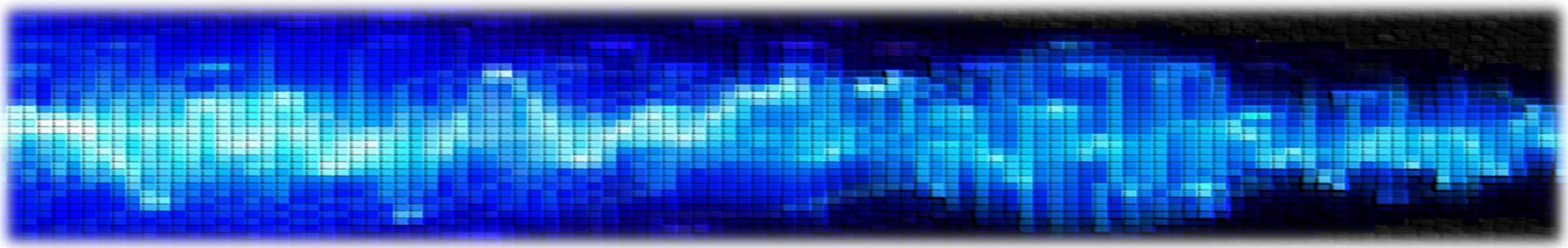
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 12Η



- Μετασχηματισμός Z
- Ιδιότητες & Ζεύγη
- Πεδίο Σύγκλισης

- **Μετασχηματισμός Z (επανάληψη)**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

- **Πεδίο Σύγκλισης**: περιοχή του μιγαδικού επιπέδου όπου ο μετασχ. Z συγκλίνει

- Ζεύγη:

Σήμα στο χρόνο	Μετασχηματισμός Z
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}, \lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\delta[n]$	$1, \forall z$
$\delta[n-n_0], \quad n_0 > 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert > 0$
$\delta[n-n_0], \quad n_0 < 0$	$z^{-n_0}, \lvert z\rvert < \infty$

Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier (επανάληψη)

- Είναι προφανές πως αν $z = e^{j\omega}$, τότε

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = F\{x[n]\}$$

- Εκτιμούμε το μετασχ. Z επάνω στο μοναδιαίο κύκλο

- Επιτρέπεται μόνον όταν ο τελευταίος εμπεριέχεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού Z!

- Αντιπαράδειγμα: $x[n] = u[n]$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \boxed{|z| > 1}$$

• Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

Σχέση Μετασχ. Ζ και Μετασχ. Fourier

(α′) Ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ ενός σήματος $x[n]$ μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z $X(z)$ αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.

(β′) Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη "φέτα" της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας $|z| = 1$.

(γ′) Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά "φέτες " των διδιάστατων συναρτήσεων $|X(z)|$ και $\phi(z)$ επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
    - Βρείτε το μετασχ. Ζ του σήματος $x[n] = u[n]$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{u[n]}_{1,\ n\geq 0} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^{n}$$

$$= \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| > 1}$$

Πεδίο Σύγκλισης

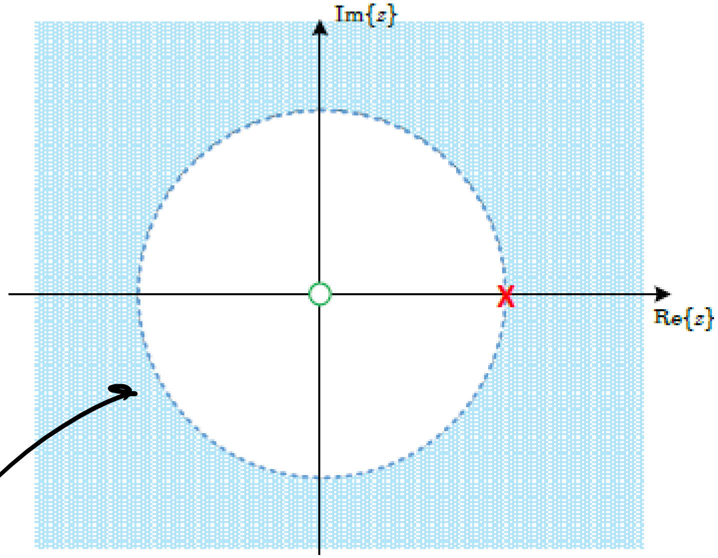
Άρα

$$x[n] = u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

Μπορούμε να γράψουμε $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}} = \dfrac{z}{z-1}$

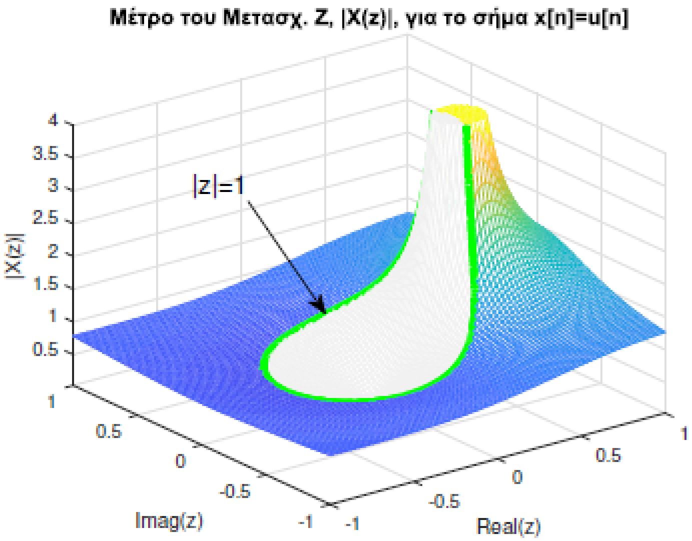
Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier

- Παράδειγμα:



$|z|>1$

(α′) Περιοχή σύγκλισης.

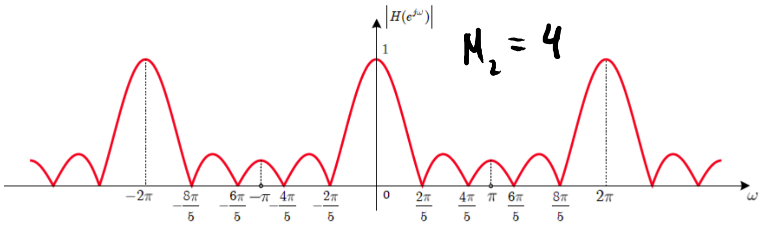


(β′) Μέτρο μετασχ. Ζ σήματος $x[n] = u[n]$.

Πόλος : $z-1=0 \Leftrightarrow \boxed{z=1}$

Μηδενικό : $\boxed{z=0}$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:
    - Μελετήστε τι συμβαίνει στο σήμα



$M_2 = 4$

$$x[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_2+1}, & 0 \le n \le M_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M_2} \frac{1}{M_2+1} \cdot z^{-n} = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n}$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{1 - z^{-(M_2+1)}}{1 - z^{-1}} \; \frac{\cdot z^{M_2+1}}{\cdot z^{M_2+1}} = \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{z^{M_2+1} - 1}{z^{M_2+1} - z^{M_2}} =$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \cdot \frac{1}{z^{M_2}} \cdot \frac{z^{M_2+1} - 1}{z - 1}$$

Πόλοι: $z^{M_2} = 0 \iff z = 0$ (M_2 πόλοι)

$z - 1 = 0 \iff z = 1$

M_2+1 πόλοι

Μηδενικά: $z^{M_2+1} = 1 \iff z_k = e^{j\frac{2\pi k}{M_2+1}}, \; k = 0, \dots, M_2$

M_2+1 μηδενικά

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1 - a}$$

- **Σύνδεση με το Μετασχηματισμό Fourier**
  - Παράδειγμα:

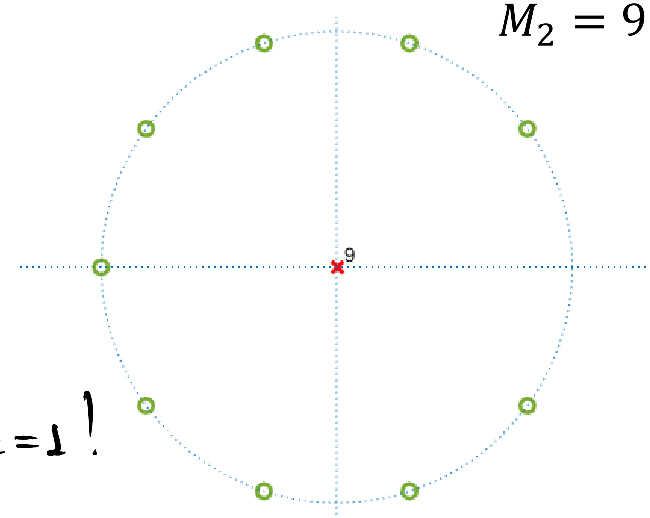
Πόλοι: $z=1$, $z=0$ (τάξης M_2)

Μηδενικά: $z_k = e^{j2\pi k/(M_2+1)}$, $k=0,\dots,M_2$

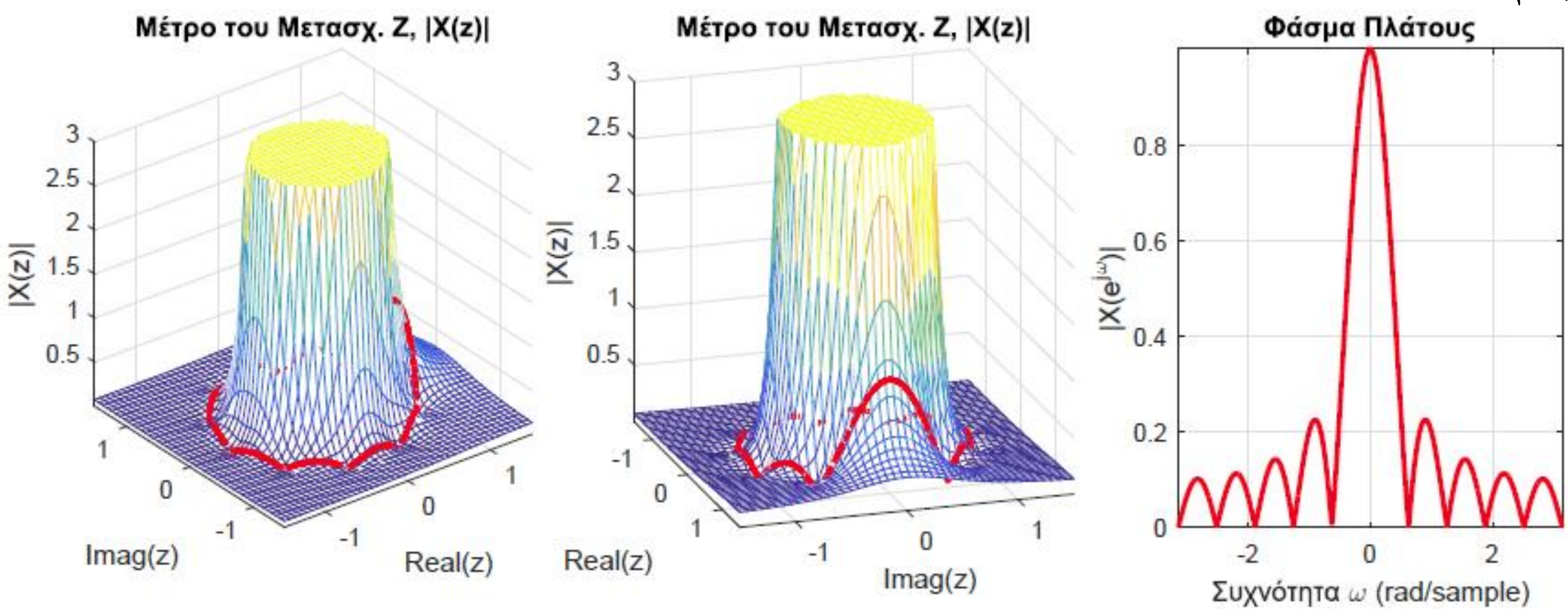
Για $k=0$, $z_0 = e^0 = 1 \iff z=1$

Άρα δεν υπάρχει μηδενικό ή πόλος στο $z=1$!

$M_2 = 9$



$|z|>0$



• Ιδιότητες Μετασχ. Ζ

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Ζ

Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Ζ	Πεδίο Σύγκλισης
	$\mathbf{x[n]}$ $\mathbf{y[n]}$	$\mathbf{X(z)}$ $\mathbf{Y(z)}$	$\mathbf{R_x}$ $\mathbf{R_y}$
Γραμμικότητα	$Ax[n]+By[n]$	$AX(z)+BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n-n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το R_x
Στάθμιση στο χώρο Ζ	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|Rx$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n]*y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγώγιση στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το R_x
Διαφορά στο χρόνο	$x[n]-x[n-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\|>0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{\|z\|>1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n]=0,\ n<0$	$\lim_{z\to\infty} X(z)=x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n]=0,\ n<0$	$\lim_{n\to\infty} x[n]=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})X(z)$	

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Γραμμικότητα: Βρείτε τον μετασχ. Ζ του σήματος

$$W(z) = X(z) + Y(z)$$

με

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}, \qquad Y(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \qquad |z| > 1/2$$

Είναι

$$W(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) - \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\cancel{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}{\cancel{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$|z| > \frac{1}{3}$ (πόλος στο $\frac{1}{3}$)

$|z| < \frac{1}{3}$

γιατί $\{|z| > \frac{1}{3}\} \cap \{|z| > \frac{1}{2}\} \neq \varnothing$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Μετατόπιση στο χρόνο: Έστω το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$. Υπολογίστε το Μετασχ. Ζ του.

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$$

Είναι $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2]$

$= \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2] = 9 \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2]}$

Έστω $y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{Z} Y(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \boxed{|z| > \frac{1}{3}}$

Οπότε $x[n] = 9\, y[n+2] \xleftrightarrow{Z} X(z) = 9 z^2 \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = 9 z^2 \dfrac{1}{1-\frac{1}{3z}}$

Είναι: $X(z) = 9 \dfrac{z^3}{z-\frac{1}{3}}$ $\longrightarrow$ $z=0$ (τάξη 3)

$\longrightarrow$ $z = \frac{1}{3}$ (και δυο πόλοι στο ∞)

Άρα $\boxed{\frac{1}{3} < |z| < \infty}$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Συζυγία στο χρόνο: Έστω ένα σήμα $x[n] \in \Re$ με ρητό μετασχ. Ζ που έχει
    - Ακριβώς δυο πόλους, με τον έναν στη θέση $z = \exp\left(-\frac{j\pi}{8}\right)$
    - Ακριβώς δυο μηδενικά, με το ένα στη θέση $z = \sqrt{2}\exp\left(\frac{j\pi}{4}\right)$

  Βρείτε μια μορφή για το $X(z)$

$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*)$ Συζυγία στο χρόνο

Αν: $x[n] \in \mathbb{R}$, τότε πόλοι & μηδενικά έρχονται σε συζυγή ζεύγη!

Είναι $x[n] = x^*[n] \xleftrightarrow{Z} \boxed{X(z) = X^*(z^*)}$

Αν το $z_0 = e^{-j\frac{\pi}{8}}$ είναι πόλος του $X(z)$, τότε $X(z_0) = \infty$. Άρα και το $z_0^* = e^{j\frac{\pi}{8}}$ θα είναι πόλος του $X(z)$.

Αν το $z_1 = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ είναι μηδενικό του $X(z)$, τότε $X(z_1) = 0$. Οπότε και το $z_1^* = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ θα είναι μηδενικό του $X(z)$.

Έτσι,

$$X(z) = A\,\frac{\left(1-\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)\left(1-\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}\right)}{\left(1-e^{j\pi/8}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\pi/8}z^{-1}\right)}, \quad A \in \mathbb{R}$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Συνέλιξη στο χρόνο: Έστω τα σήματα $x[n] = (2)^n u[n]$, $y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Βρείτε τη συνέλιξή τους

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z),\ R_x$$
$$y[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z),\ R_y$$
$$c_{xy}[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)Y(z),\ R_c \geq R_x \cap R_y$$

Είναι

$$2^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-2z^{-1}},\ |z|>2 = X(z)$$
$$\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}},\ |z|>\frac{1}{4} = Y(z)$$

$$C_{xy}(z) = X(z)Y(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

- **Ιδιότητες Μετασχ. Ζ**
  - Συνέλιξη στο χρόνο:

$$A = C_{xy}(z)(1-2z^{-1})\Big]_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\Big]_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}$$

$$B = C_{xy}(z)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\Big]_{z^{-1}=-4} = \frac{1}{1-2z^{-1}}\Big]_{z^{-1}=-4} = \frac{1}{9}$$

Άρα

$$C_{xy}(z) = \frac{8}{9}\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}, \quad R_c = R_x \cap R_y$$

$$= \{|z|>2\} \cap \{|z|>\tfrac{1}{4}\}$$

$$= \{|z|>2\}$$

$$\Big\updownarrow z^{-1} \qquad |z|>2 \quad |z|<2 \ \Big\updownarrow z^{-1} \qquad |z|>\tfrac{1}{4} \quad |z|<\tfrac{1}{4} \ \Big\updownarrow z^{-1}$$

$$C_{xy}[n] = \frac{8}{9}2^n u[n] + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

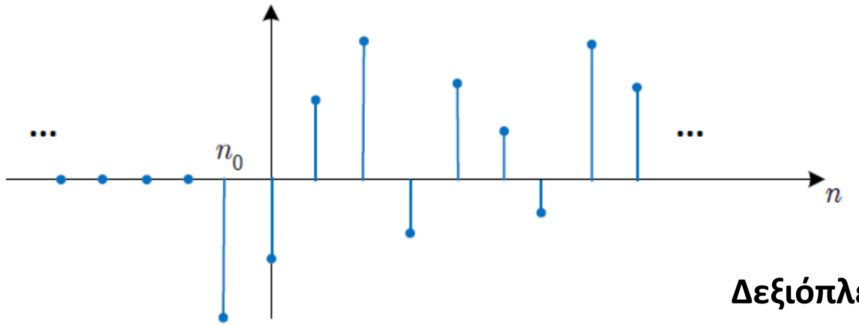
Ιδιότητες Μετασχ. Z

- Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις ιδιότητες του Μετ. Z είναι:

$$
\begin{tikzcd}
x[n] \arrow[r, "*"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{Z}"'] & y[n] \arrow[r, "="] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{Z}"] & c[n] \arrow[d, leftrightarrow, "Z"] \\
X(z) \arrow[r, "\bullet"] & Y(z) \arrow[r, "="] & C(z)
\end{tikzcd}
$$

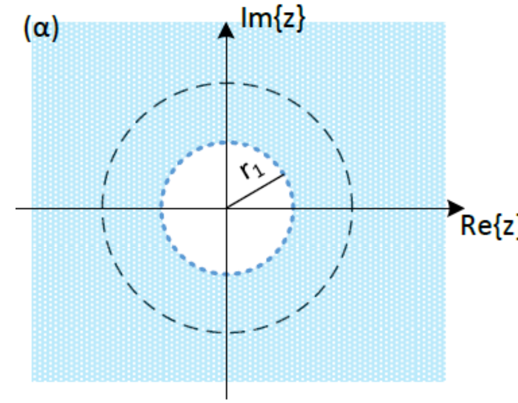
- Θα θυμάστε παρόμοια διαδικασία από τον DTFT
  - Μόνο που τώρα καλύπτουμε μεγαλύτερη «γκάμα» σημάτων ☺
  - Ξανά, αυτή η διαδικασία θα έχει πολύ μεγάλη χρησιμότητα στη μελέτη των συστημάτων που θα ακολουθήσει

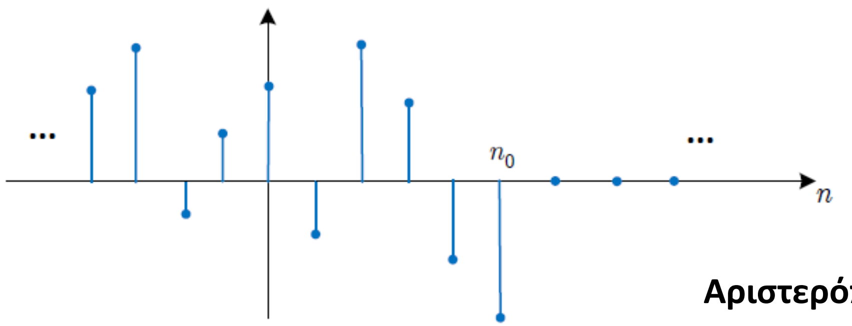
- **Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης**



$$x[n] = 0,$$
$$n < n_0$$

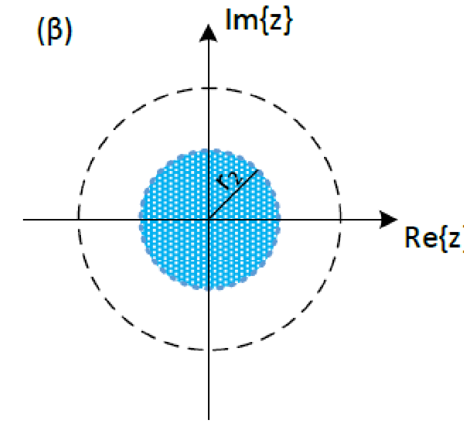
Δεξιόπλευρο → Εξωστρεφές ROC

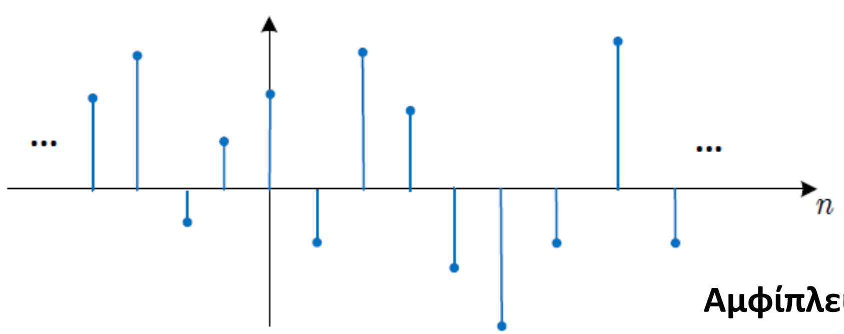




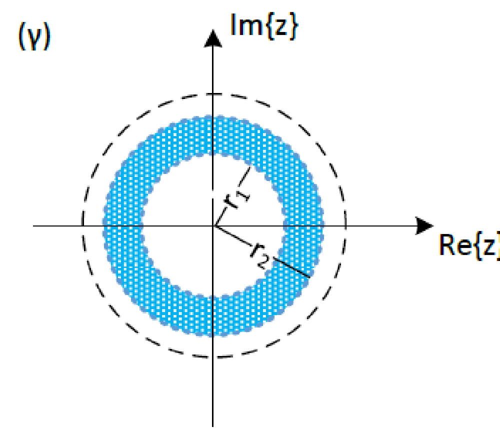
$$x[n] = 0,$$
$$n > n_0$$

Αριστερόπλευρο → Εσωστρεφές ROC

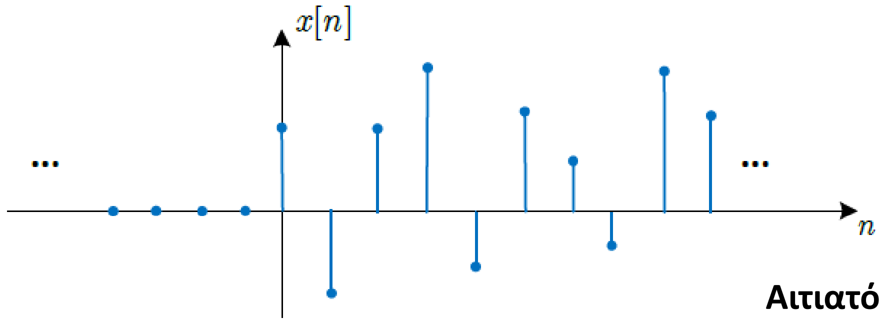




Αμφίπλευρο → Δακτυλιοειδές ROC

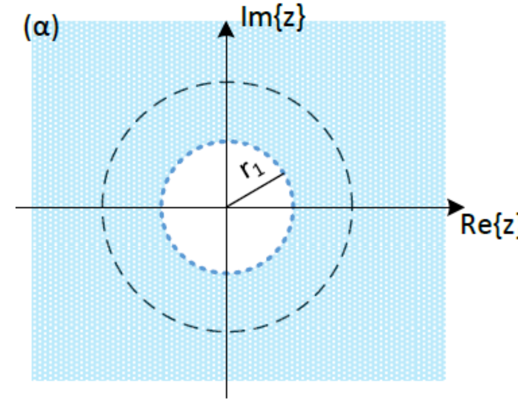


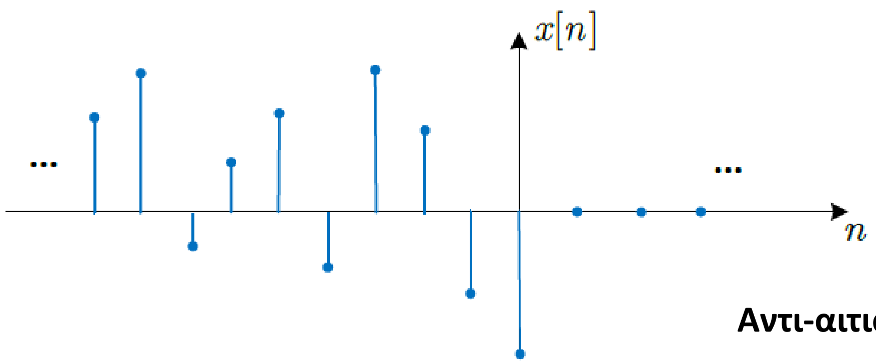
• Κατηγορίες σημάτων και Περιοχή Σύγκλισης



$$x[n] = 0,\quad n < 0$$

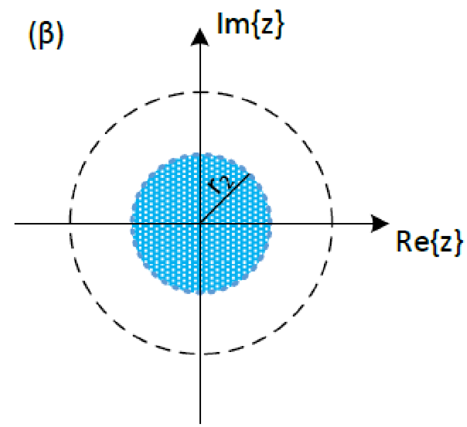
Αιτιατό → Εξωστρεφές ROC

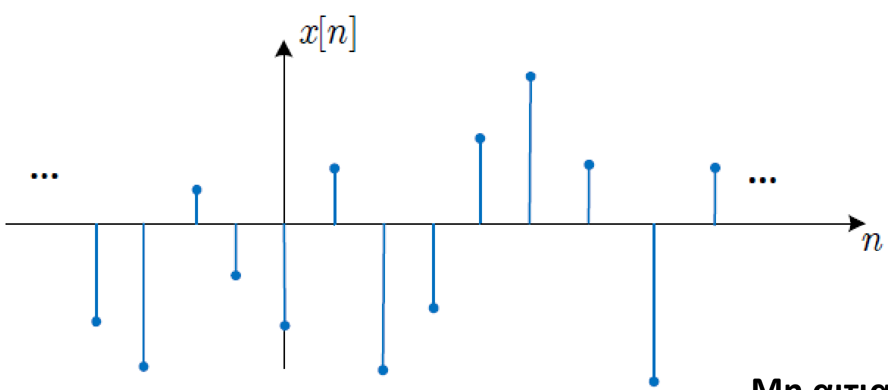




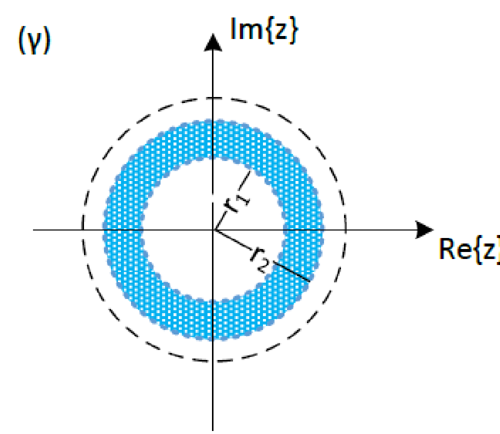
$$x[n] = 0,\quad n > 0$$

Αντι-αιτιατό → Εσωστρεφές ROC





Μη αιτιατό → Δακτυλιοειδές ROC



• Ζεύγη Μετασχηματισμών Ζ

Πίνακας Μετασχηματισμών Ζ

Σήμα	Μετ. Ζ	ROC	Κατηγορία σήματος
$\delta[n]$	1	όλο το z	πεπερασμένης διάρκειας
$\delta[n-n_0],\ n_0>0$	z^{-n_0}	$z \neq 0$	πεπερασμένης διάρκειας
$\delta[n+n_0],\ n_0>0$	z^{n_0}	$z \neq \infty$	πεπερασμένης διάρκειας
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$	αιτιατό
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$	αντι-αιτιατό
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$	αιτιατό
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$	αντι-αιτιατό
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>1$	αιτιατό
$-nu[-n-1]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|<1$	αντι-αιτιατό
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$	αιτιατό
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|<\|a\|$	αντι-αιτιατό
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-z^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\|>1$	αιτιατό
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^{-2}}$	$\|z\|>1$	αιτιατό
$a^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-az^{-1}\cos(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$	αιτιατό
$a^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}}$	$\|z\|>\|a\|$	αιτιατό

• Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)

1. Το ROC μπορεί να είναι α) ένας δακτύλιος, β) μια περιοχή εκτός ενός κυκλικού δίσκου, γ) ένας κυκλικός δίσκος, (δ) όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός ίσως των $|z| = 0$ ή $|z| = \infty$

2. Το ROC **δεν** πρέπει να περιέχει πόλους!

3. Το ROC πρέπει να είναι μια συνεκτική περιοχή του μιγαδικού επιπέδου.

4. Αν το σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια στο χρόνο, τότε το ROC περιλαμβάνει όλο το μιγαδικό επίπεδο, πλην ίσως των σημείων $z = 0$ ή $z = \infty$

5. Αν το σήμα είναι δεξιόπλευρο, τότε το ROC του είναι εξωστρεφές, δηλ. της μορφής $|z| > \max|p_k|$, με p_k τους πόλους του σήματος
   a) Το $z = \infty$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αιτιατό
   b) Το $z = \infty$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αιτιατό

6. Αν το σήμα είναι αριστερόπλευρο, τότε το ROC του είναι εσωστρεφές, δηλ. της μορφής $|z| < \min|p_k|$, με p_k τους πόλους του σήματος
   a) Το $z = 0$ δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα δεν είναι αντι-αιτιατό
   b) Το $z = 0$ περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης αν το σήμα είναι αντι-αιτιατό

7. Αν το σήμα είναι αμφίπλευρο, τότε το ROC του είναι ένας δακτύλιος, δηλ. της μορφής $|p_i| < |z| < |p_j|$, με p_i, p_j δυο πόλους του σήματος με $|p_i| < |p_j|$
   - Πρέπει ασφαλώς να ικανοποιείται η ιδιότητα 2.

- **Ιδιότητες Πεδίου Σύγκλισης (ROC)**

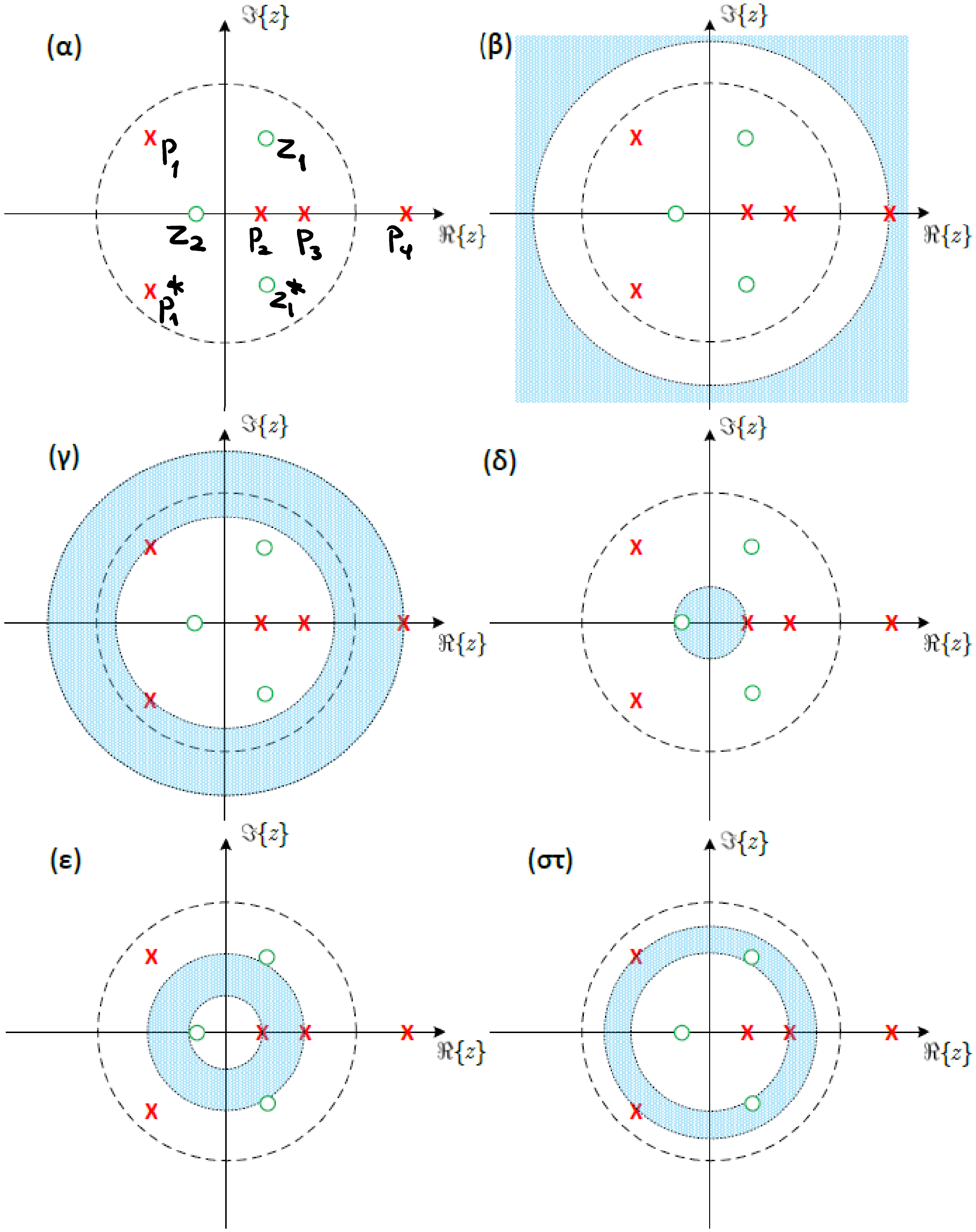
$\rightarrow |z| < |p_2|$

$\rightarrow |p_2| < |z| < |p_3|$

$\rightarrow |p_3| < |z| < |p_1|$

$\rightarrow |p_1| < |z| < |p_4|$

$\rightarrow |z| > |p_4|$



ΤΕΛΟΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ