ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Άσκηση 1.

(α') $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * 2^n u[-n-1]$: Είναι

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\ \ |z| > 1/2 \tag{1}$$

$$2^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{1}{1-2z^{-1}},\ \ |z| < 2 \tag{2}$$

οπότε η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στο χώρο του Z, δηλ.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * 2^n u[-n-1] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big(-\frac{1}{1-2z^{-1}}\Big),\ \ 1/2 < |z| < 2 \tag{3}$$

(β') $x[n] = n\Big(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2]\Big)$: Το σήμα γράφεται ως

$$x[n] = ny[n] = n(x_1[n] * x_2[n]) \tag{4}$$

με

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] \tag{5}$$

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{6}$$

$$x_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2] \tag{7}$$

Ο μετασχ. Z θα είναι

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}Y(z) \tag{8}$$

οπότε

$$Y(z) = X_1(z)X_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})},\ \ |z| > 1/2 \tag{9}$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός θα είναι

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}Y(z) = \frac{2z^{-2} - \frac{3}{4}z^{-3}}{(1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2})^2},\ \ |z| > \frac{1}{2} \tag{10}$$

(γ') $x[n] = n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[-n]$: Παρατηρούμε ότι

$$x[n] = n\sin\Big(\frac{\pi n}{2}\Big)u[-n] = -n\sin\Big(-\frac{\pi n}{2}\Big)u[-n] \tag{11}$$

Άρα πρέπει να βρούμε τον μετασχ. Z του

$$y[n] = n\sin\Big(\frac{\pi n}{2}\Big)u[n] \tag{12}$$

για τον οποίο ισχύει ότι $x[n] = y[-n]$. Άρα

$$y[n] = n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)u[n] \longleftrightarrow Y(z) = -z\frac{d}{dz}\frac{z^{-1}}{1+z^{-2}},\ \ |z|>1 \tag{13}$$

Οπότε

$$X(z) = Y(z^{-1}) = \frac{z}{1+z^2} - \frac{2z^3}{(1+z^2)^2},\ \ |z|<1 \tag{14}$$

(δ΄) $x[n] = 3^{n-2}u[n] * \cos\left(\frac{\pi n}{6}+\frac{\pi}{3}\right)u[n]$: Το σήμα γράφεται ως

$$x[n] = 3^{n-2}u[n] * \cos\left(\frac{\pi n}{6}+\frac{\pi}{3}\right)u[n] = \frac{1}{9}3^n u[n] * \cos\left(\frac{\pi n}{6}+\frac{\pi}{3}\right)u[n] \tag{15}$$

και ο μετασχ. Z του είναι

$$X(z) = \frac{1}{9}\frac{1}{1-3z^{-1}}\Big\{\cos\left(\frac{\pi n}{6}+\frac{\pi}{3}\right)u[n]\Big\} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-3z^{-1}}\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}z^{-1}}{1-\sqrt{3}z^{-1}+z^{-2}},\ \ |z|>3 \tag{16}$$

αφού

$$\cos\left(\frac{\pi n}{6}+\frac{\pi}{3}\right)u[n] = \left[\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]u[n] = \Big[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)\Big]u[n] \tag{17}$$

και

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{6}\right)u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1-z^{-1}\cos(\pi/6)}{1-2z^{-1}\cos(\pi/6)+z^{-2}},\ |z|>1 \tag{18}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)u[n] \longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{z^{-1}\sin(\pi/6)}{1-2z^{-1}\cos(\pi/6)+z^{-2}},\ |z|>1 \tag{19}$$

Άσκηση 2.

(α΄) Είναι

$$y[n] = x[n-2] \longleftrightarrow Y(z) = X(z)z^{-2} = \frac{1}{z^2-16},\ |z|<4 \tag{20}$$

(β΄) Είναι

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x[n] \longleftrightarrow Y(z) = X(2z) = \frac{z^2}{z^2-4},\ \ |z|<2 \tag{21}$$

(γ΄) Είναι

$$y[n] = nx[n] \longleftrightarrow Y(z) = -z\frac{d}{dz}X(z) = -z\frac{d}{dz}\frac{z^2}{z^2-16} = \frac{32z^2}{(z^2-16)^2},\ \ |z|<4 \tag{22}$$

(δ΄) Είναι

$$y[n] = x[n+1]+x[n-1] \longleftrightarrow Y(z) = zX(z)+z^{-1}X(z) = \frac{z^3+z}{z^2-16},\ \ |z|<4 \tag{23}$$

Άσκηση 3.
Έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1 - a^{10}z^{-10}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{10}z^{-10})^n = 1 + a^{10}z^{-10} + a^{20}z^{-20} + \cdots \tag{24}$$

οπότε

$$x[n] = \delta[n] + a^{10}\delta[n-10] + a^{20}\delta[n-20] + a^{30}\delta[n-30] + \cdots \tag{25}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a^{10k}\delta[n-10k] \tag{26}$$

Άσκηση 4.

(α΄) Από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης έχουμε

$$x[n] = (-2)^n \longrightarrow y[n] = H(-2)(-2)^n = 0, \ \forall n \tag{27}$$

Άρα

$$H(-2) = 0 \tag{28}$$

Επίσης

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \ |z| > 1/2 \tag{29}$$

και

$$y[n] = \delta[n] + \alpha\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \longleftrightarrow Y(z) = 1 + a\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{(a+1) - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \tag{30}$$

Οπότε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left((a+1) - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \tag{31}$$

και από τη Σχέση (28) έχουμε

$$H(-2) = 0 \Longleftrightarrow a = -\frac{9}{8} \tag{32}$$

(β΄) Η έξοδος είναι της μορφής

$$x[n] = 1 = (1)^n, \ \forall n \tag{33}$$

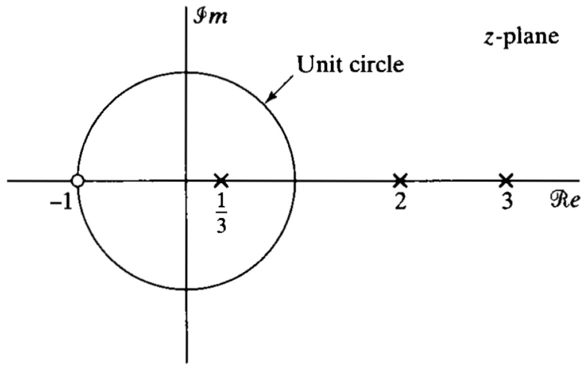
οπότε

$$y[n] = H(1)x[n] = H(1) = -\frac{1}{4}, \ \forall n \tag{34}$$

Άσκηση 5.
Θεωρήστε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ που έχει το παρακάτω διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

(α΄) Οι πιθανές περιοχές σύγκλισης είναι οι:

- $|z| > 3$
- $|z| < \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{3} < |z| < 2$
- $2 < |z| < 3$



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 5.*

Αν

$$\sum_n |h[n]| < +\infty \tag{35}$$

σημαίνει ότι το σύστημα είναι ευσταθές, άρα το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Οπότε η περιοχή σύγκλισης είναι η $\frac{1}{3} < |z| < 2$.

(β') Αμφίπλευρες είναι οι ακολουθίες με πεδίο σύγκλισης δακτυλιοειδούς μορφής. Δυο πεδία σύγκλισης έχουν τέτοια μορφή άρα δυο είναι και τα σήματα στο χρόνο [1].

(γ') Για να είναι ένα σύστημα ευσταθές κι αιτιατό, πρέπει το πεδίο σύγκλισης του να είναι εξωστρεφές και να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Κανένα πεδίο σύγκλισης δεν έχει αυτές τις ιδιότητες.

(δ') Από τη σχέση $H(0) = -1$ βρίσκουμε ότι η σταθερά A του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{A(z+1)}{(z-\frac{1}{3})(z-2)(z-3)} \Longrightarrow H(0) = \frac{A}{-2} = -1 \Longrightarrow A = 2 \tag{36}$$

Οπότε

$$H(z) = \frac{2(z+1)}{(z-\frac{1}{3})(z-2)(z-3)} = \frac{2(1+z^{-1})z^{-2}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})} \tag{37}$$

η οποία αναπτύσσεται σε μερικά κλάσματα ως

$$H(z) = -1 + \frac{9}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{9}{5}\frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1-3z^{-1}} \tag{38}$$

Για κάθε περίπτωση:

i. αιτιατό, οπότε το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| > 3$. Άρα

$$h[n] = -\delta[n] + \frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{9}{5}2^n u[n] + 3^n u[n] \tag{39}$$

ii. αντι-αιτιατό, οπότε το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| < \frac{1}{3}$. Άρα

$$h[n] = -\delta[n] - \frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] + \frac{9}{5}2^n u[-n-1] - 3^n u[-n-1] \tag{40}$$

[1] Στην πραγματικότητα είναι άπειρα, γιατί δε γνωρίζουμε τη σταθερά A του συστήματος.

Άσκηση 6.

Εφαρμόζοντας ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα έχουμε:

$$X(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-2z^{-1}} + \frac{C}{1-z^{-1}},\ 1<|z|<2 \tag{41}$$

Το πεδίο σύγκλισης γράφεται ως

$$\{1<|z|<2\} = \{1<|z|\} \cap \{|z|<2\} \cap \{|z|>\frac{1}{2}\} \tag{42}$$

Βρίσκουμε τους συντελεστές ως $A=1$, $B=2$, $C=-2$, κι έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1-2z^{-1}} - \frac{2}{1-z^{-1}},\ 1<|z|<2 \tag{43}$$

Γυρνώντας πίσω στο χρόνο

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^{n+1}u[-n-1] - 2u[n] \tag{44}$$

Άσκηση 7.

(α΄) Η περιοχή σύγκλισης είναι η $|z|>1/2$, αφού το σύστημα είναι αιτιατό.

(β΄) Ναι, είναι, αφού το πεδίο σύγκλισης περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.

(γ΄) Η έξοδος

$$y[n] = -\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n u[n] - \frac{4}{3}2^n u[-n-1] \tag{45}$$

έχει μετασχ. Ζ ως

$$Y(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})} \tag{46}$$

οπότε

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{(1-(1/3)z^{-1})(1+(1/2)z^{-1})}{(1-2z^{-1})(1+(1/4)z^{-1})} \tag{47}$$

Άσκηση 8.

(α΄) Το σύστημα $H(z) = \dfrac{z^{-1}}{1+\frac{8}{9}z^{-1}},\ |z|>\dfrac{8}{9}$ μπορεί να γραφεί στο χώρο του Fourier ως

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1+\frac{8}{9}e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega}(e^{j\omega}+\frac{8}{9})} = \frac{1}{e^{j\omega}+\frac{8}{9}} \tag{48}$$

Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega}+\frac{8}{9}|} = \frac{1}{|u|} \tag{49}$$

με $\vec{u}$ το διάνυσμα του Σχήματος 2(α). Για κάποιες ενδεικτικές τιμές της γωνίας ω, η απόκριση πλάτους θα έχει τιμές:

- $|H(e^{j0})| = \frac{1}{1+\frac{8}{9}} = \frac{9}{17}$
- $|H(e^{j\pi/2})| = \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{9}^2+1^2}} = \sqrt{\frac{81}{145}}$
- $|H(e^{j\pi})| = \frac{1}{1-\frac{8}{9}} = 9$

- $|H(e^{j3\pi/2})| = \sqrt{\frac{81}{145}}$, λόγω συμμετρίας
- $|H(e^{j2\pi})| = \frac{9}{17}$, λόγω συμμετρίας

Με βάση τις παραπάνω τιμές μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα του Σχήματος 2(β). Το φίλτρο έχει υψιπερατά χαρακτηριστικά, αφού έχει υψηλές τιμές γύρω από τη συχνότητα π.

(β΄) Το σύστημα $H(z) = \dfrac{1 + \frac{8}{9}z^{-1}}{1 - \frac{16}{9}z^{-1} + \frac{64}{81}z^{-2}}, \ |z| > \dfrac{8}{9}$ μπορεί να γραφεί στο χώρο του Fourier ως

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{8}{9}e^{-j\omega}}{1 - \frac{16}{9}e^{-j\omega} + \frac{64}{81}e^{-j2\omega}} = \frac{1 + \frac{8}{9}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{8}{9}e^{-j\omega})^2} = \frac{e^{j\omega} + \frac{8}{9}}{e^{-j\omega}(e^{j\omega} - \frac{8}{9})^2} \tag{50}$$

Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} + \frac{8}{9}|}{|e^{j\omega} - \frac{8}{9}|^2} = \frac{|u_1|}{|u_2|^2} \tag{51}$$

με $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ τα διανύσματα του μηδενικού και του πόλου αντίστοιχα, του Σχήματος 2(γ). Για κάποιες ενδεικτικές τιμές της γωνίας ω, η απόκριση πλάτους θα έχει τιμές:

- $|H(e^{j0})| = \frac{1+\frac{8}{9}}{\frac{1}{9}\frac{1}{9}} = 153$
- $|H(e^{j\pi/2})| = \frac{\sqrt{(8/9)^2+1}}{(8/9)^2+1} = \sqrt{\frac{81}{145}}$
- $|H(e^{j\pi})| = \frac{\frac{1}{9}}{(1+\frac{8}{9})^2}$
- $|H(e^{j3\pi/2})| = \sqrt{\frac{81}{145}}$, λόγω συμμετρίας
- $|H(e^{j2\pi})| = 153$, λόγω συμμετρίας

Με βάση τις παραπάνω τιμές μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα του Σχήματος 2(δ). Το φίλτρο έχει χαμηλοπερατά χαρακτηριστικά, αφού έχει υψηλές τιμές γύρω από τη συχνότητα 0 και 2π.

(γ΄) Το σύστημα $H(z) = \dfrac{1}{1 + \frac{64}{81}z^{-2}}, \ |z| > \dfrac{8}{9}$ μπορεί να γραφεί στο χώρο του Fourier ως

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(e^{-j\omega})^2(e^{j\omega} + j\frac{8}{9})(e^{j\omega} - j\frac{8}{9})} \tag{52}$$

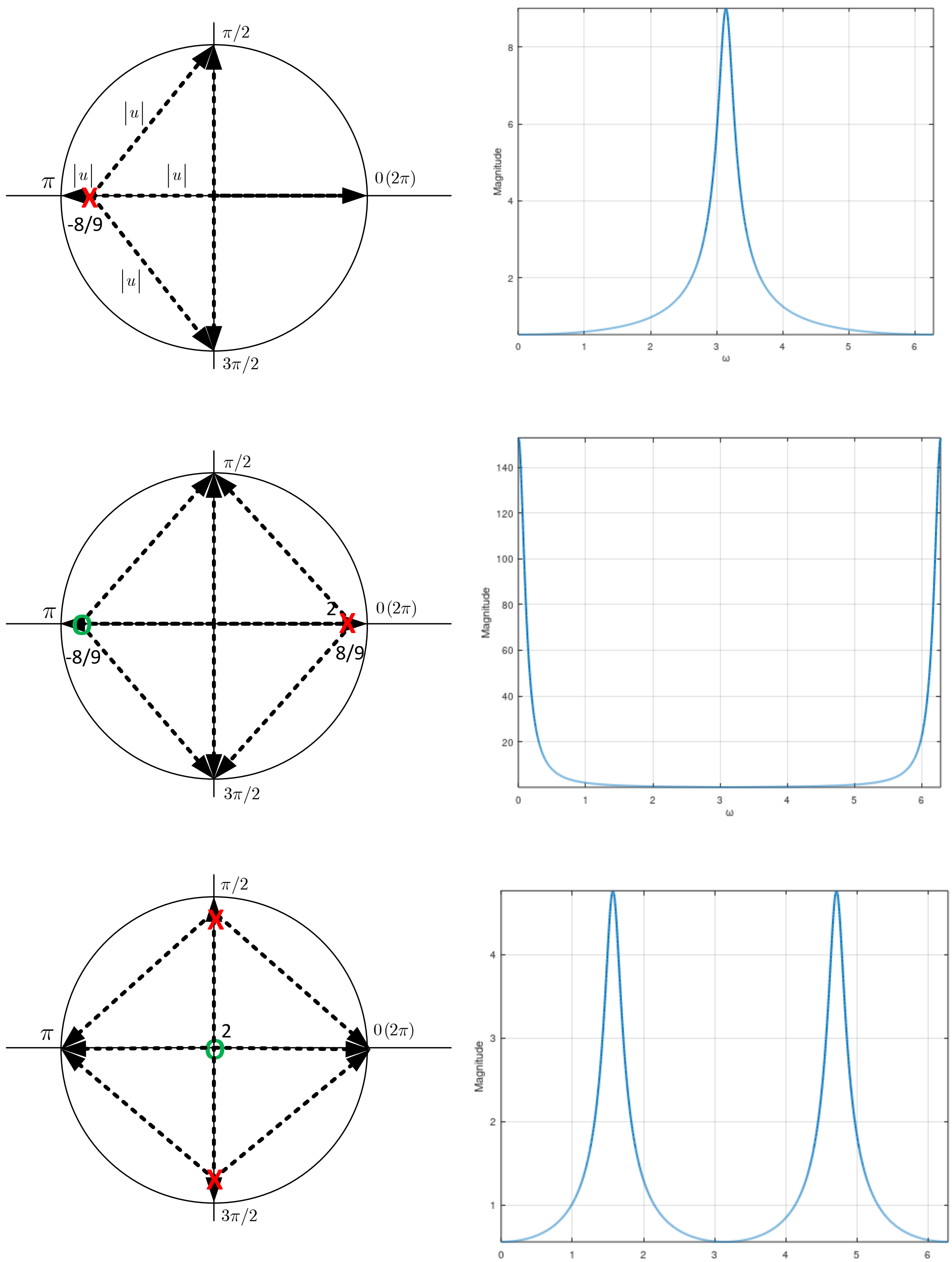
και η απόκριση πλάτους ως

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega} + j\frac{8}{9}||e^{j\omega} - j\frac{8}{9}|} = \frac{1}{|u_1||u_2|} \tag{53}$$

με $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ τα διανύσματα των δυο πόλων του Σχήματος 2(ε). Για κάποιες ενδεικτικές τιμές της γωνίας ω, η απόκριση πλάτους θα έχει τιμές:

- $|H(e^{j0})| = \frac{1}{1+(8/9)^2}$
- $|H(e^{j\pi/2})| = \frac{1}{\frac{1}{9}(1+\frac{8}{9})}$
- $|H(e^{j\pi})| = \frac{1}{1+(8/9)^2}$
- $|H(e^{j3\pi/2})| = \frac{1}{\frac{1}{9}(1+\frac{8}{9})}$, λόγω συμμετρίας.
- $|H(e^{j2\pi})| = \frac{1}{1+(8/9)^2}$, λόγω συμμετρίας.

Με βάση τις παραπάνω τιμές μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημα του Σχήματος 2(στ). Το φίλτρο έχει ζωνοπερατά χαρακτηριστικά αφού έχει υψηλές τιμές γύρω από τις συχνότητες $\pi/2$, $3\pi/2$.



Σχήμα 2: *Διαγράμματα διανυσμάτων και αποκρίσεις πλάτους Άσκησης 8.*