ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Λύσεις Δεύτερης Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 21/10/2019 Ημερομηνία Παράδοσης: 29/10/2019

Άσκηση 1.

(α΄) Θέτουμε[1] $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ και παίρνουμε

$$y[n] = e^{j\omega_0 n} + e^{j\omega_0(n-10)} = e^{j\omega_0 n}(1 + e^{-j10\omega}) = (1 + e^{-j10\omega})e^{j\omega_0 n} = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n} \tag{1}$$

και άρα η απόκριση συχνότητας δίνεται ως

$$H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j10\omega} \tag{2}$$

η οποία γράφεται ως

$$H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j10\omega} = e^{-j5\omega}(e^{j5\omega} + e^{-j5\omega}) = 2e^{-j5\omega}\cos(5\omega) \tag{3}$$

με χρήση της σχέσης

$$e^{ja} + e^{-jb} = e^{j(a-b)/2}(e^{j(a+b)/2} + e^{-j(a+b)/2}) \tag{4}$$

Η απόκριση πλάτους θα είναι

$$|H(e^{j\omega})| = |2e^{-j5\omega}\cos(5\omega)| = 2|\cos(5\omega)| \tag{5}$$

ενώ τα σημεία μηδενισμού βρίσκονται στις θέσεις

$$\cos(5\omega) = 0 = \cos(\pi/2) \Longleftrightarrow 5\omega = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \omega = \frac{2k\pi}{5} \pm \frac{\pi}{10} \tag{6}$$

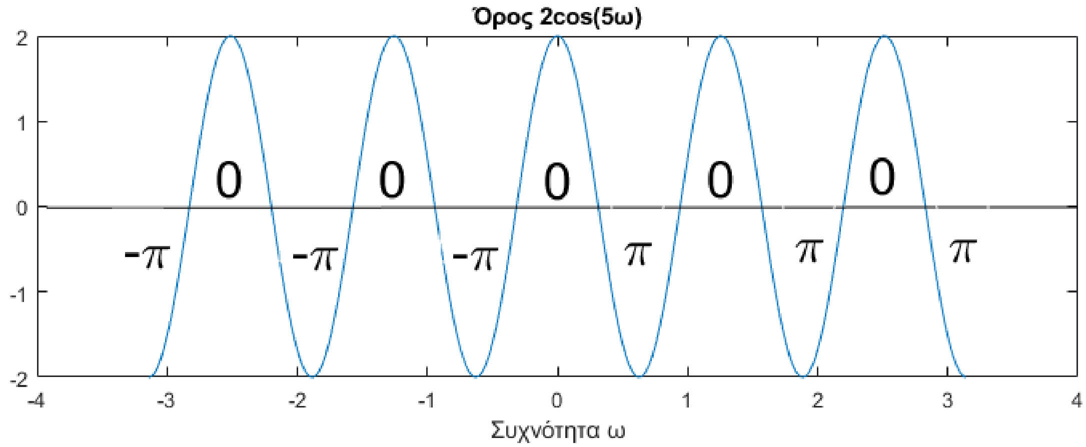
Στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ έχουμε τους μηδενισμούς στις θέσεις $\omega_i = \pm\frac{\pi}{10}, \pm\frac{3\pi}{10}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{10}, \pm\frac{9\pi}{10}$. Η απόκριση φάσης θα είναι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle e^{-j5\omega} + \angle 2\cos(5\omega) = -5\omega + \angle 2\cos(5\omega) \tag{7}$$

Στις θετικές συχνότητες, όταν το πρόσημο του όρου είναι αρνητικό, η φάση του θα είναι π, ενώ στις αρνητικές συχνότητες θα είναι $-\pi$, όπως στο Σχήμα 1. Οπότε

$$\angle 2\cos(5\omega) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < \omega < -9\pi/10 \\ 0, & 9\pi/10 < \omega < -7\pi/10 \\ -\pi, & -7\pi/10 < \omega < -\pi/2 \\ 0, & \pi/2 < \omega < -3\pi/10 \\ -\pi, & -3\pi/10 < \omega < -\pi/10 \\ 0, & -\pi/10 < \omega < \pi/10 \\ \pi, & \pi/10 < \omega < 3\pi/10 \\ 0, & 3\pi/10 < \omega < \pi/2 \\ \pi, & \pi/2 < \omega < 7\pi/10 \\ 0, & 7\pi/10 < \omega < 9\pi/10 \\ \pi, & 9\pi/10 < \omega < \pi \end{cases} \tag{8}$$

[1] Τώρα που διαβάζετε αυτές τις λύσεις, ξέρετε κι άλλους τρόπους εύρεσης της απόκρισης σε συχνότητα αλλά την περίοδο ανάθεσης γνωρίζατε μόνο αυτόν που αναφέρεται στη λύση.

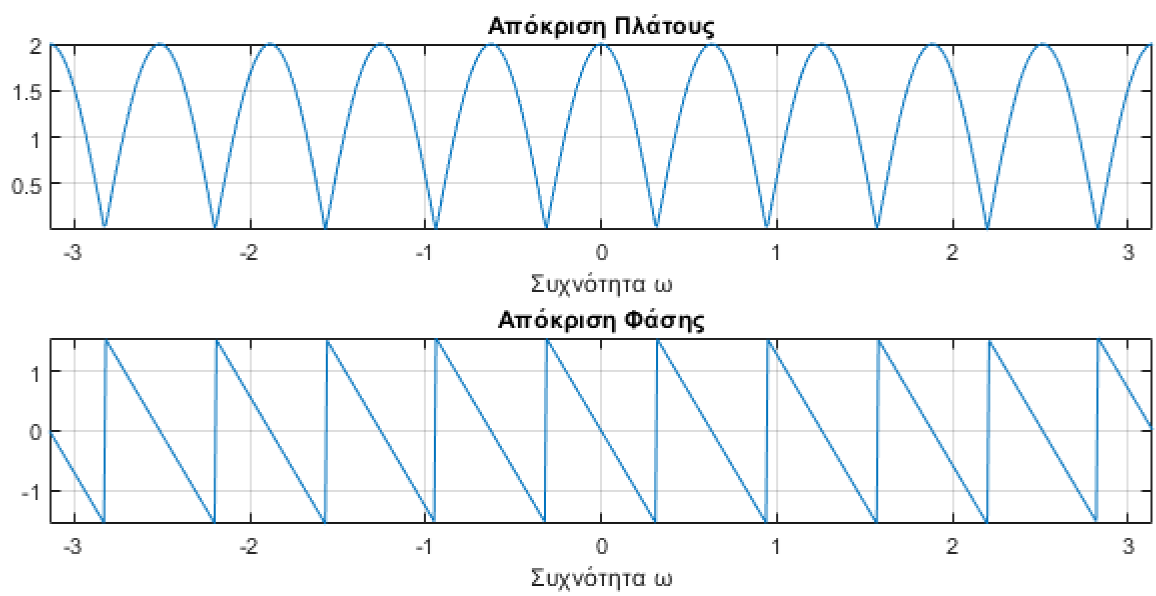


Σχήμα 1: *Φάση όρου* $2\cos(5\omega)$.

Οπότε μαζί με τη φάση -5ω, θα είναι

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -5\omega - \pi, & -\pi < \omega < -9\pi/10 \\ -5\omega, & 9\pi/10 < \omega < -7\pi/10 \\ -5\omega - \pi, & -7\pi/10 < \omega < -\pi/2 \\ -5\omega, & \pi/2 < \omega < -3\pi/10 \\ -5\omega - \pi, & -3\pi/10 < \omega < -\pi/10 \\ -5\omega, & -\pi/10 < \omega < \pi/10 \\ -5\omega + \pi, & \pi/10 < \omega < 3\pi/10 \\ -5\omega, & 3\pi/10 < \omega < \pi/2 \\ -5\omega + \pi, & \pi/2 < \omega < 7\pi/10 \\ -5\omega, & 7\pi/10 < \omega < 9\pi/10 \\ -5\omega + \pi, & 9\pi/10 < \omega < \pi \end{cases} \tag{9}$$

Η απόκριση πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Αποκρίσεις πλάτους και φάσης.*

(β΄) Για κάθε είσοδο θα έχουμε

i. Από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης, για την είσοδο $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{10}\right)$ θα έχουμε

$$y[n] = |H(e^{j\pi/10})|\cos\left(\frac{\pi n}{10} + \angle H(e^{j\pi/10})\right) + 3|H(e^{j\pi/3})|\sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{10} + \angle H(e^{j\pi/3})\right) \quad (10)$$

$$= 0 + 3 \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{10} - \frac{5\pi}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi n}{3} - \frac{47\pi}{30}\right) \quad (11)$$

ii. Από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης, για την είσοδο $x[n] = 10 + 5\cos\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{2}\right)$ θα έχουμε

$$y[n] = 10H(e^{j0}) + 5|H(e^{j2\pi/5})|\cos\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{2} + \angle H(e^{j2\pi/5})\right) \quad (12)$$

$$= 10 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) \quad (13)$$

$$= 20 + 10\cos\left(\frac{2\pi n}{5} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (14)$$

Άσκηση 2.
Σύμφωνα με την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης, θα είναι

$$y[n] = 5H(e^{j0}) + 3|H(e^{j\pi/2})|\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{3} + \angle H(e^{j\pi/2})\right) \quad (15)$$

με

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j2\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j\omega}(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = je^{-j\omega}\sin(\omega) \quad (16)$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$y_{ss}[n] = 3\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \quad (17)$$

και $y_{tr}[n] = 0$, αφού δεν υπάρχει μεταβατική απόκριση σε αυτήν την περίπτωση. Για είσοδο

$$x[n] = \left[5 + 3\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right]u[n] \quad (18)$$

θα έχουμε παρουσία και των δυο αποκρίσεων. Αφού η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-2] \quad (19)$$

έχει τελευταίο μη μηδενικό δείγμα για $M = 2$, τότε η μεταβατική απόκριση θα εξαφανίζεται για $n \geq M = 2$, οπότε θα είναι μη μηδενική για $n = 0, n = 1$. Θέτοντας τη σχέση της $x[n]$ στην εξίσωση διαφορών παίρνουμε

$$y[n] = \frac{1}{2}\left[5 + 3\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right]u[n] - \frac{1}{2}\left[5 + 3\cos\left(\frac{\pi(n-2)}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right]u[n-2] \quad (20)$$

$$= \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{3}\right)u[n] - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi(n-2)}{2} + \frac{\pi}{3}\right)u[n-2] + \frac{5}{2}\delta[n] + \frac{5}{2}\delta[n-1] \quad (21)$$

από την οποία έχουμε

$$y_{ss}[n] = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi(n-2)}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \quad (22)$$

$$y_{tr}[n] = \frac{5}{2}\delta[n] + \frac{5}{2}\delta[n-1] \quad (23)$$

Άσκηση 3.

(α') Είναι

$$x[2n+1] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})e^{j\omega}\Big|_{\omega=\omega/2} = X(e^{j\omega/2})e^{j\omega/2} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega/2}}e^{j\omega/2} \tag{24}$$

(β') Είναι

$$e^{j\pi n/2}x[n+2] \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F\{e^{j\pi n/2}\} * F\{x[n+2]\} = \frac{1}{2\pi}2\pi\delta(\omega-\pi/2) * X(e^{j\omega})e^{j2\omega} \tag{25}$$

$$= X(e^{j(\omega-\pi/2)})e^{j(2\omega-\pi)} = \frac{e^{j(2\omega-\pi)}}{1-jae^{-j\omega}} \tag{26}$$

(γ') Είναι

$$x[-2n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega})\Big|_{\omega=\omega/2} = \frac{1}{1-ae^{j\omega/2}} \tag{27}$$

(δ') Είναι

$$x[n]\cos(\pi n/4) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega}) * \Big(\pi\delta(\omega-\pi/4)+\pi\delta(\omega+\pi/4)\Big) = \frac{1}{2}X(e^{j(\omega-\pi/4)}) + \frac{1}{2}X(e^{j(\omega+\pi/4)}) \tag{28}$$

$$= \frac{1-a\cos(\pi/4)e^{-j\omega}}{1-2a\cos(\pi/4)e^{-j\omega}+a^2e^{-j2\omega}} \tag{29}$$

(ε') Είναι

$$x[n] * x[n-1] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})X(e^{j\omega})e^{-j\omega} = \frac{1}{1-2ae^{-j\omega}+a^2e^{-j2\omega}}e^{-j\omega} \tag{30}$$

(ϛ') Είναι

$$x[n] * x[-n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})X(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\frac{1}{1-ae^{j\omega}} = \frac{1}{1-2a\cos(\omega)+a^2} \tag{31}$$

Άσκηση 4.

Το σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n] - \delta[n] \tag{32}$$

με μετασχ. Fourier ως

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{j\omega}} - 1 \tag{33}$$

το οποίο γράφεται ως

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{4}e^{j\omega}+1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{j\omega})} - 1 = \frac{2-\frac{1}{4}(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{j\omega})} - 1 \tag{34}$$

$$= \frac{2-\frac{1}{2}\cos(\omega)}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1-\frac{1}{4}e^{j\omega})} - 1 = \frac{2-\frac{1}{2}\cos(\omega)}{|1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}|^2} - 1 \tag{35}$$

$$= \frac{2-\frac{1}{2}\cos(\omega)}{(1-\frac{1}{4}\cos(\omega))^2+(\frac{1}{4}\sin(\omega))^2} - 1 = \frac{2-\frac{1}{2}\cos(\omega)}{(\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos(\omega))} - 1 \tag{36}$$

$$= \frac{2-\frac{1}{2}\cos(\omega)}{(\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos(\omega))} - \frac{\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos(\omega)}{\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos(\omega)} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos(\omega)} \tag{37}$$

Άσκηση 5.
Θα είναι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-3e^{j\omega}} \tag{38}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{39}$$

και άρα

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-3e^{-j\omega}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{A}{1-3e^{-j\omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{40}$$

με

$$A = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\Big|_{e^{-j\omega}=1/3} = \frac{6}{5} \tag{41}$$

$$B = \frac{1}{1-3e^{-j\omega}}\Big|_{e^{-j\omega}=2} = -\frac{1}{5} \tag{42}$$

Οπότε

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{\frac{6}{5}}{1-3e^{-j\omega}} - \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{43}$$

το οποίο με χρήση πινάκων δίνει

$$y[n] = -\frac{6}{5}3^n u[-n-1] - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{44}$$

Άσκηση 6.

(α΄) Έχουμε ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=0} = F\{nx[n]\}\Big|_{\omega=0} = j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} \tag{45}$$

και

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=0} = X(e^{j0}) \tag{46}$$

Συνολικά

$$c = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]} = \frac{j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\Big|_{\omega=0}}{X(e^{j0})} \tag{47}$$

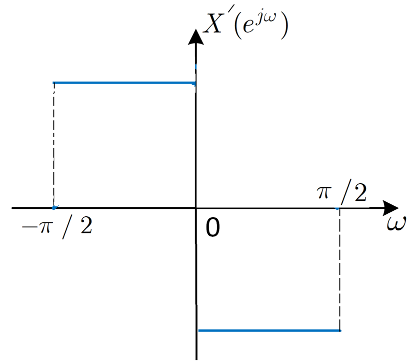
(β΄) Προφανώς $X(e^{j0}) = 1$. Η παράγωγος στο $\omega = 0$ δεν ορίζεται. Πρέπει να βρούμε το σήμα $nx[n]$. Η παράγωγος του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 3. Το πλάτος των παλμών είναι $\pm 2/\pi$ και καθένας από αυτούς αποτελεί ένα μετατοπισμένο χαμηλοπερατό φίλτρο γύρω από τις συχνότητες $\pm\pi/4$. Ξέρουμε ότι

$$y[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\Big(\frac{\omega_c}{\pi}n\Big) \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{48}$$

Οπότε η παράγωγος του μετασχηματισμού γράφεται ως

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \frac{2}{\pi}Y(e^{j(\omega+\frac{\pi}{4})}) - \frac{2}{\pi}Y(e^{j(\omega-\frac{\pi}{4})}) \tag{49}$$

$$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = j\frac{2}{\pi}Y(e^{j(\omega+\frac{\pi}{4})}) - j\frac{2}{\pi}Y(e^{j(\omega-\frac{\pi}{4})}) \tag{50}$$



Σχήμα 3: *Σχήμα Άσκησης 6.*

και στο πεδίο του χρόνου

$$\begin{aligned} nx[n] &= \frac{2j}{\pi}\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}\mathrm{sinc}\Big(\frac{n}{4}\Big)e^{-j\pi n/4} - \frac{2j}{\pi}\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}\mathrm{sinc}\Big(\frac{n}{4}\Big)e^{j\pi n/4} && (51)\\ &= \frac{j}{2\pi}\mathrm{sinc}\Big(\frac{n}{4}\Big)(e^{-j\pi n/4} - e^{j\pi n/4}) && (52)\\ &= \frac{j}{2\pi}\mathrm{sinc}\Big(\frac{n}{4}\Big)\Big(-2j\sin\Big(\frac{\pi n}{4}\Big)\Big) && (53)\\ &= \frac{1}{\pi}\mathrm{sinc}\Big(\frac{n}{4}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) && (54) \end{aligned}$$

Ζητούμε το

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n] \tag{55}$$

Το σήμα $z[n] = nx[n]$ είναι περιττό, αφού $z[n] = -z[-n]$. Το άθροισμα περιττού σήματος σε συμμετρικό διάστημα είναι πάντα μηδέν, δηλ.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z[n] = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\Big(\frac{n}{4}\Big)\sin\Big(\frac{\pi n}{4}\Big) = 0 \tag{56}$$

Άρα το κέντρο βαρύτητας θα είναι

$$c = \frac{0}{1} = 0 \tag{57}$$