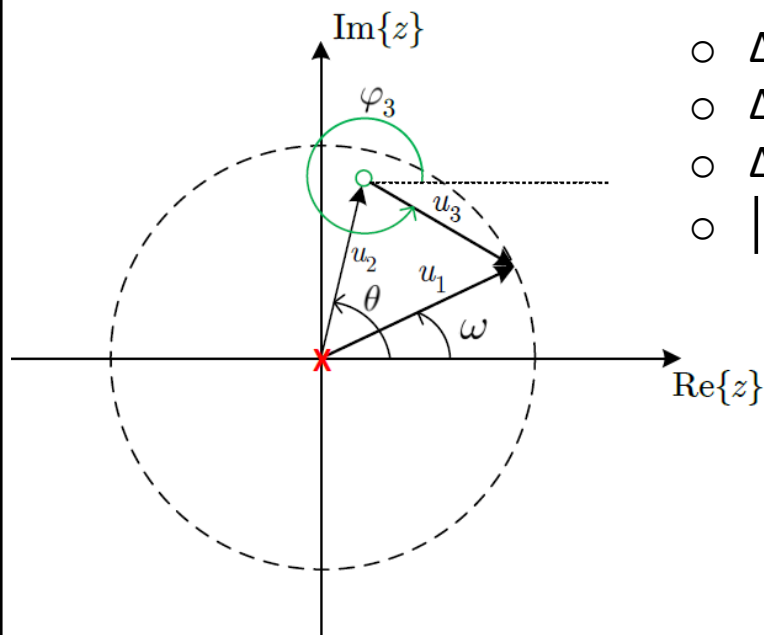
$$H(z) = 1 - cz^{-1} = 1 - re^{j\theta} z^{-1}$$

- Οπότε:

$$|H(e^{j\omega})| = |1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}| = |e^{-j\omega}| |e^{j\omega} - re^{j\theta}| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}|$$

• Διάγραμμα Διανυσμάτων

$$|H(e^{j\omega})| = |1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}|$$



- Διάνυσμα \vec{u}_1 : διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα \vec{u}_2 : διάνυσμα από 0 ως το μηδενικό
- Διάνυσμα \vec{u}_3 : διάνυσμα από μηδενικό ως το μοναδ. κύκλο
- $|e^{j\omega} - re^{j\theta}| = |\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = |\vec{u}_3|$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το μήκος του \vec{u}_3 !!

• Για την απόκριση φάσης

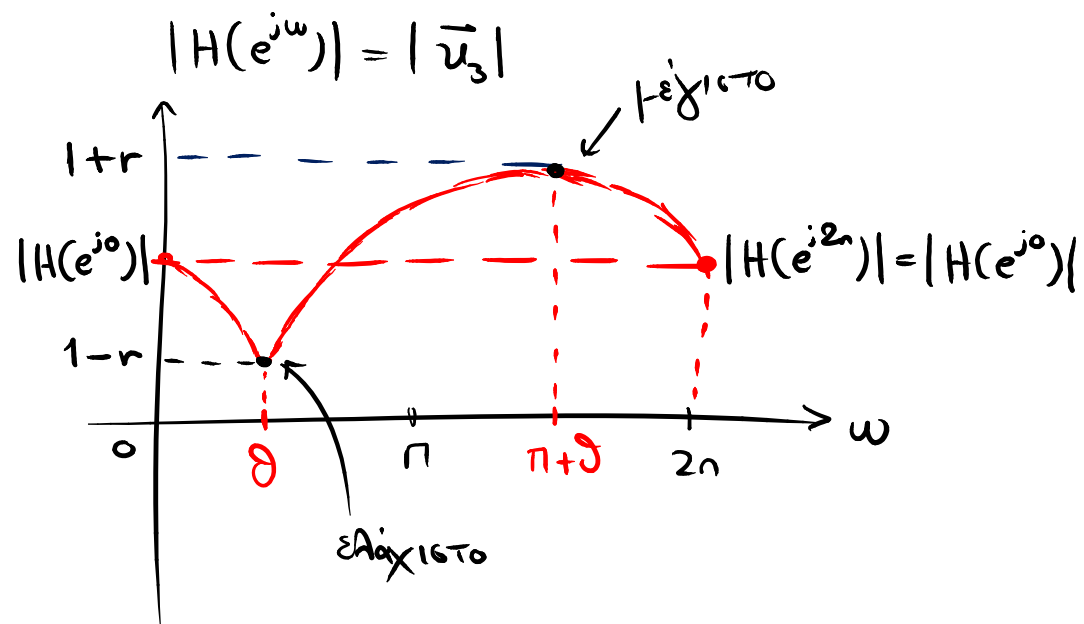
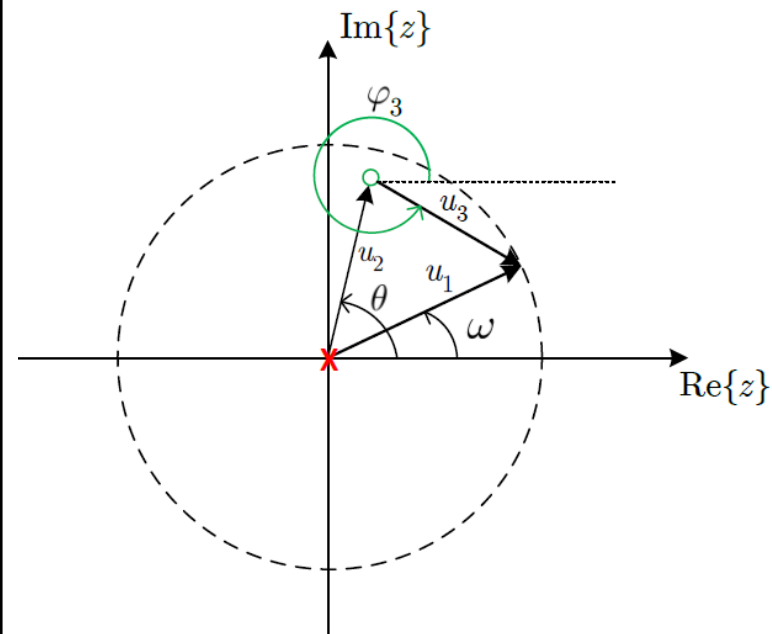
$$\angle(1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}) = \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \angle e^{j\omega} = \phi_3 - \omega$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\phi_3 - \omega$!!

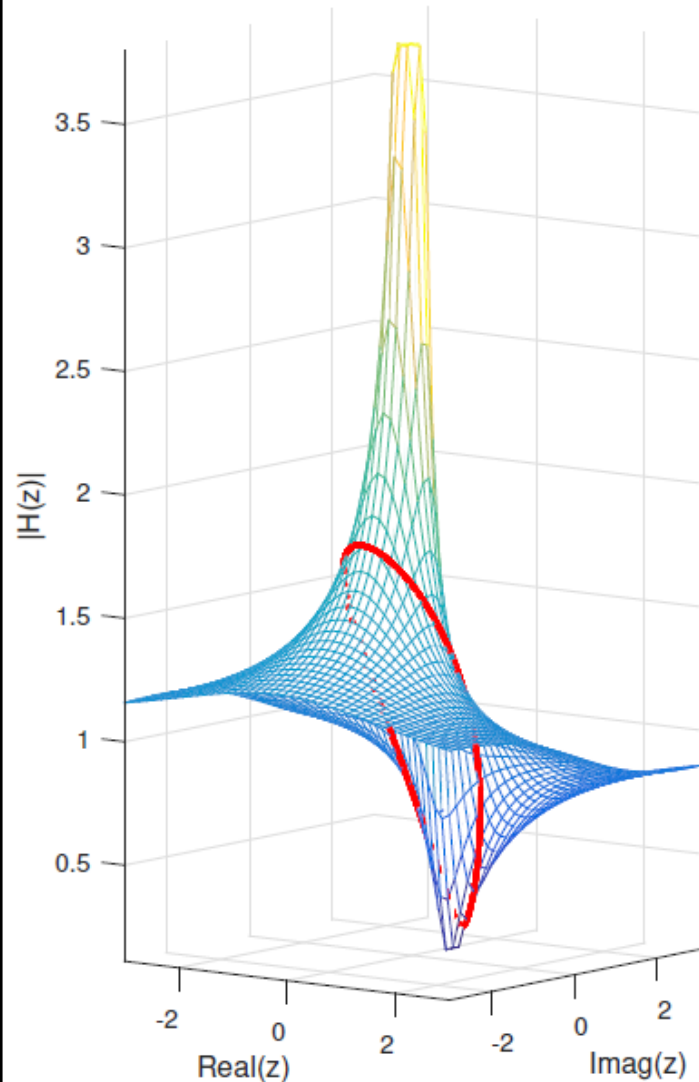
- Διάγραμμα Διανυσμάτων

$$|H(e^{j\omega})| = |\vec{u}_3|$$

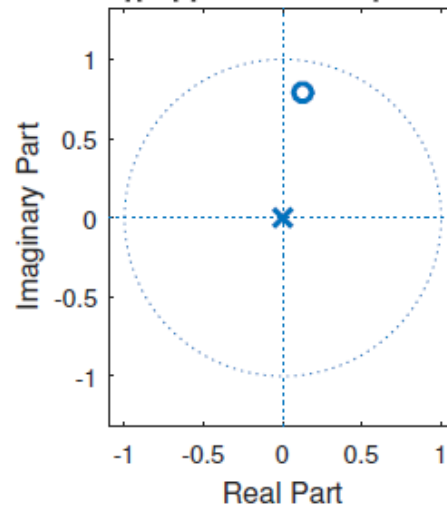
$$\angle H(e^{j\omega}) = \phi_3 - \omega$$



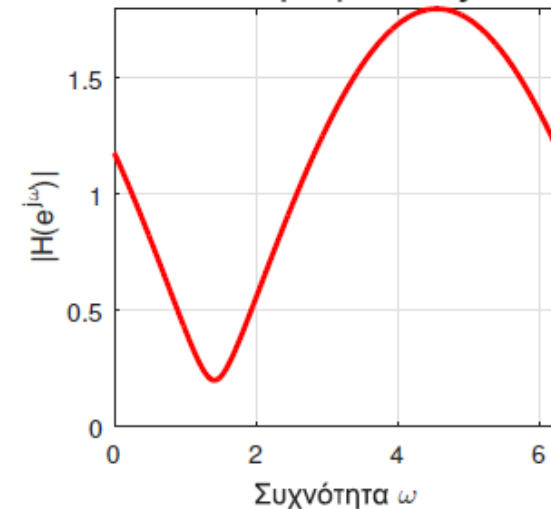
- Διάγραμμα Διανυσμάτων

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$ 

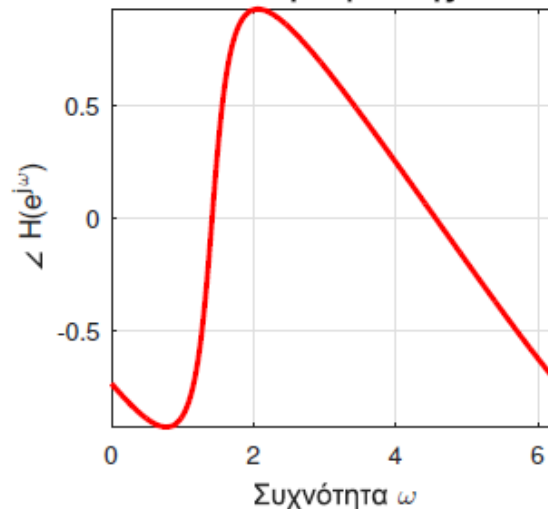
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



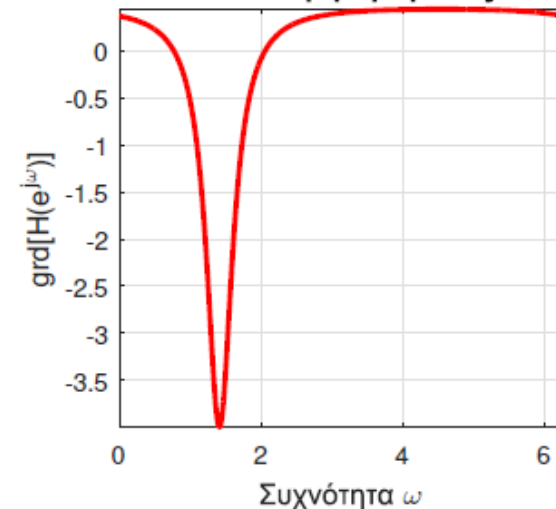
Απόκριση Πλάτους



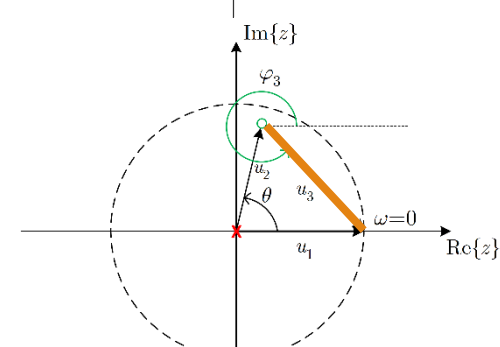
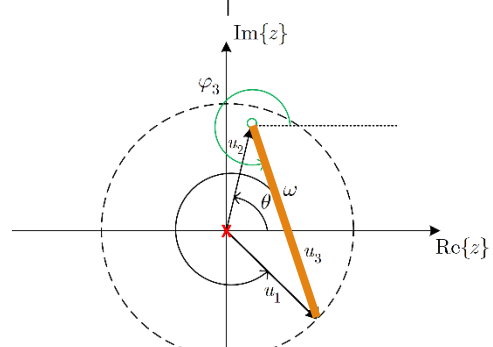
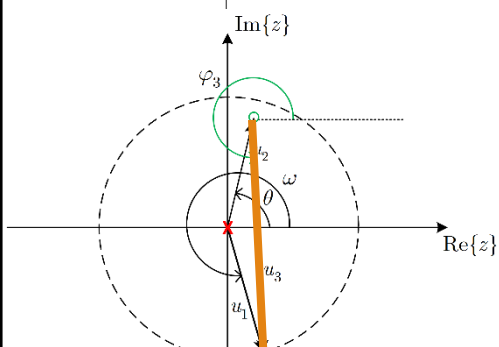
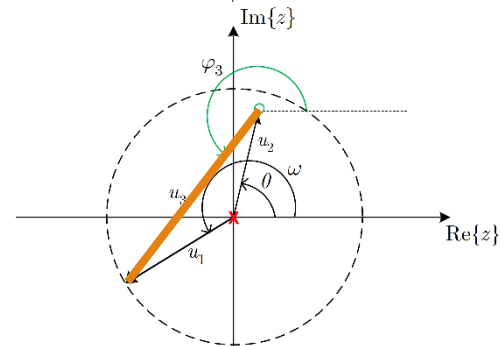
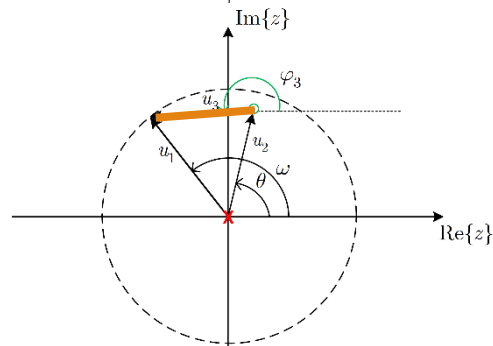
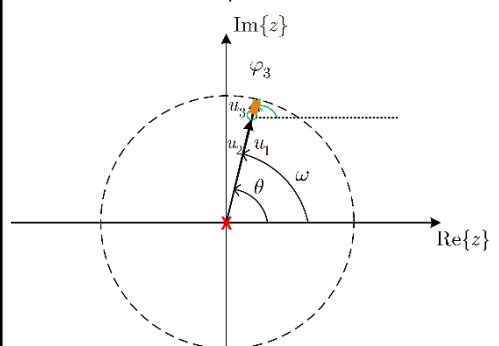
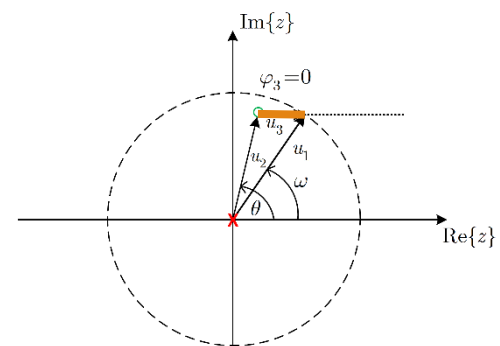
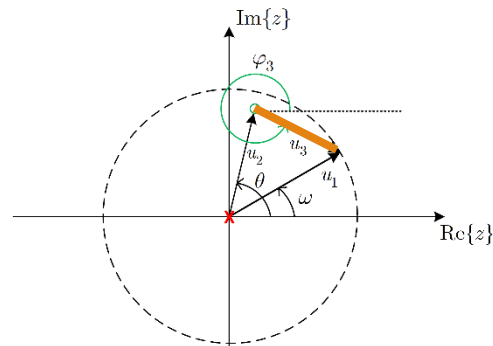
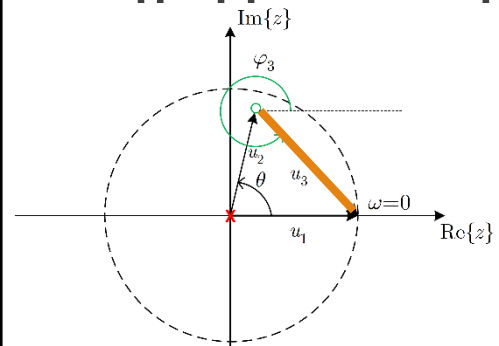
Απόκριση Φάσης



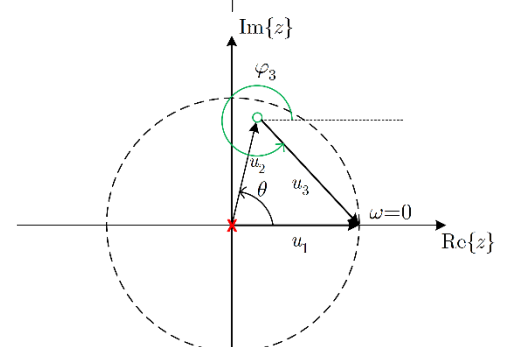
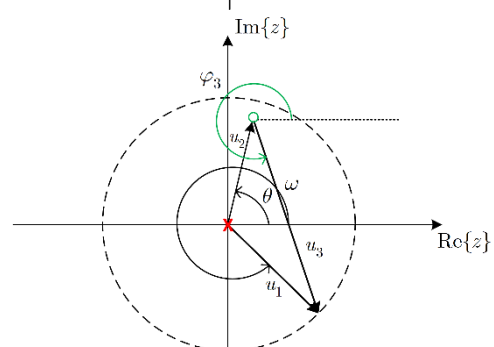
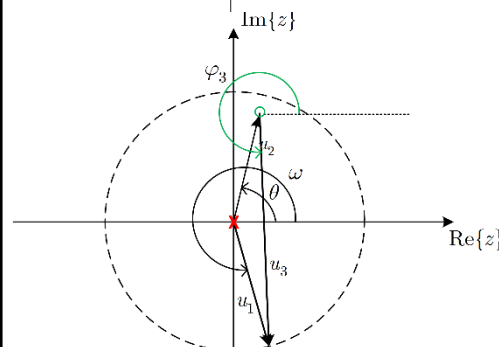
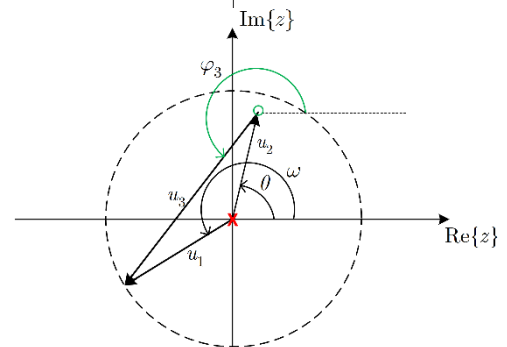
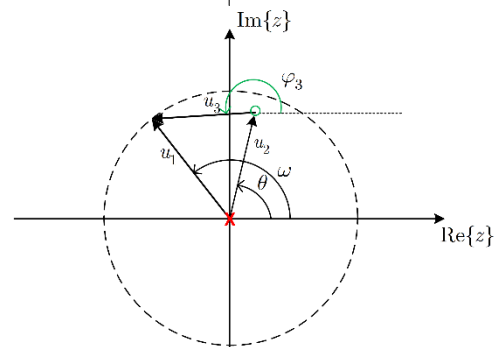
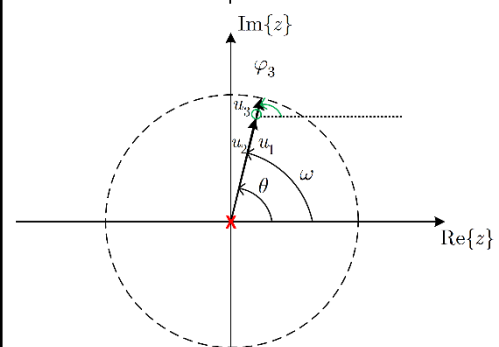
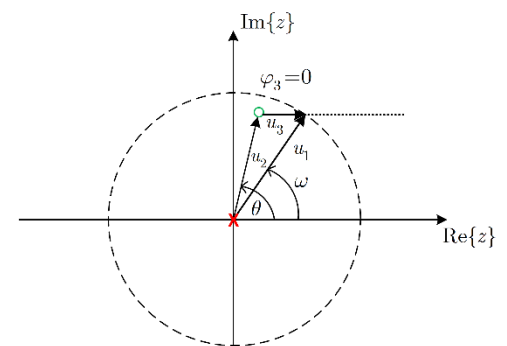
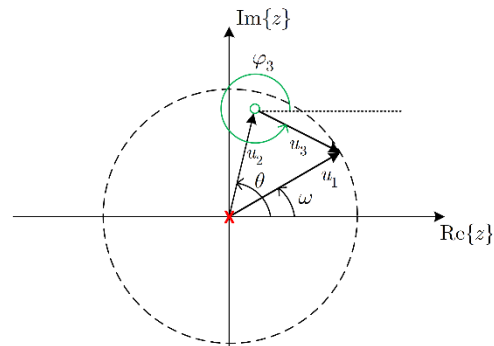
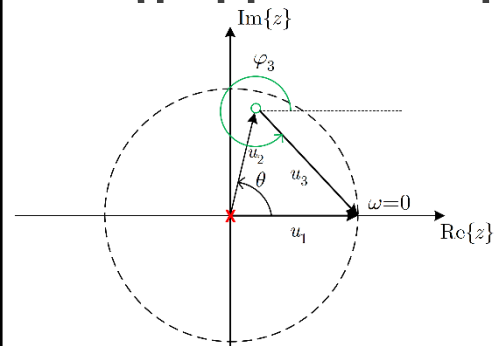
Καθυστέρηση Ομάδας



• Διάγραμμα Διανυσμάτων



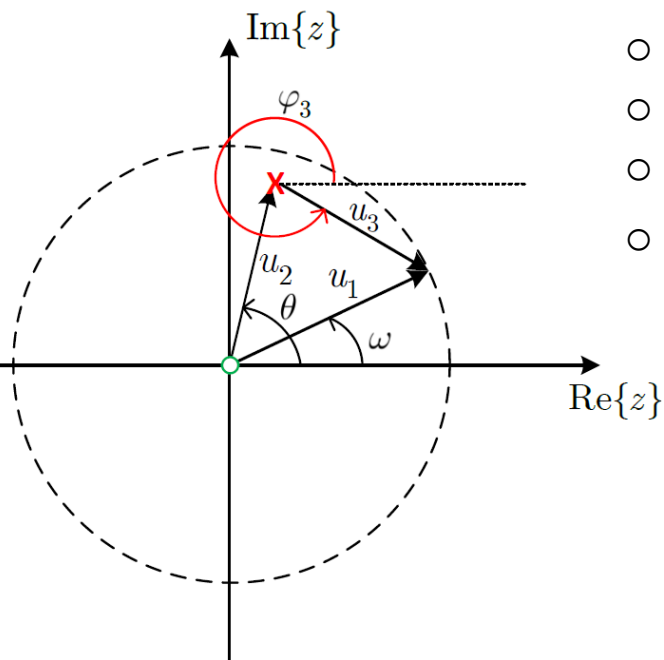
• Διάγραμμα Διανυσμάτων



• Διάγραμμα Διανυσμάτων

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1 - re^{j\theta} e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|}$$

- Διάνυσμα \vec{u}_1 : διάνυσμα μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$
- Διάνυσμα \vec{u}_2 : διάνυσμα από 0 ως τη θέση του $re^{j\theta}$
- Διάνυσμα \vec{u}_3 : διάνυσμα από $re^{j\theta}$ ως το μοναδ. κύκλο
- $\frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|} = \frac{1}{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|} = \frac{1}{|\vec{u}_3|}$



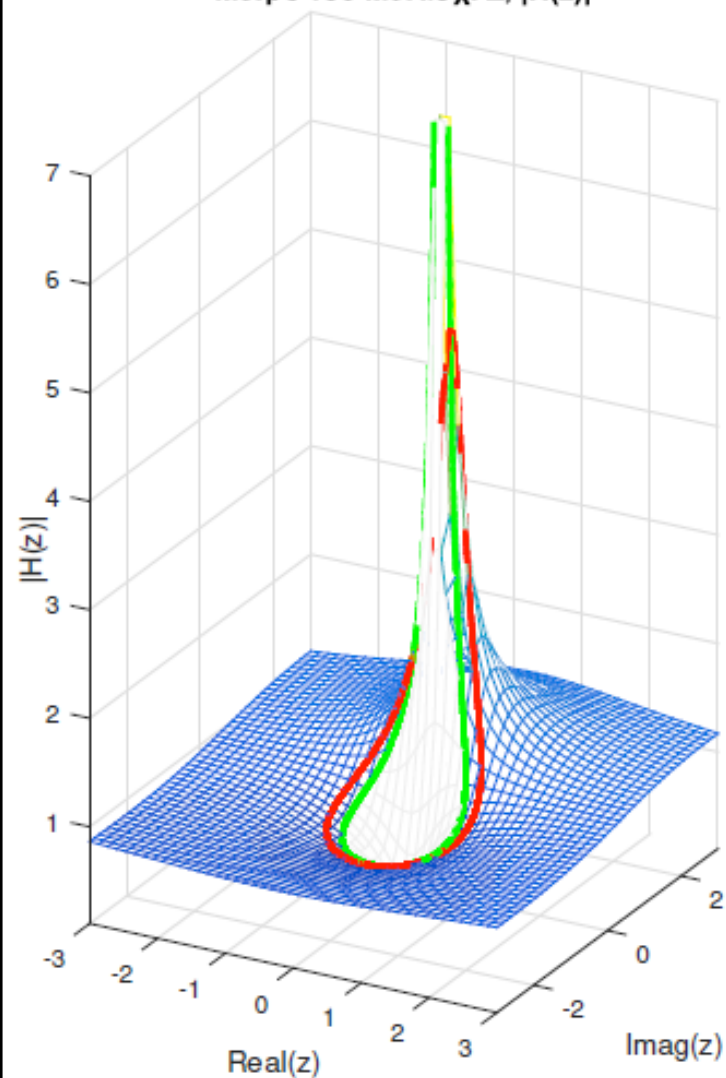
Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται ΜΟΝΟ από το (αντίστροφο) μήκος του \vec{u}_3 !!

• Για την απόκριση φάσης

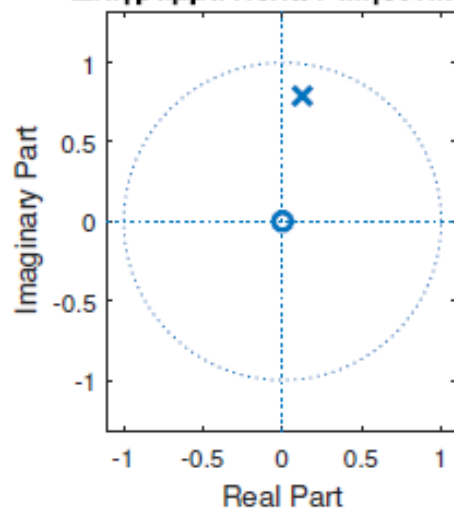
$$\angle \frac{1}{(1 - re^{j\theta} e^{j\omega})} = \angle e^{j\omega} - \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) = \omega - \phi_3$$

Άρα η απόκριση φάσης εξαρτάται ΜΟΝΟ από τη διαφορά $\omega - \phi_3$!!

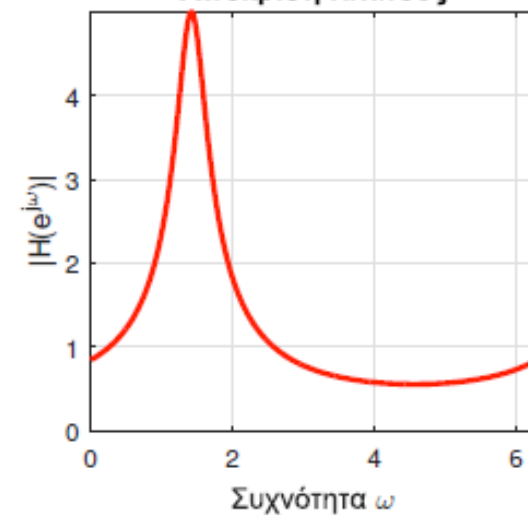
- Διάγραμμα Διανυσμάτων

Μέτρο του Μετασχ. Z, $|H(z)|$ 

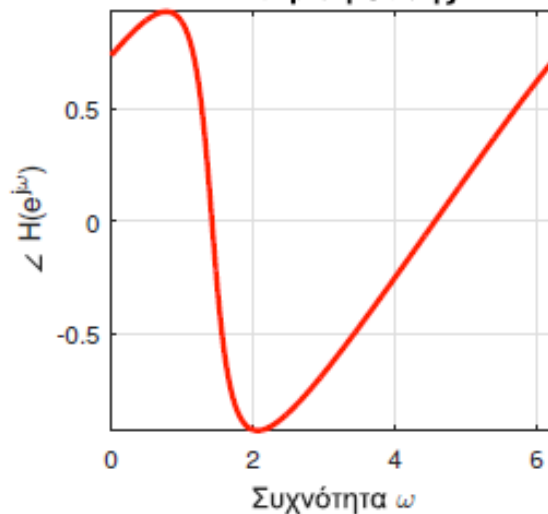
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



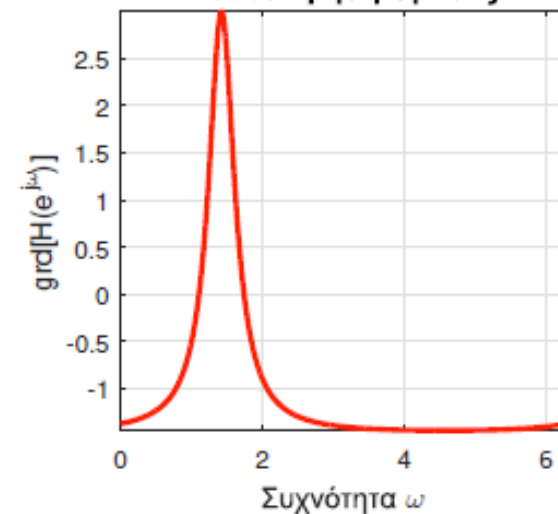
Απόκριση Πλάτους



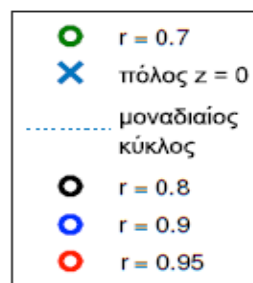
Απόκριση Φάσης



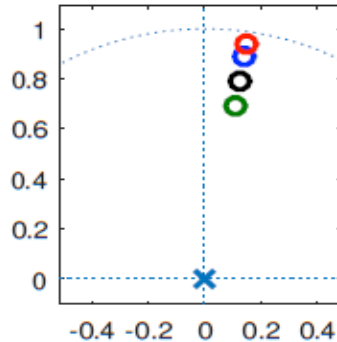
Καθυστέρηση Ομάδας



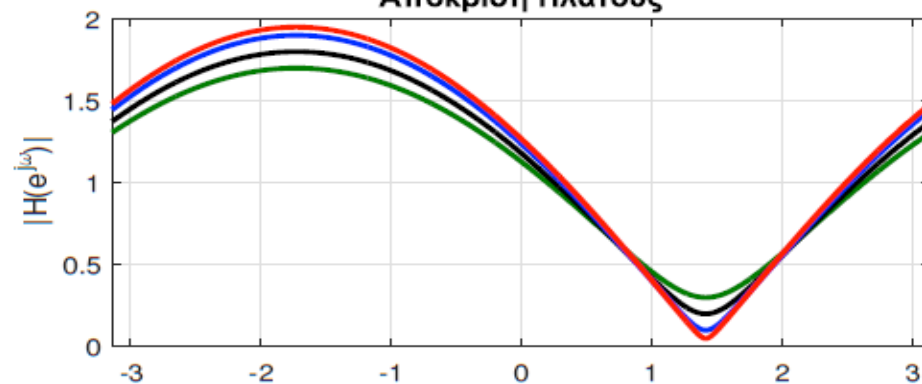
- Διάγραμμα Διανυσμάτων



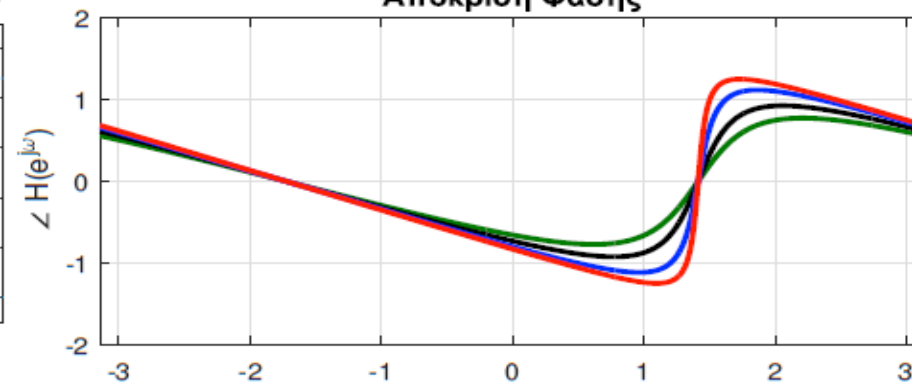
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



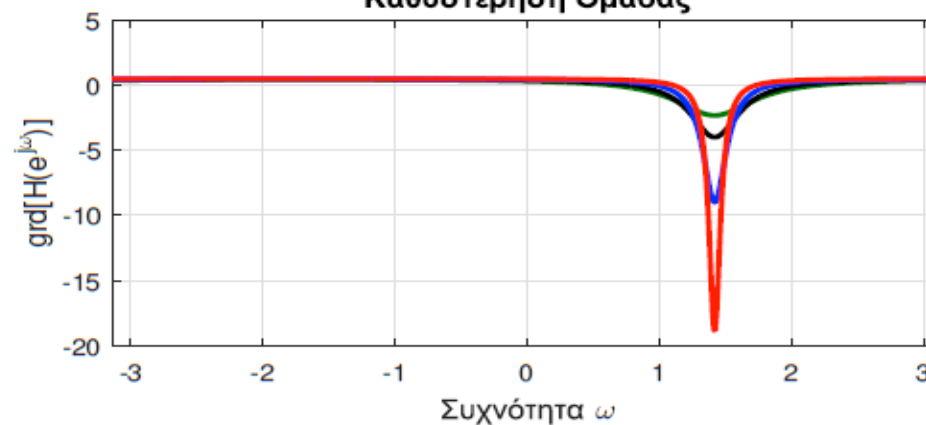
Απόκριση Πλάτους



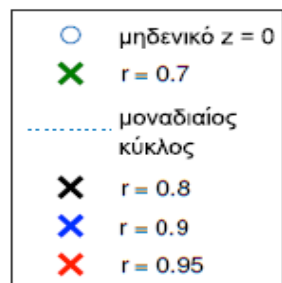
Απόκριση Φάσης



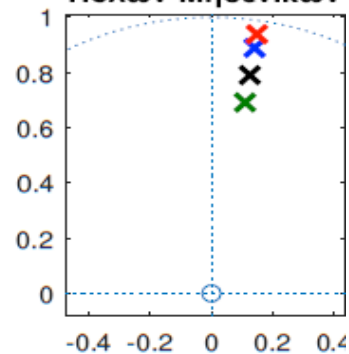
Καθυστέρηση Ομάδας



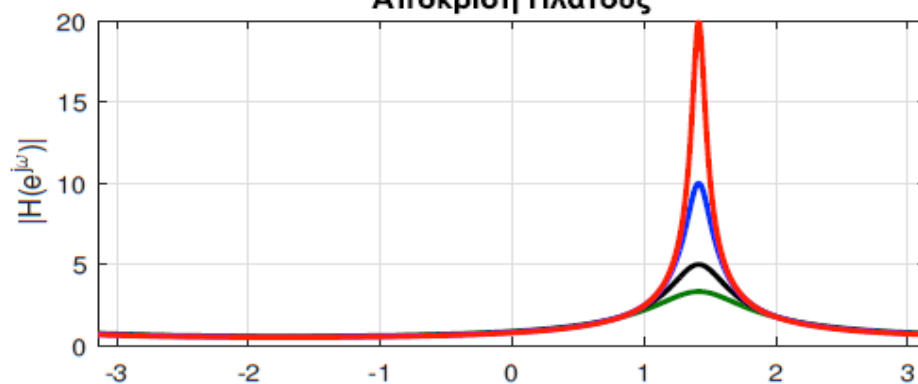
- Διάγραμμα Διανυσμάτων



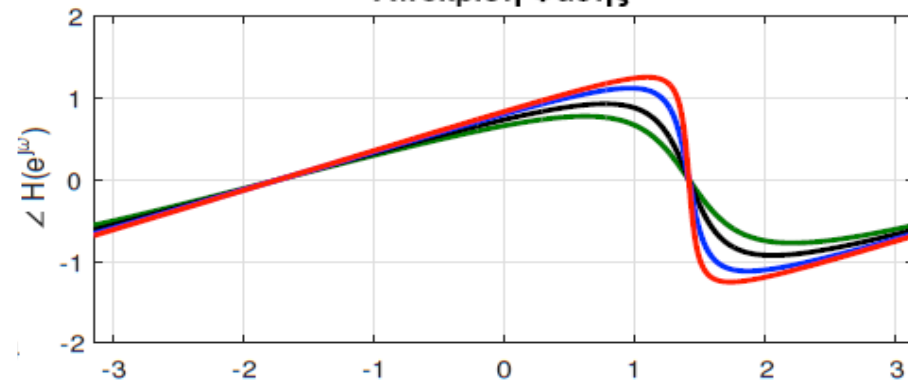
Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών



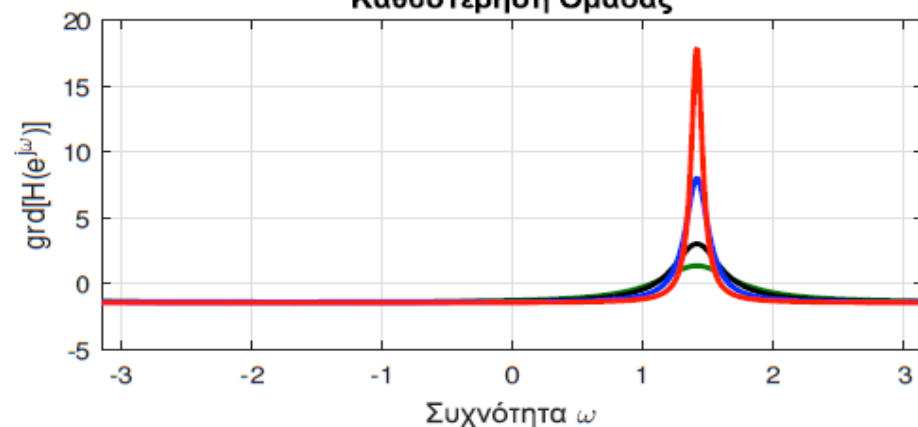
Απόκριση Πλάτους



Απόκριση Φάσης



Καθυστέρηση Ομάδας



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

