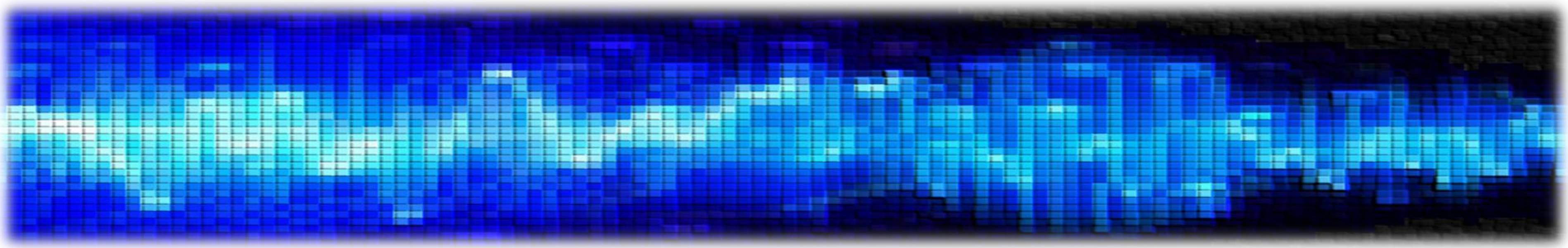
Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

ΔΙΑΛΕΞΗ 7Η



- Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Προς το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου…**

  - Είδαμε με λεπτομέρεια πως επηρεάζει ένα ΓΧΑ σύστημα ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα (ή ένα ημίτονο) συχνότητας ω_0 που εμφανίζεται στην είσοδό του
    - Το πλάτος της εισόδου πολλαπλασιάζεται με μια σταθερά $\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|$
    - Στη φάση της εισόδου προστίθεται μια σταθερά $\varphi_H(e^{j\omega_0})$

  - Όμως τα περισσότερα σήματα που μας ενδιαφέρουν δεν έχουν τη μορφή ενός μιγαδικού εκθετικού (ή ημιτονοειδούς) σήματος

  - Η ανάλυση που κάναμε θα μας ήταν **πολύ** χρήσιμη αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα $x[n]$ ως συνάρτηση κάποιων μιγαδικών εκθετικών σημάτων που το καθένα θα έχει κάποια συγκεκριμένη συχνότητα
    - Τότε θα γνωρίζαμε πως επηρεάζεται κάθε συχνότητα από το ΓΧΑ σύστημα

  - Αποδεικνύεται ότι κάτι τέτοιο είναι εφικτό!! ☺

  - Το μαθηματικό εργαλείο που μας δίνει αυτήν την πληροφορία ονομάζεται – έκπληξη! ☺ – **Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου (discrete time Fourier Transform – DTFT)**

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

  - Μια πιο εύλογη εξαγωγή του DTFT προέρχεται από τις Σειρές Fourier διακριτού χρόνου, ευθέως ανάλογα με την εξαγωγή του Μετασχηματισμού Fourier συνεχούς χρόνου από τις Σειρές Fourier συνεχούς χρόνου

  - Θα παραλείψουμε εδώ αυτήν την παρουσίαση και θα δώσουμε απευθείας τον ορισμό

  - Ο DTFT ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

και ο αντίστροφός του ως

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega}$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Κατ' αρχάς είναι εμφανές ότι ο DTFT είναι μια μιγαδική, εν γένει, συνάρτηση του ω:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_R\left(e^{j\omega}\right) + jX_I\left(e^{j\omega}\right)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi_X\left(e^{j\omega}\right)}$$

με

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \sqrt{X_R^2\left(e^{j\omega}\right) + X_I^2\left(e^{j\omega}\right)}$$

Φάσμα Πλάτους
(Magnitude Spectrum)

και

$$\varphi_X\left(e^{j\omega}\right) = \tan^{-1}\frac{X_I\left(e^{j\omega}\right)}{X_R\left(e^{j\omega}\right)}$$

Φάσμα Φάσης
(Phase Spectrum)

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε τι εκφράζει ο DTFT και τι ο αντίστροφός του

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

- Θα σας βοηθήσει αν θυμηθείτε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συνεχούς χρόνου

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

1. Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες $d\omega$, οι οποίες παίρνουν *συνεχείς τιμές* στο $(-\pi, \pi]$, και "υπάρχουν" μέσα στο σήμα $x[n]$. Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$.

2. Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να *συνθέσει* το σήμα στο χρόνο $x[n]$, ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών *όλων* των πιθανών συχνοτήτων $d\omega$ του διαστήματος $(-\pi, \pi]$, με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή $X(e^{j\omega})$, κανονικοποιημένο με συντελεστή $1/2\pi$.

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Αν το σήμα που αναλύεται είναι πραγματικό, τότε μπορεί να δείξει κανείς εύκολα ότι

$$X\left(e^{-j\omega}\right) = X^*(e^{j\omega})$$

- Η παραπάνω ιδιότητα συνεπάγεται ότι

$$\left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

Άρτιο Φάσμα Πλάτους

$$\varphi_x\left(e^{j\omega}\right) = -\varphi_x(e^{-j\omega})$$

Περιττό Φάσμα Φάσης

- Τότε μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση ☺) ότι

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \cos\left(\omega n + \varphi_x\left(e^{j\omega}\right)\right) d\omega$$

- Πράγματι λοιπόν ο DTFT περιέχει πληροφορία πλάτους και φάσης με την οποία μπορούμε να συνθέσουμε ένα σήμα $x[n]$ ως συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) ημιτόνων κάθε συχνότητας ω στο διάστημα [0, π] !!!

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου - Ύπαρξη

- Για να υπάρχει ο DTFT αρκεί

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty$$

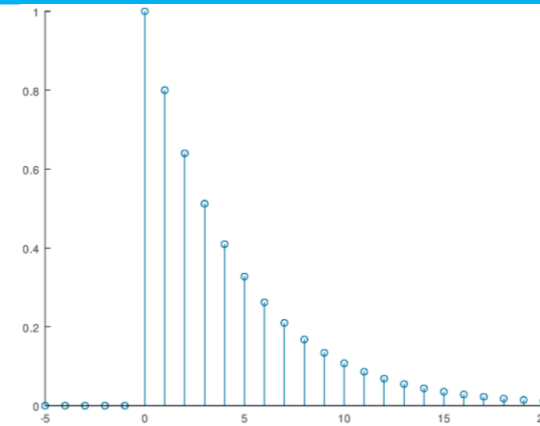
- Η συνθήκη αυτή δεν είναι αναγκαία, εγγυάται όμως την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος

- Μια πιο γενική συνθήκη είναι η

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < +\infty$$

αν χαλαρώσουμε λίγο την απαίτηση της ομοιόμορφης σύγκλισης και μας αρκεί η *μέση τετραγωνική σύγκλιση*

© Καφεντζής Γιώργος, PhD



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, $\underline{|a| < 1}$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot 1 \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}, \quad |a e^{-j\omega}| < 1 \iff |a|\,|\cancel{e^{-j\omega}}^{\,1}| \iff |a| < 1. \checkmark$$

Άρα

$$x[n] = a^n u[n], \ |a| < 1 \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b^n = \frac{1}{1-b}, \quad |b| < 1$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

$$|X(e^{j\omega})| = \left|\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right| = \frac{1}{|1-ae^{-j\omega}|} = \frac{1}{|\underbrace{1-a\cos\omega}_{Re}+j\underbrace{a\sin\omega}_{Im}|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos\omega)^2+a^2\sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+\underbrace{a^2\cos^2\omega+a^2\sin^2\omega}_{a^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}, \quad |a|<1.$$

$$\varphi_X(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{X_I(e^{j\omega})}{X_R(e^{j\omega})} \quad (1). \quad \text{Είναι} \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} =$$

$$= \frac{1-ae^{j\omega}}{|1-ae^{-j\omega}|^2} = \frac{1-a\cos\omega-ja\sin\omega}{|1-ae^{-j\omega}|^2} = \underbrace{\frac{1-a\cos\omega}{|1-ae^{-j\omega}|^2}}_{X_R(e^{j\omega})} + j\underbrace{\frac{(-a\sin\omega)}{|1-ae^{-j\omega}|^2}}_{X_I(e^{j\omega})}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

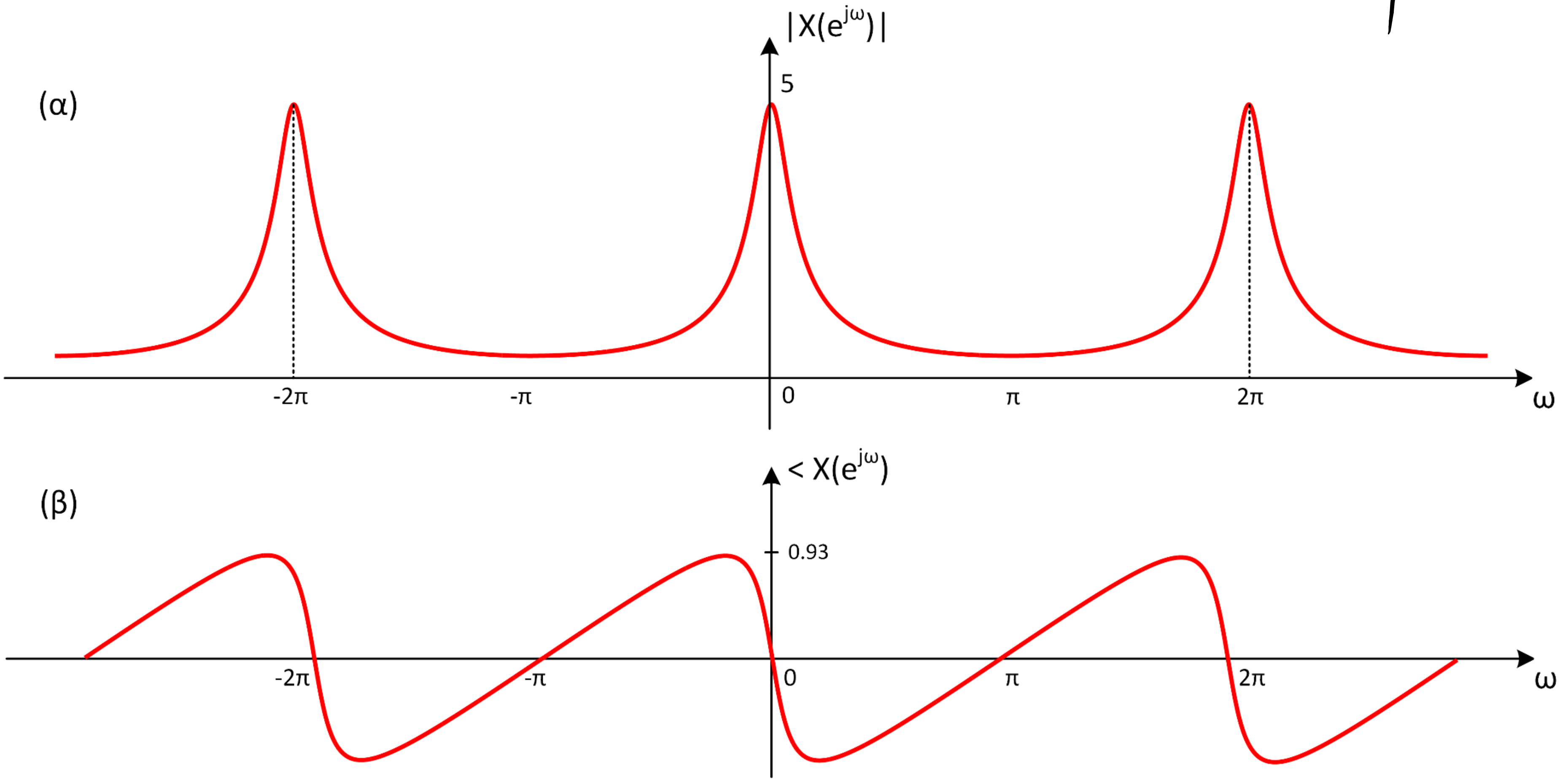
Άρα $$\varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{(-a\sin\omega)}{1-a\cos\omega} = \tan^{-1}\left[-\frac{a\sin(\omega)}{1-a\cos(\omega)}\right]$$

$$= -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}, \quad |a|>1,$$

αφού $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x)$.

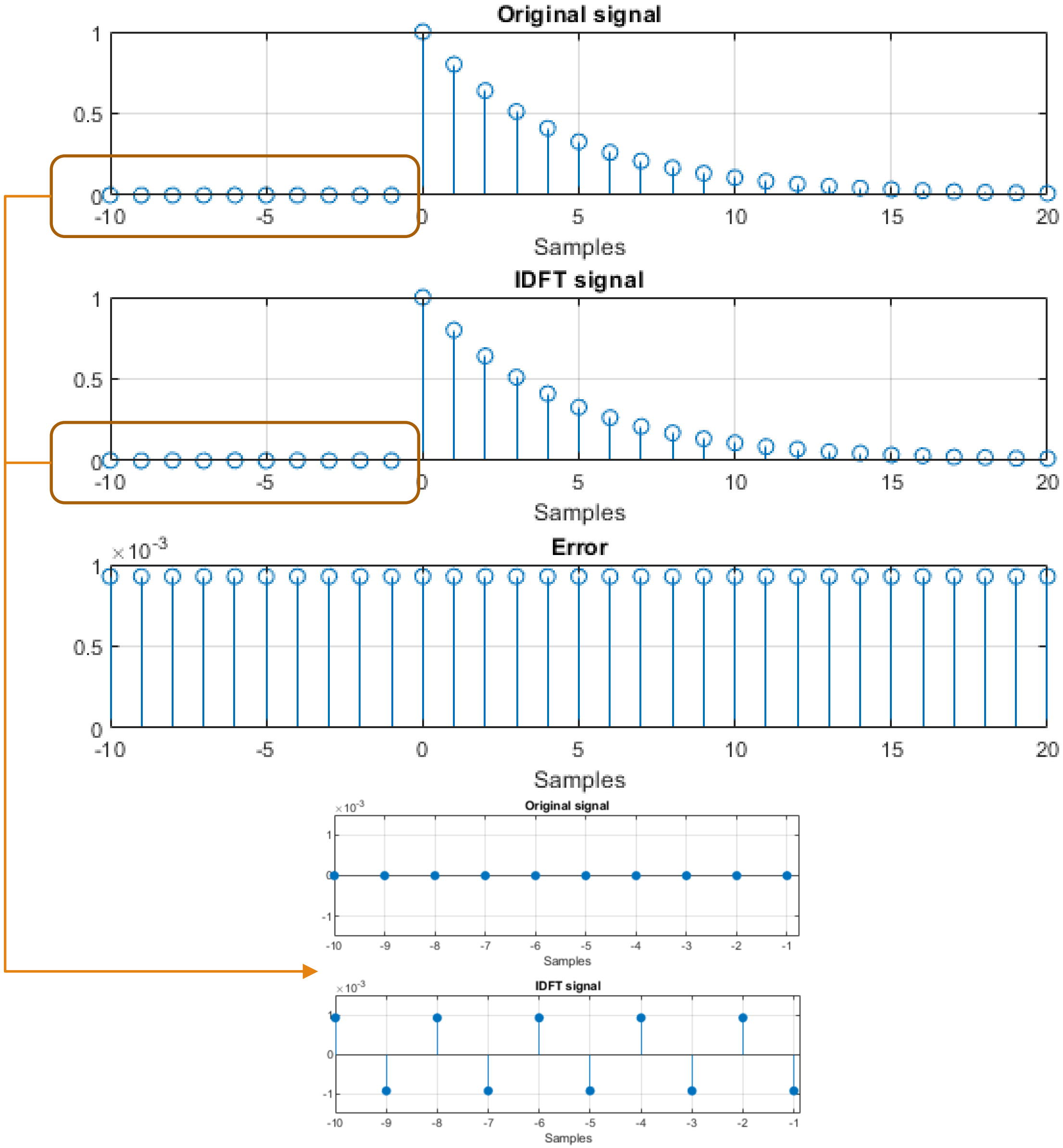
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

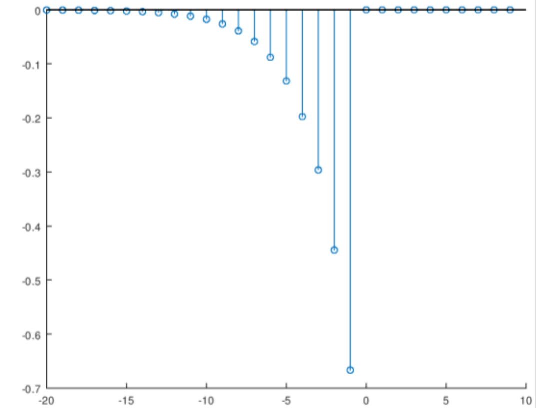
$a = \frac{4}{5}$



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 0.8;
n = [-10:-1 0 1:20];
x = [zeros(1,10) alpha.^n(11:31)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```





- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1],\ |a| > 1$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \underbrace{u[-n-1]}_{1,\ n\leq -1} e^{-j\omega n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a e^{-j\omega})^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1} e^{j\omega})^n$$

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} (a e^{-j\omega})^{-n}$$

$$= -\frac{(a^{-1}e^{j\omega})^1}{1-a^{-1}e^{j\omega}} = -\frac{a^{-1}e^{j\omega}}{1-a^{-1}e^{j\omega}}$$

$$= -\frac{a^{-1}e^{j\omega}\cdot a e^{-j\omega}}{(1-a^{-1}e^{j\omega})\, a e^{-j\omega}} = \frac{1}{-(ae^{-j\omega}-1)}$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}},\ |a|>1$$

$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} b^n = \frac{b^{N_1}}{1-b},\ |b|<1$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

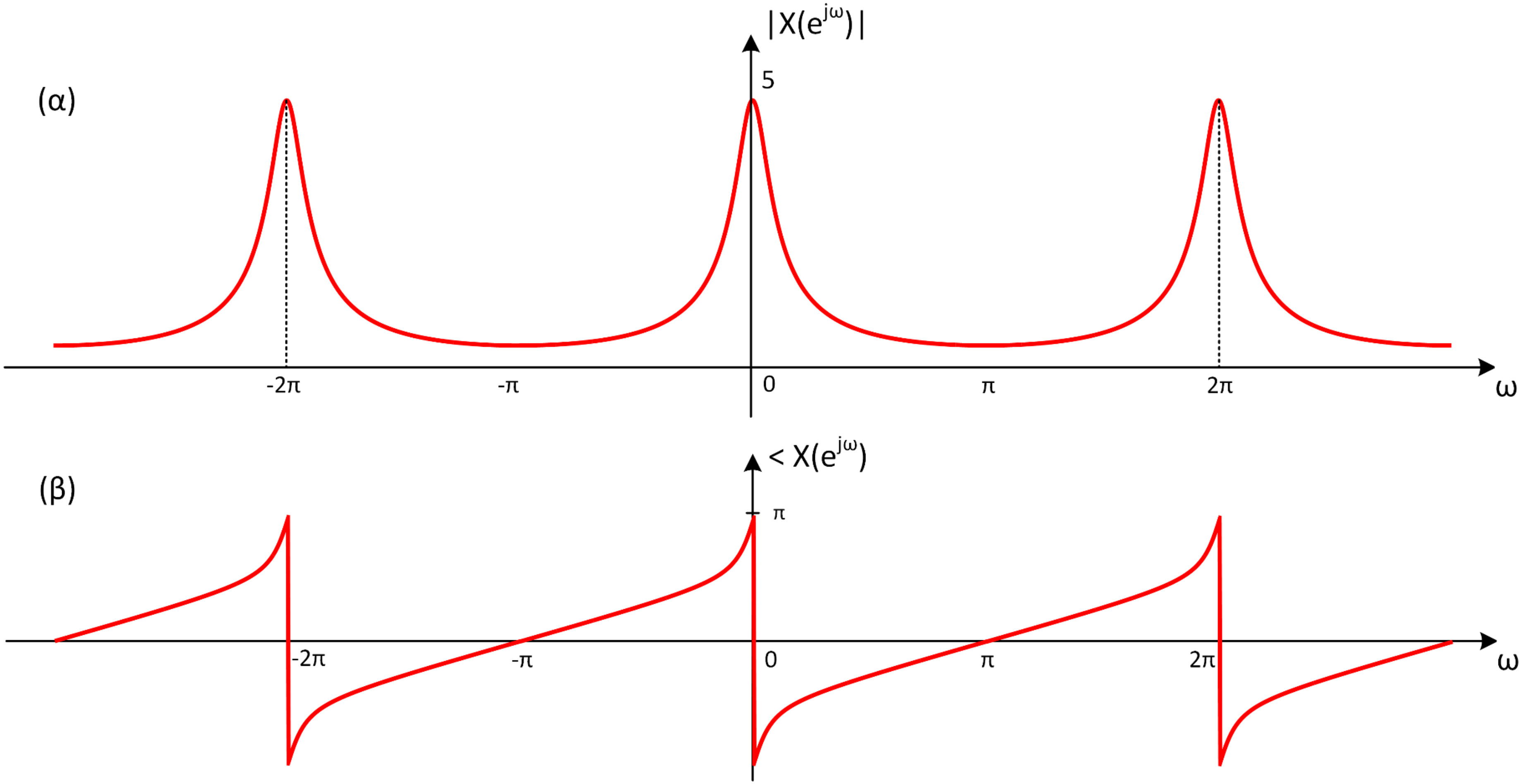
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega + a^2}}, \quad |a|>1$$

$$\varphi_x(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{(-a\sin\omega)}{1-a\cos\omega}, \quad |a|>1$$

$$= -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}, \quad |a|>1.$$

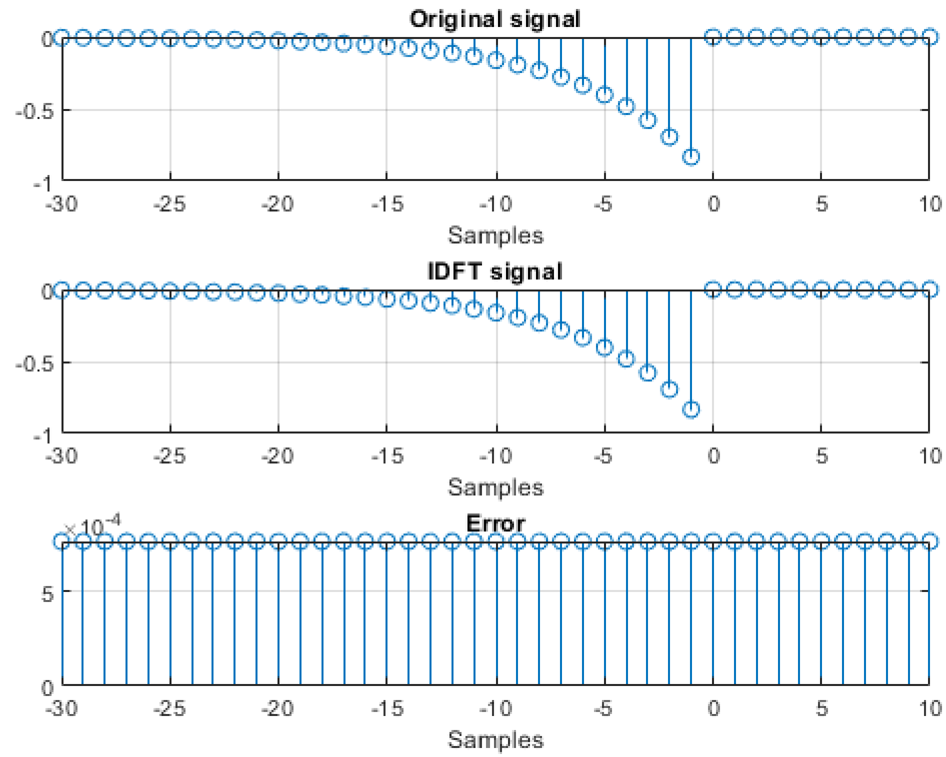
$a = \frac{6}{5}$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:



• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
alpha = 6/5;
n = [-30:-1 0 1:10];
x = [-alpha.^n(1:30) zeros(1,11)];

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί
X = 1./(1 - alpha*exp(-1i*w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```

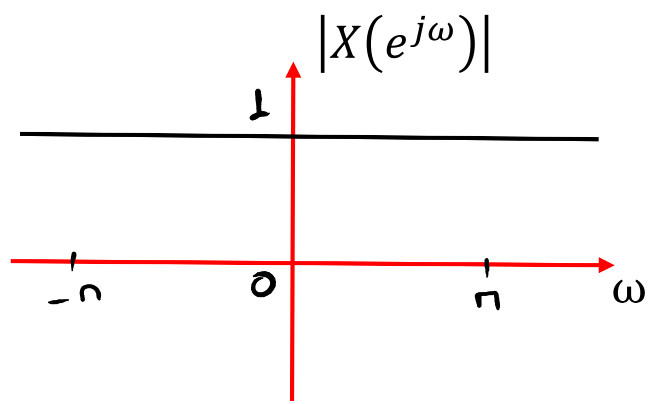


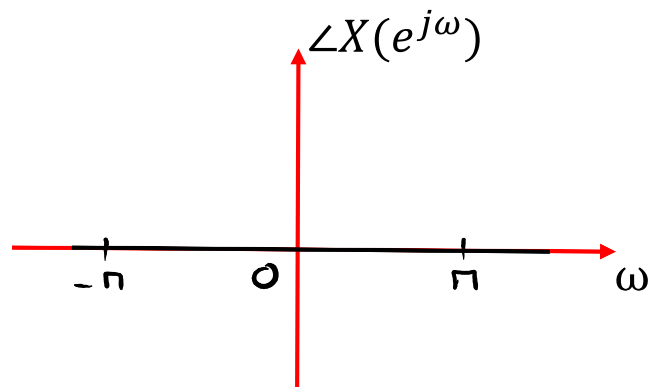
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]\, e^{-j\omega n} = \delta[0] \cdot e^{-j\omega \cdot 0} = 1$$

Άρα

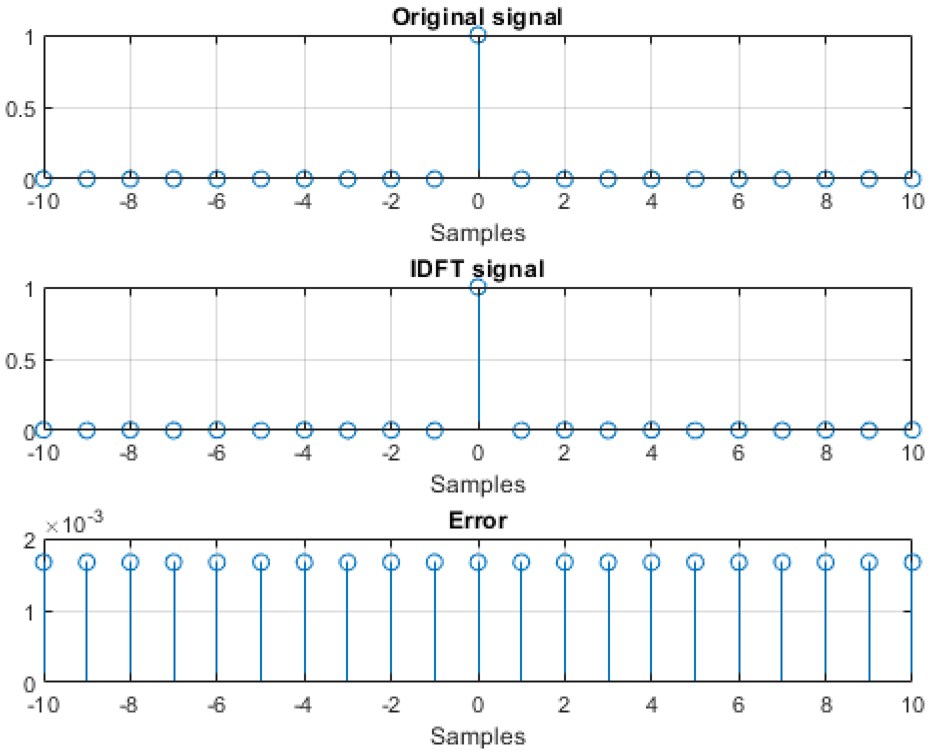
$$x[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 1 \quad \forall\, \omega$$



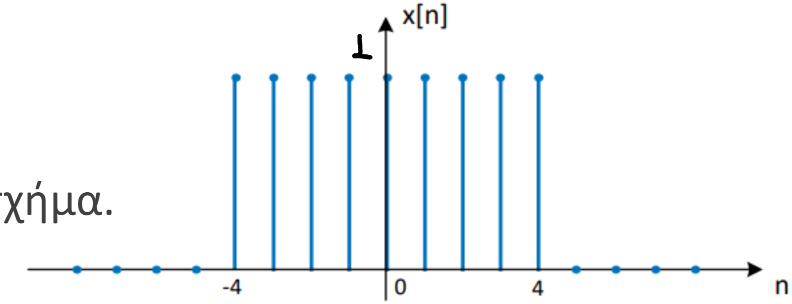


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,10) 1 zeros(1,10)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = 1 για κάθε ω
X = ones(size(w));

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.

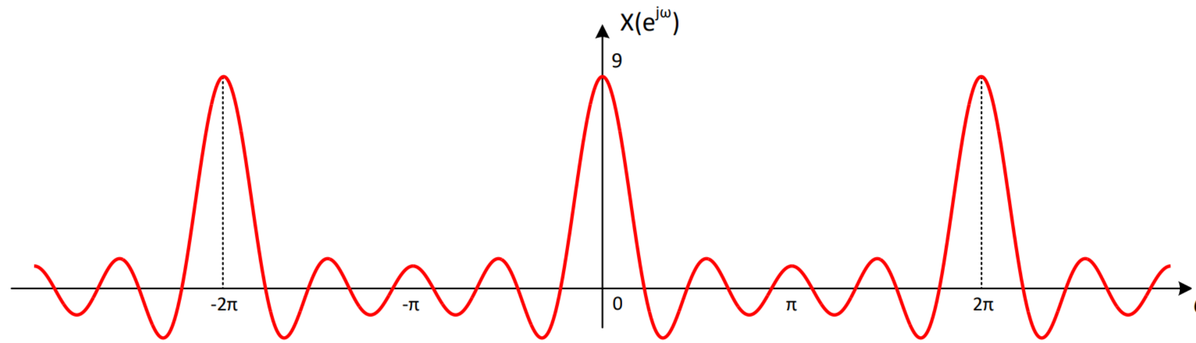


$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{4} 1 \cdot e^{-j\omega n} = \frac{e^{-j\omega(-4)} - e^{-j\omega 5}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{j4\omega} - e^{-j5\omega}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\cancel{e^{-j\omega/2}}}{\cancel{e^{-j\omega/2}}} \cdot \frac{e^{j9\omega/2} - e^{-j9\omega/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = \frac{\cancel{2j} \sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\cancel{2j} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

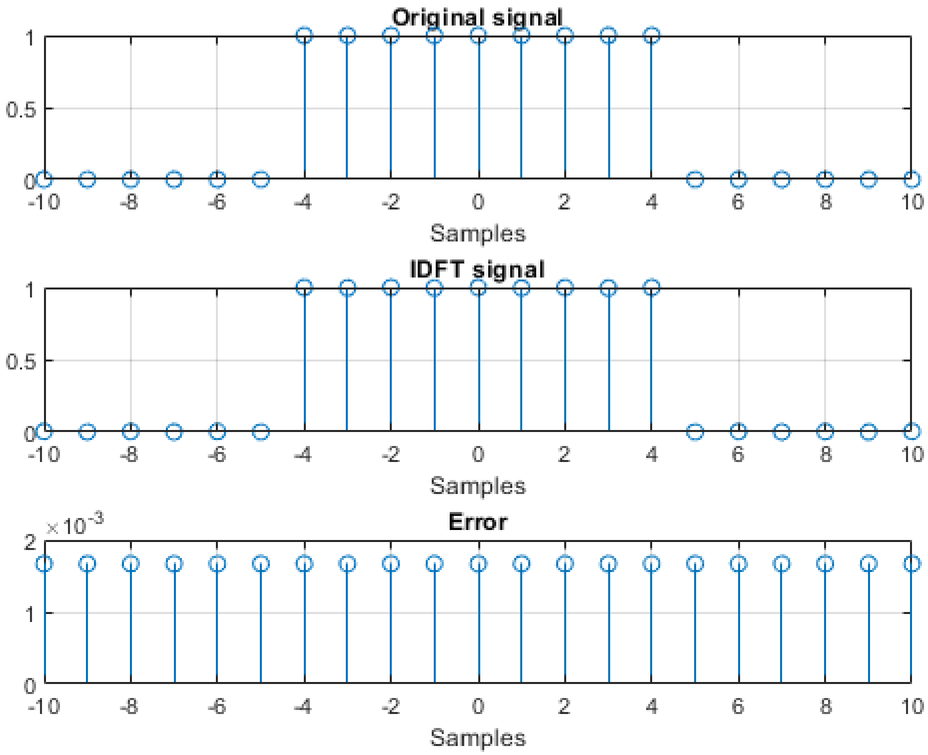
$$= \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}.$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1 - a}$$

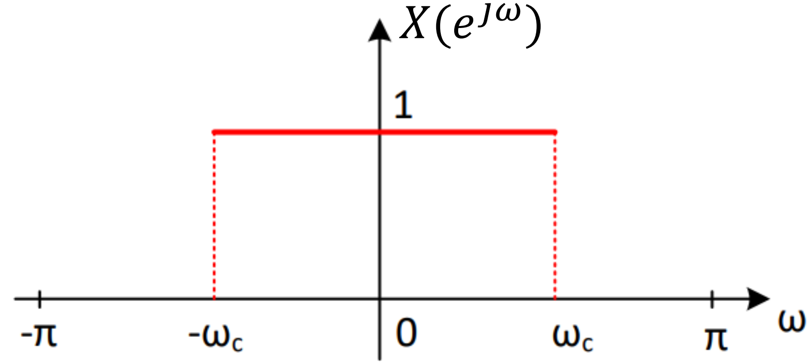


• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-10:10];
x = [zeros(1,6) ones(1,9) zeros(1,6)];
% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);
% υπολογίζω το X(e^jw) όπως στο χαρτί = sin(9ω/2)/sin(ω/2)
% για κάθε ω
X = sin(9*w/2)./sin(w/2);

% Σύνθεση του x[n] μέσω του IDTFT
x_syn = zeros(size(x));

for i = 1:length(w)
    x_syn = x_syn + X(i).*exp(1i*w(i)*n);
end
% Riemann summation
x_syn = dw*(1/(2*pi))*x_syn;
% λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, το x_syn έχει
% ένα αμελητέο (10^-15) φανταστικό μέρος
x_syn = real(x_syn);

% απεικόνιση
figure(1); subplot(311);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(312); stem(n, x_syn);
title('IDFT signal'); xlabel('Samples'); grid;
subplot(313); stem(n, abs(x-x_syn));
title('Error'); xlabel('Samples'); grid;
```



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.



Είναι:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{jn}\, e^{j\omega n}\Big]_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

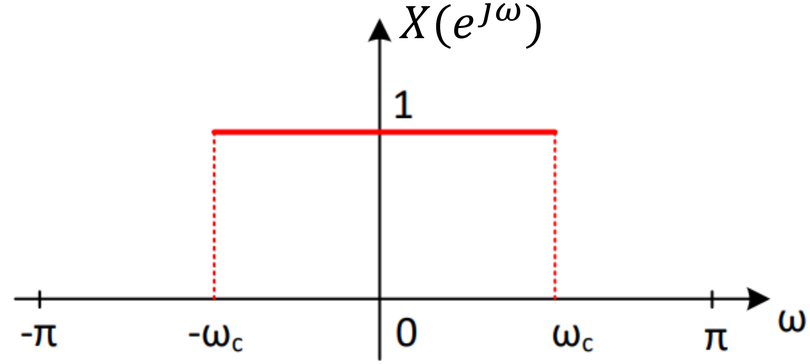
$$= \frac{1}{j2\pi n}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{\cancel{j2}\pi n}\,\cancel{2j}\sin(\omega_c n)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n), \quad -\infty < n < +\infty \quad (!)$$

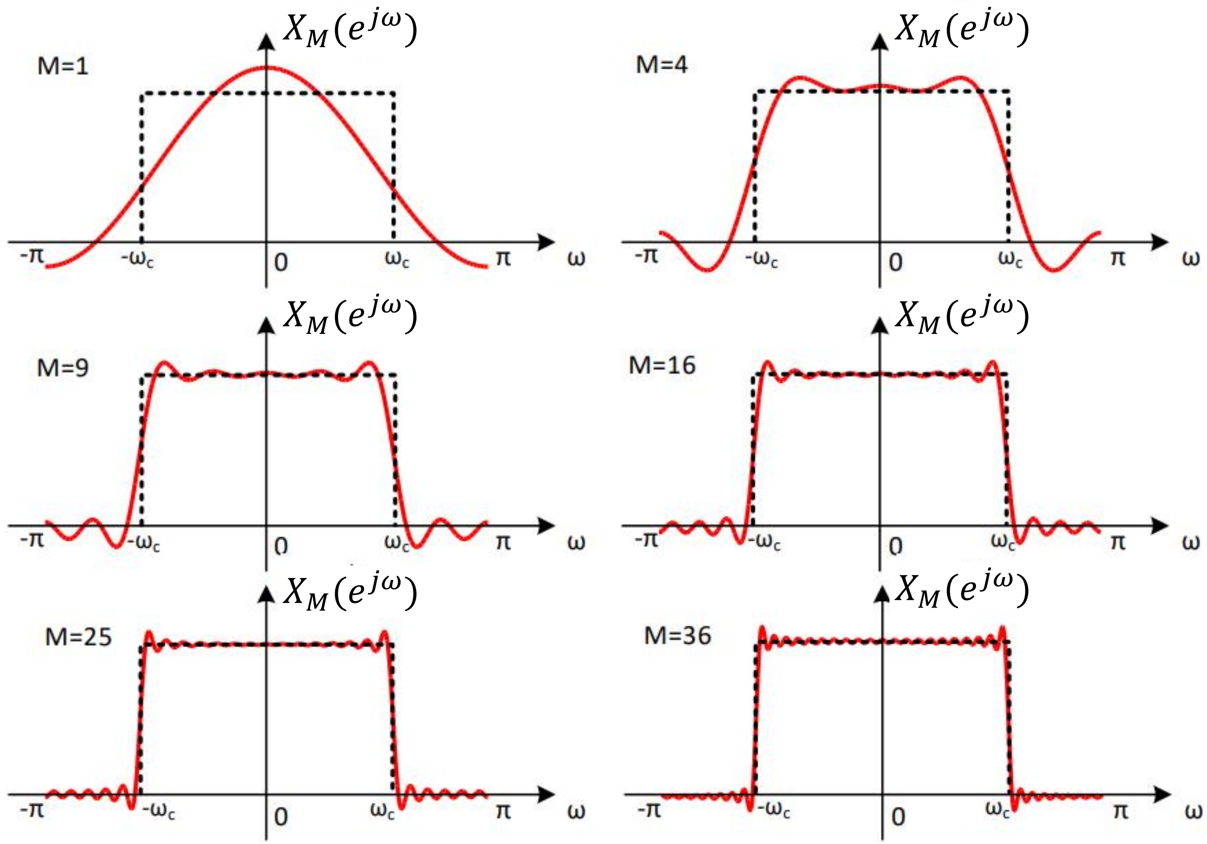
Άρα

$$x[n] = \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n) \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο αντίστροφος DTFT του σήματος που φαίνεται στο σχήμα.

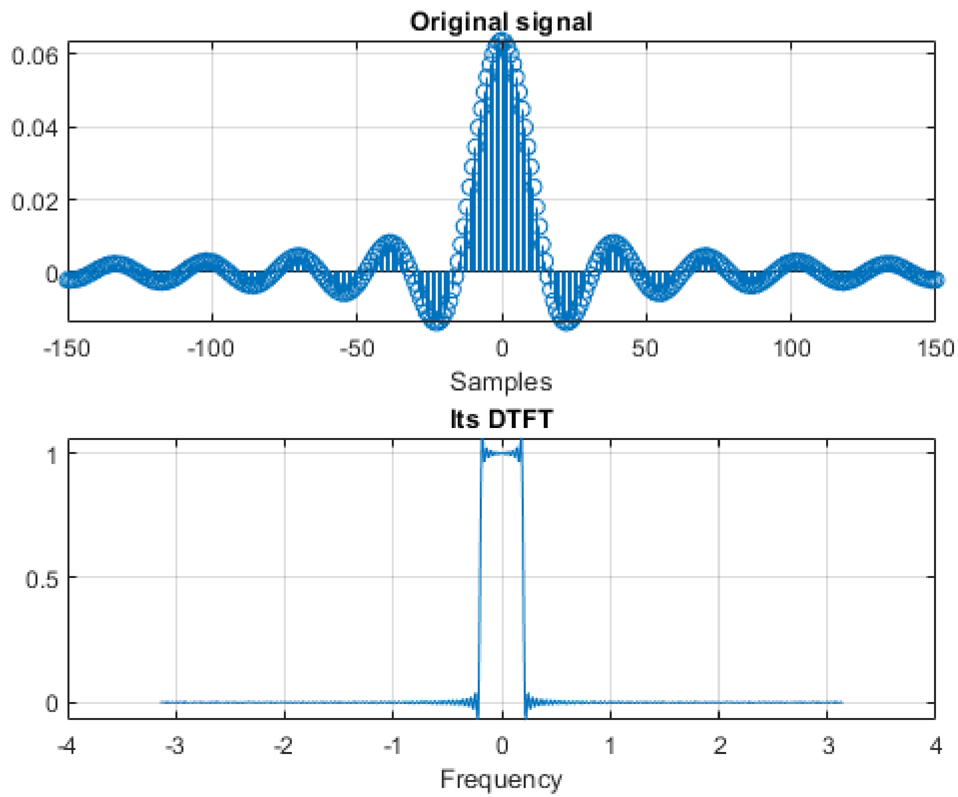


Αν υλοποιήσαμε 2M+1 δείγματα του $x[n] = \sin(\omega_c n)/\pi n$:



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

```
% Έλεγχος του DTFT
%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Σήμα στο χρόνο
n = [-150:150];
wc = 0.2;
x = sin(wc*n)./(pi*n);
% Ρύθμιση απροσδιοριστίας
x(151) = wc/pi;

% DTFT στο χέρι

% παίρνω 600 τιμές στο [-π,π]
w = linspace(-pi, pi, 600); % <--- play with 600!
dw = w(2)-w(1);

% Σύνθεση του X(exp(jw)) μέσω του DTFT
X_syn = zeros(size(w));

for i = 1:length(n)
    X_syn = X_syn + x(i).*exp(-1i*w*n(i));
end

% απεικόνιση
figure(1); subplot(211);
stem(n,x); title('Original signal');
xlabel('Samples'); grid;
subplot(212); plot(w, X_syn);
title('Its DTFT'); xlabel('Frequency'); grid;
```



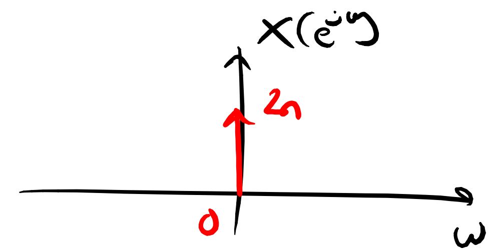
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
    - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = 1$.

Θα δείξουμε ότι $x[n] = 1 \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$

Είναι:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{2\pi}\delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega n}\Big]_{\omega=0} = 1$$



Άρα

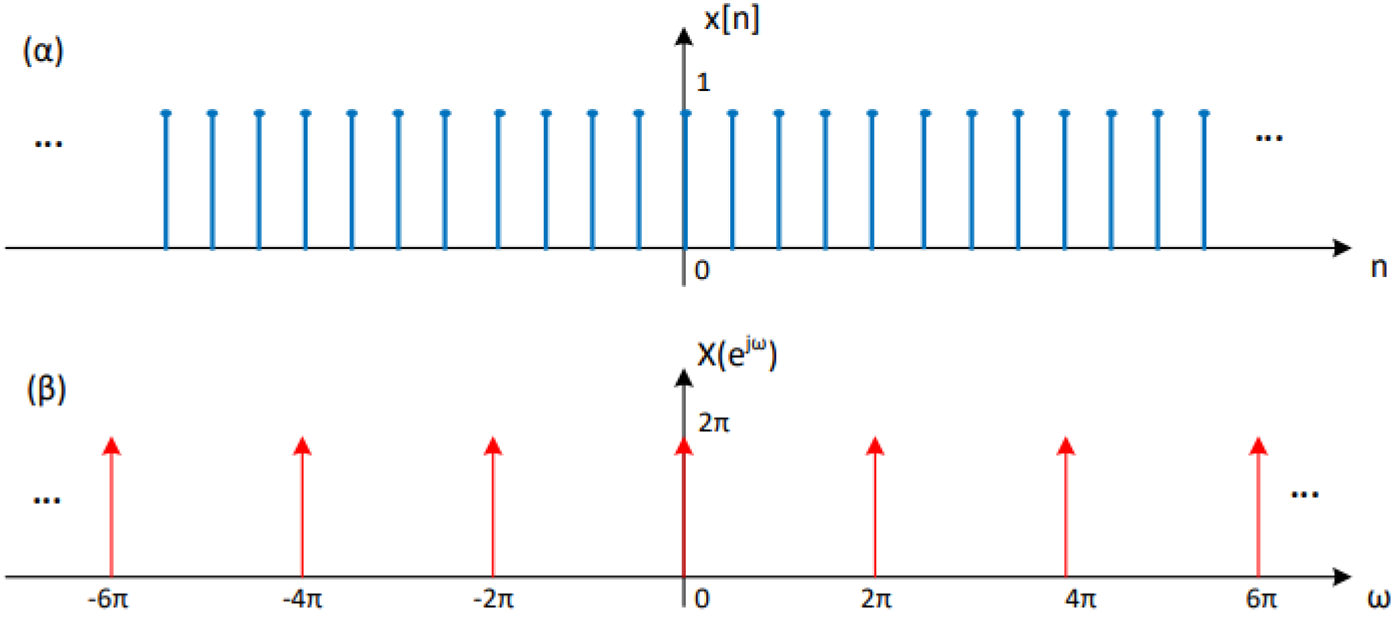
$$x[n] = 1 \ \forall n \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$$

© Καφεντζής Γιώργος, PhD

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:

Το σήμα στο χρόνο $x[n]=1$ και ο DTFT του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, $\forall\, n,\ \omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

Θα δείξουμε ότι $x[n] = e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

Είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{2\pi}\,\delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega-\omega_0)\, e^{j\omega n}\, d\omega = e^{j\omega n}\Big]_{\omega=\omega_0} = e^{j\omega_0 n}.$$

Άρα

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\, f(x)\, dx = f(x_0)$$

- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**
  - Παραδείγματα:
  - ○ Να βρεθεί ο DTFT του σήματος $x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$, $\forall\, n,\ \omega_0 \in (-\pi, \pi]$.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A\cos(\omega_0 n + \varphi)\, e^{-j\omega n}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} e^{j\omega_0 n} \cdot e^{j\varphi} e^{-j\omega n}}_{F\left\{\frac{A}{2} e^{j(\omega_0 n+\varphi)}\right\}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n} \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j\omega n}}_{F\left\{\frac{A}{2} e^{-j(\omega_0 n+\varphi)}\right\}}$$

Από προηγ. παράδειγμα:

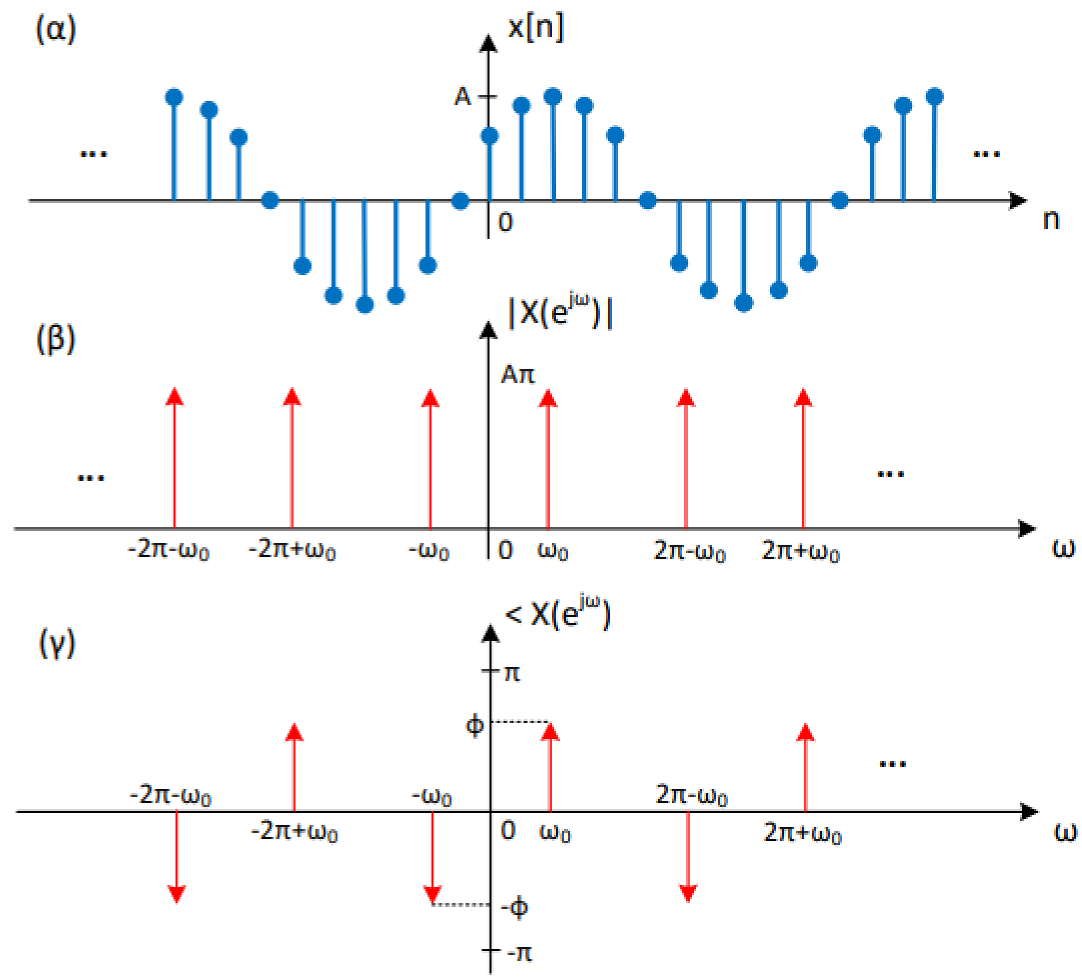
$$X(e^{j\omega}) = \frac{A}{2} e^{j\varphi} \cdot 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \cdot 2\pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$

$$= A\pi\, e^{j\varphi}\,\delta(\omega-\omega_0) + A\pi\, e^{-j\varphi}\,\delta(\omega+\omega_0)$$

• Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

- Παραδείγματα:

Το σήμα στο χρόνο, το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



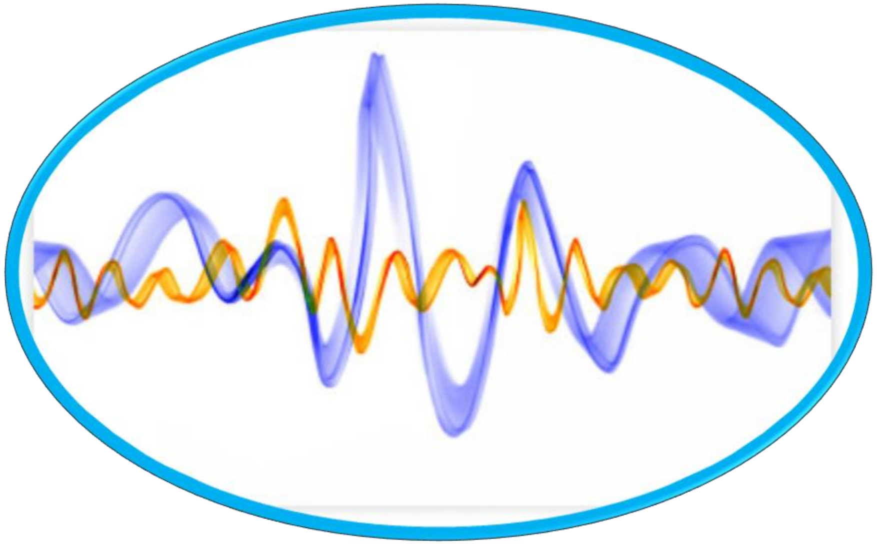
- **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου**

Για να δούμε το DTFT στο διάστημα $(-\pi,\pi]$, θέτουμε $k=0$ όπου χρειάζεται στις διπλανές σχέσεις.

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n-1],\ \lvert a\rvert>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\omega+2\pi k)$
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert},\ \lvert a\rvert<1,$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos(\omega)+a^2}$
$\frac{r^n\sin(\omega_c(n+1))}{\sin(\omega_c)}u[n],\ \lvert r\rvert<1$	$\frac{1}{1-2r\cos(\omega_c)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega})=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c<\lvert\omega\rvert\le\pi\end{cases}$
$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega\ (M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)+\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n+\phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}-j[\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)-\pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$

Τέλος Διάλεξης



© Καφεντζής Γιώργος, PhD