

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/11/2019

Ημερομηνία Παράδοσης: 28/11/2019, 18:00

Άσκηση 1.

Χρησιμοποιήστε πίνακες και ιδιότητες για να βρείτε τους ακόλουθους μετασχ. Ζ:

(α) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * 2^n u[-n - 1]$

Απ.: $X(z) = -\frac{1}{1-(1/2)z^{-1}} \frac{1}{1-2z^{-1}}, \frac{1}{2} < |z| < 2$

(β) $x[n] = n \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2] \right)$

Απ.: $X(z) = \frac{2z^{-2} - \frac{3}{4}z^{-3}}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right)^2}, |z| > \frac{1}{2}$

(γ) $x[n] = n \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) u[-n]$

Απ.: $X(z) = \frac{z}{1+z^2} - \frac{2z^3}{(1+z^2)^2}, |z| < 1$

(δ) $x[n] = 3^{n-2} u[n] * \cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{3}\right) u[n]$

Απ.: $X(z) = \frac{1}{9} \frac{1}{1-3z^{-1}} \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}z^{-1}}{1 - \sqrt{3}z^{-1} + z^{-2}}, |z| > 3$

Άσκηση 2.

Σας δίνεται το ζεύγος μετασχ. Ζ

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 16}, |z| < 4 \quad (1)$$

Χρησιμοποιήστε ιδιότητες για να βρείτε τους μετασχ. Ζ των σημάτων:

(α) $y[n] = x[n - 2]$

Απ.: $Y(z) = \frac{1}{z^2 - 16}, |z| < 4$

(β) $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x[n]$

Απ.: $Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - 4}, |z| < 2$

(γ) $y[n] = nx[n]$

Απ.: $Y(z) = \frac{32z^2}{(z^2 - 16)^2}, |z| < 4$

$$(δ) y[n] = x[n+1] + x[n-1]$$

$$\text{Απ.: } Y(z) = \frac{z^3+z}{z^2-16}, |z| < 4$$

Άσκηση 3.

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του σήματος

$$X(z) = \frac{1}{1 - a^{10}z^{-10}}, |z| > |a| \quad (2)$$

$$\text{Απ.: } x[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{10k} \delta[n - 10k]$$

Άσκηση 4.

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο για είσοδο $x[n] = (-2)^n$, $\forall n$ δίνει έξοδο $y[n] = 0$, $\forall n$, ενώ για είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ η έξοδος του είναι $y[n] = \delta[n] + \alpha \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$.

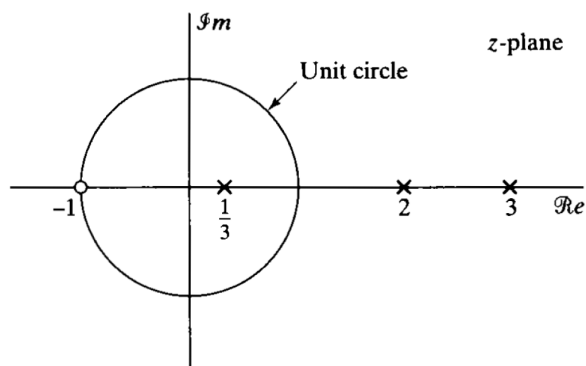
(α) Να βρείτε την τιμή του α .

(β) Να βρείτε την έξοδο του συστήματος για είσοδο $x[n] = 1$, $\forall n$.

$$\text{Απ.: (α) } -9/8, \text{ (β) } y[n] = -\frac{1}{4}, \forall n$$

Άσκηση 5.

Θεωρήστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ που έχει το παρακάτω διάγραμμα πόλων-μηδενικών.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 5.

(α) Βρείτε την περιοχή σύγκλισης αν σας δίνεται ότι

$$\sum_n |h[n]| < +\infty \quad (3)$$

Αποφανθείτε για την πλευρικότητα του σήματος.

(β) Πόσες πιθανές αμφίπλευρες ακολουθίες έχουν το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 1;

Απ.: 2

(γ) Είναι πιθανό το διάγραμμα αυτό να αντιστοιχεί σε ένα ευσταθές και αιτιατό σύστημα; Δικαιολογήστε σε κάθε περίπτωση.

Απ.: Όχι.

(δ) Σας δίνεται ότι $H(0) = -1$. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση $h[n]$ αν γνωρίζετε ότι το σύστημα είναι

- i. αιτιατό
- ii. αντι-αιτιατό

Προσέξτε η συνάρτηση μεταφοράς που θα λάβετε να έχει τους πόλους και τα μηδενικά του Σχήματος 1.

$$\text{Απ.: } H(z) = -1 + \frac{9}{5} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{9}{5} \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{1}{1 - 3z^{-1}}$$

Άσκηση 6.

Δείξτε ότι ο αντίστροφος μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 - z^{-1})}, \quad 1 < |z| < 2 \quad (4)$$

δίνεται ως

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^{n+1} u[-n - 1] - 2u[n] \quad (5)$$

Άσκηση 7.

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει κρουστική απόκριση $h[n]$ και συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ως

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (6)$$

(α) Ποιά είναι η περιοχή σύγκλισης του;

(β) Είναι το σύστημα ευσταθές; Εξηγήστε.

(γ) Βρείτε το μετασχ. Z μιας εισόδου που παράγει την έξοδο

$$y[n] = -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] - \frac{4}{3} 2^n u[-n - 1] \quad (7)$$

Άσκηση 8.

Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα διανυσμάτων και τη γεωμετρική θεώρηση της απόκρισης πλάτους, σχεδιάστε με κάποια ακρίβεια (μέγιστα, ελάχιστα, και τιμές τους) τις αποκρίσεις πλάτους των παρακάτω συστημάτων και αναφέρετε αν έχουν χαμηλοπερατά, υψιπερατά, ή ζωνοπερατά χαρακτηριστικά.

$$(α) X(z) = \frac{z^{-1}}{1 + \frac{8}{9}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{8}{9}$$

$$(β) X(z) = \frac{1 + \frac{8}{9}z^{-1}}{1 - \frac{16}{9}z^{-1} + \frac{64}{81}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{8}{9}$$

$$(γ) X(z) = \frac{1}{1 + \frac{64}{81}z^{-2}}, \quad |z| > \frac{8}{9}$$

Απ.: (α) υψιπερατό, (β) χαμηλοπερατό, (γ) ζωνοπερατό