ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.
Από το σχήμα της εκφώνησης έχουμε τις εξισώσεις διαφορών

$$y_r[n] = x[n] + \cos(\omega_0)y_r[n-1] - \sin(\omega_0)y_i[n-1] \tag{1}$$
$$y_i[n] = \sin(\omega_0)y_r[n-1] + \cos(\omega_0)y_i[n-1] \tag{2}$$

και

$$y[n] = y_r[n] + jy_i[n] \tag{3}$$
$$= x[n] + \cos(\omega_0)y_r[n-1] - \sin(\omega_0)y_i[n-1] + j(\sin(\omega_0)y_r[n-1] + \cos(\omega_0)y_i[n-1]) \tag{4}$$
$$= (\cos(\omega_0) + j\sin(\omega_0))(y_r[n-1] + jy_i[n-1]) + x[n] \tag{5}$$
$$= e^{j\omega_0}y[n-1] + x[n] \tag{6}$$

Οπότε εύκολα προκύπτει ότι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}} \tag{7}$$

Άσκηση 2.

i. Direct Form I: η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})} \tag{8}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{1}{12}z^{-3}} \tag{9}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{5}{24}z^{-2} + \frac{1}{12}z^{-3}} \tag{10}$$

και για τη σχεδίαση της υλοποίησης

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 - (\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{5}{24}z^{-2} - \frac{1}{12}z^{-3})} \tag{11}$$

ii. Direct Form II: προκύπτει από την Direct Form I κατά τα γνωστά.

iii. Σειρά με πρώτης και δευτέρας τάξης υποσυστήματα σε Direct Form II: η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = \frac{(1 - \frac{1}{5}z^{-1})}{(1 + \frac{1}{4}z^{-1})} \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2})} \tag{12}$$

iv. Παραλληλία με πρώτης και δευτέρας τάξης υποσυστήματα σε Direct Form II: Οι ρίζες του πολυωνύμου $1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$ είναι μιγαδικές, οπότε δεν μπορούμε να πάμε σε πρωτοβάθμιους όρους. Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = \frac{A}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B + Cz^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \tag{13}$$

με

$$A = \left.\frac{1-\frac{1}{5}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2})}\right|_{z^{-1}=-4} = \frac{27}{125} \tag{14}$$

$$B = \frac{98}{125} \tag{15}$$

$$C = -\frac{36}{125} \tag{16}$$

με τα B, C να προκύπτουν από την εξίσωση

$$A\Big(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}\Big)+\Big(B+Cz^{-1}\Big)\Big(1+\frac{1}{4}z^{-1}\Big) = 1-\frac{1}{5}z^{-1} \tag{17}$$

v. Ανάστροφη μορφή Direct Form II: προκύπτει από την Direct Form II με βάση τους γνωστούς κανόνες. Όλες οι υλοποιήσεις φαίνονται στο Σχήμα 1.

Άσκηση 3.

(α΄) Πραγματική κρουστική απόκριση: οι πόλοι και τα μηδενικά είναι είτε πραγματικά, είτε έρχονται σε συζυγή ζεύγη. Το πεδίο σύγκλισης είναι της μορφής $|z| > \max|p_k|$, με p_k τους πόλους του συστήματος.

(β΄) Πεπερασμένης διάρκειας κρουστική απόκριση: οι πόλοι βρίσκονται στο μηδέν (όλοι). Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε. Το πεδίο σύγκλισης είναι της μορφής $|z| > 0$.

(γ΄) $h[n] = h[2a-n]$, $a \in \mathbb{Z}$: η συμμετρία υποδηλώνει γραμμική φάση (Τύπου I, II), και μάλιστα - λόγω της υπόθεσης της αιτιατότητας από την εκφώνηση - το σύστημα πρέπει να είναι FIR. Οι πόλοι βρίσκονται όλοι στο μηδέν ενώ τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε αλλά πρέπει να έρχονται σε αμοιβαία ζεύγη $(z_0, 1/z_0)$. Το πεδίο σύγκλισης θα είναι της μορφής $|z| > 0$.

(δ΄) Ελάχιστης φάσης: οι πόλοι και τα μηδενικά βρίσκονται οπουδήποτε εντός του μοναδιαίου κύκλου. Το πεδίο σύγκλισης είναι της μορφής $|z| > \max|p_k|$ με p_k τους πόλους του συστήματος, και $|p_k| < 1$.

(ε΄) All-pass: Οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη $(z_0, 1/z_0^*)$. Το πεδίο σύγκλισης είναι της μορφής $|z| > \max|p_k|$ με p_k τους πόλους του συστήματος.

(ϛ΄) (β΄) & (γ΄): οι πόλοι βρίσκονται στο μηδέν (όλοι). Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε αλλά πρέπει να έρχονται σε αμοιβαία ζεύγη $(z_0, 1/z_0)$. Το πεδίο σύγκλισης θα είναι της μορφής $|z| > 0$.

(ζ΄) (α΄) & (δ΄): όλοι οι πόλοι και τα μηδενικά πρέπει να βρίσκονται εντός μοναδιαίου κύκλου και όσα από αυτά είναι μιγαδικά, να έρχονται σε συζυγή ζεύγη. Το πεδίο σύγκλισης είναι της μορφής $|z| > \max|p_k|$ με p_k τους πόλους του συστήματος, και $|p_k| < 1$.

Άσκηση 4.

(α΄) Τα συστήματα ελάχιστης φάσης έχουν πόλους και μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου. Τα συστήματα all-pass εχουν πόλους και μηδενικά σε αμοιβαία συζυγή ζεύγη. Τα συστήματα γραμμικής φάσης έχουν πόλους στο μηδέν και μηδενικά σε αμοιβαία ζεύγη. Οπότε κατά τη διάσπαση ενός συστήματος γραμμικής φάσης, το σύστημα ελάχιστης φάσης θα πάρει τους πόλους στο μηδέν και τα μηδενικά εντός μοναδιαίου κύκλου. Το σύστημα all-pass θα πάρει τα μηδενικά εκτός μοναδιαίου κύκλου, αλλά πρέπει να έχει πόλους στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις των μηδενικών που έλαβε από το σύστημα γραμμικής φάσης. Για να ακυρώσουμε την επίδραση των πολων αυτών, θα βάλουμε αντίστοιχα μηδενικά στις ίδιες θέσεις στο σύστημα ελάχιστης φάσης. Ως εκ τούτου, τα μηδενικά του συστήματος ελάχιστης φάσης θα είναι δευτέρας τάξης.

(β΄) Αφού το σύστημα γραμμικής φάσης έχει μήκος 8, θα έχει 7 μηδενικά. Από τη συμμετρία της κρουστικής απόκρισης, προκύπτει ότι είναι Τύπου IV. Το μηδενικό στη θέση $z = 2$ συνεπάγεται ένα μηδενικό στη θέση $z = 1/2$, ενώ το μηδενικό στη θέση $z = 0.8e^{j\pi/4}$ συνεπάγεται μηδενικά στις θέσεις $z = 0.8e^{-j\pi/4}$, $z = 1.25e^{j\pi/4}$, $z = 1.25e^{-j\pi/4}$. Τέλος, αφού είναι Τύπου IV θα έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 1$. Συνολικά

$$H(z) = A(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})(1-0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1-0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})(1-1.25e^{j\pi/4}z^{-1})(1-1.25e^{-j\pi/4}z^{-1}) \tag{18}$$

με A σταθερά.

Άσκηση 5.

Θεωρώντας επιπλέον μεταβλητές, παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} e[n] &= -x[n] + w[n] + g[n] && (19)\\ w[n] &= x[n-1] + 2g[n] && (20)\\ g[n] &= w[n-1] + y[n-1] && (21)\\ y[n] &= 2e[n] && (22) \end{aligned}$$

που μετασχηματίζεται ως

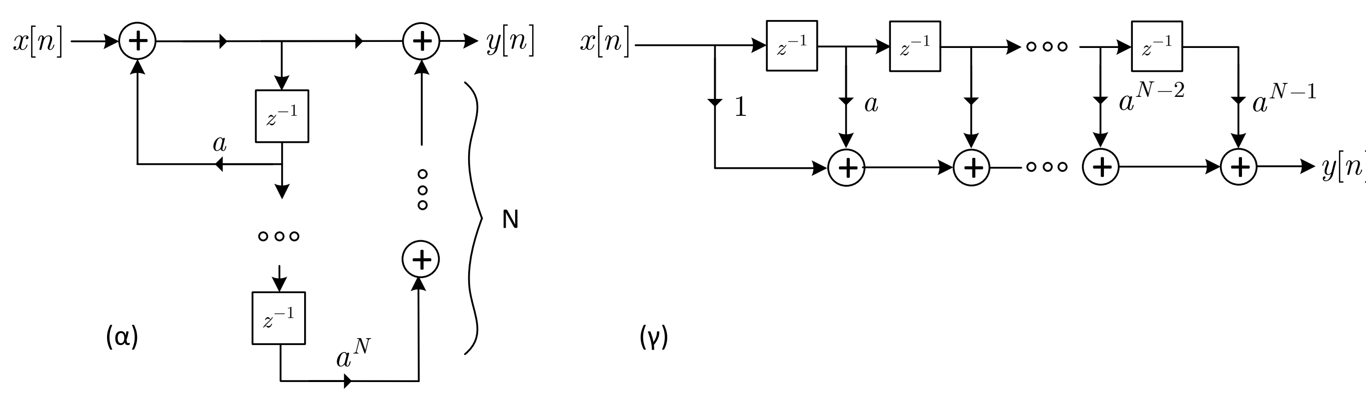
$$\begin{aligned} E(z) &= -X(z) + W(z) + G(z) && (23)\\ W(z) &= z^{-1}X(z) + 2G(z) && (24)\\ G(z) &= z^{-2}X(z) + 2z^{-1}G(z) + z^{-1}Y(z) && (25)\\ G(z) - 2z^{-1}G(z) &= z^{-2}X(z) + z^{-1}Y(z) && (26)\\ G(z) &= \frac{z^{-2}X(z) + z^{-1}Y(z)}{1-2z^{-1}} && (27)\\ Y(z) &= 2E(z) && (28)\\ &= -2X(z) + 2z^{-1}X(z) + 6\frac{z^{-2}X(z) + z^{-1}Y(z)}{1-2z^{-1}} && (29)\\ Y(z) - 8z^{-1}Y(z) &= -2X(z) + 6z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z) && (30) \end{aligned}$$

και στο πεδίο του χρόνου

$$y[n] - 8y[n-1] = -2x[n] + 6x[n-1] + 2x[n-2] \tag{31}$$

Άσκηση 6.

(α΄) Μια υλοποίηση φαίνεται στο Σχήμα 2(α).



Σχήμα 2: *Υλοποιήσεις Άσκησης 6.*

(β΄) Το παραπάνω σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{1 - az^{-1}}(1 - az^{-1})(1 + az^{-1} + \cdots + (az^{-1})^{N-2} + (az^{-1})^{N-1}) \quad (32)$$

$$= 1 + az^{-1} + \cdots + (az^{-1})^{N-2} + (az^{-1})^{N-1} \quad (33)$$

Οπότε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = (1 + az^{-1} + \cdots + (az^{-1})^{N-2} + (az^{-1})^{N-1} \quad (34)$$

και γυρνώντας πίσω στο χρόνο

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a^k x[n-k] \quad (35)$$

(γ΄) Μια υλοποίηση φαίνεται στο Σχήμα 2(γ).

(δ΄) Η υλοποίηση του Σχήματος 2(α) απαιτεί δυο αθροιστές, δυο πολλαπλασιασμούς, και N στοιχεία καθυστέρησης. Η υλοποίηση του Σχήματος 2(γ) απαιτεί $N-1$ αθροιστές, $N-1$ πολλαπλασιασμούς, και $N-1$ στοιχεία καθυστέρησης.

Άσκηση 7.

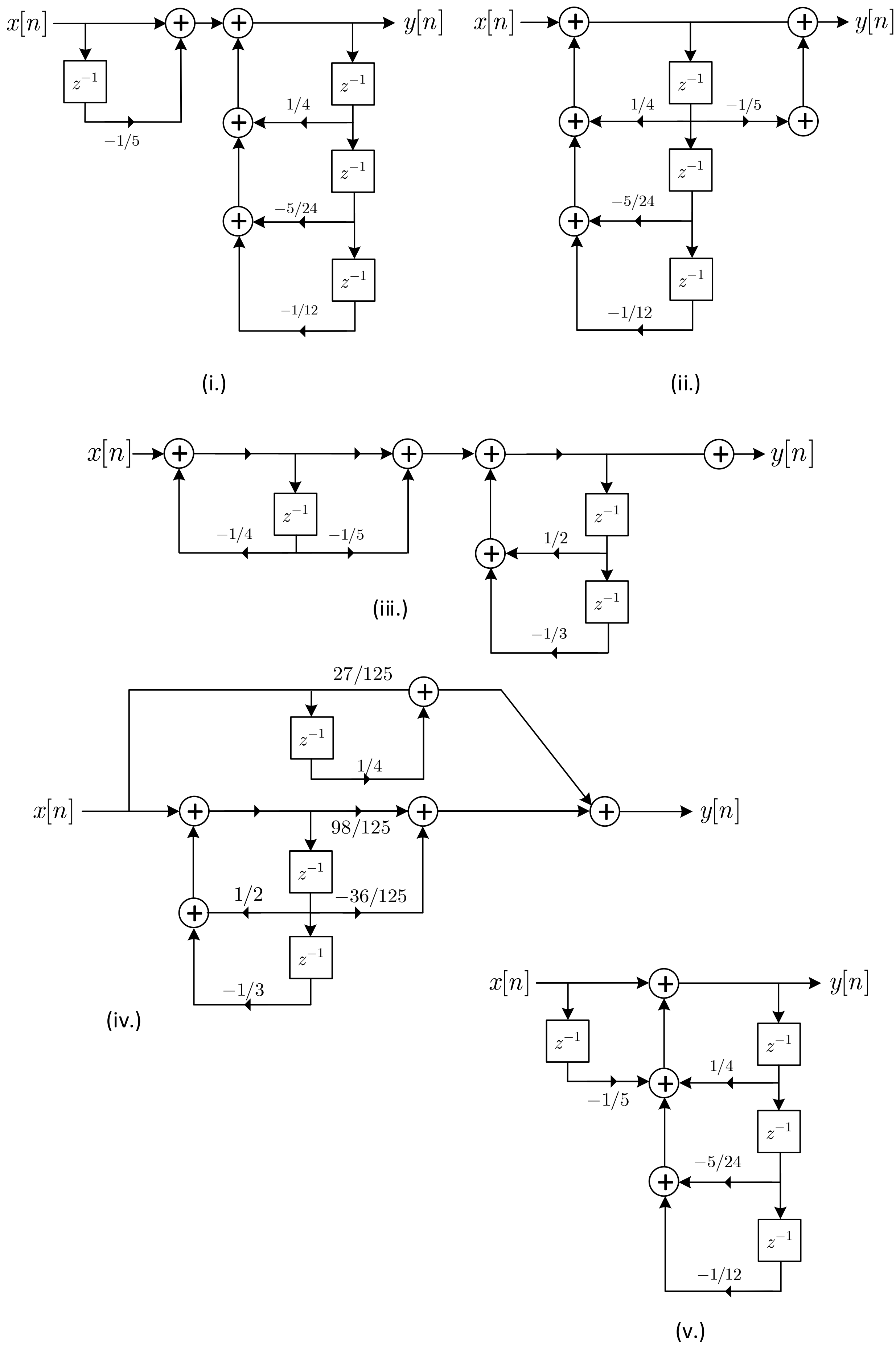
Είναι

$$r_h[n] = \sum_m h[m]h[m+n] = h[n] * h[-n] \longleftrightarrow R_h(z) = H(z)H(z^{-1}) \quad (36)$$

οπότε

$$R_h(z) = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^* z^{-1})(1 - (1/z_1)z^{-1})(1 - (1/z_1)^* z^{-1}) \quad (37)$$

Ο μετασχ. αυτός έχει τέσσερα μηδενικά στις θέσεις $z = z_1, z = z_1^*, z = 1/z_1, z = 1/z_1^*$ και τέσσερις πόλους στο $z = 0$.



Σχήμα 1: *Υλοποιήσεις Άσκησης 3.*