ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκοντες: Γ. Καφεντζής - Γ. Στυλιανού

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 4/10/2019 Ημερομηνία Παράδοσης: 11/10/2019

Άσκηση 1. Θα είναι

$$
\begin{aligned}
y[n] &= h[n] * x[n] && (1)\\
&= h[n] * x[n] * \delta[n] && (2)\\
&= h[n] * x[n] * (u[n] - u[n-1]) && (3)\\
&= \Big[(h[n] * u[n]) - (h[n] * u[n-1])\Big] * x[n] && (4)\\
&= (s[n] - s[n-1]) * x[n] && (5)\\
&= s[n] * x[n] - s[n-1] * x[n] && (6)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 2.

i. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
h[n] &= h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) && (7)\\
&= \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[n-2] * \Big(\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n-2]\Big) && (8)\\
&= \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[n-2] * \Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] && (9)
\end{aligned}
$$

ii. Από την παραπάνω σχέση

$$
\begin{aligned}
h[n] &= \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[n-2] * \Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] && (10)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1/3)^k u[k-2] (1/2)^{n-k} u[n-k] && (11)\\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=2}^{n} (-1/3)^k (1/2)^{-k} && (12)\\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=2}^{n} (-2/3)^k, \;\; n \geq 2 && (13)\\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \Big[\frac{(-2/3)^2 - (-2/3)^{n+1}}{1-(-2/3)}\Big], \;\; n \geq 2 && (14)\\
&= \frac{4}{9}\frac{3}{5}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - \frac{3}{5}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big(\frac{-2}{3}\Big)^{n+1}, \;\; n \geq 2 && (15)\\
&= \frac{4}{9}\frac{3}{5}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + \frac{6}{15}\Big(\frac{-1}{3}\Big)^n, \;\; n \geq 2 && (16)\\
&= \Big[\frac{4}{15}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + \frac{6}{15}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big] u[n-2] && (17)
\end{aligned}
$$

Άσκηση 3.

i. $y[n] = |x[n]|$:

- Γραμμικότητα: για είσοδο $ax_1[n]$ η έξοδος θα είναι $|ax_1[n]| = |a||x_1[n]| \neq ay_1[n]$, άρα δεν είναι ομογενές, και άρα δεν είναι και γραμμικό.
- Ευσταθές: αν $|x[n]| < B_x$, προφανώς $|y[n]| = |x[n]| < B_x$. Το σύστημα είναι ευσταθές.
- Αιτιατότητα: το σύστημα είναι αιτιατό γιατί δεν απαιτούνται μελλοντικές τιμές για τον υπολογισμό της εξόδου.
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x[n - n_0]$ η έξοδος είναι $|x[n - n_0]| = y[n - n_0]$, και άρα το σύστημα είναι Χ.Α.
- Δυναμικότητα: το σύστημα δεν απαιτεί μνήμη, άρα δεν είναι δυναμικό.

ii. $y[n] = nx[n + 1] + x[n]$:

- Γραμμικότητα: για είσοδο $ax_1[n]$ η έξοδος θα είναι $nax_1[n + 1] + ax_1[n] = a(nx_1[n + 1] + x_1[n]) = ay_1[n]$, ενώ για είσοδο $bx_2[n]$ η έξοδος θα είναι $nbx_2[n+1] + bx_2[n] = b(nx_2[n+1] + x_2[n]) = by_2[n]$. Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ θα έχουμε έξοδο $y[n] = n(ax_1[n + 1] + bx_2[n + 1]) + ax_1[n] + bx_2[n] = nax_1[n + 1] + ax_1[n] + nbx_2[n + 1] + bx_2[n] = ay_1[n] + by_2[n]$, οπότε είναι γραμμικό.
- Ευσταθές: αν $|x[n]| < B_x$, προφανώς $|y[n]| = |nx_1[n+1]+x_1[n]| \leq |nx_1[n+1]|+|x_1[n]| < |n|B_x+B_x$. Για μεγάλα n, η έξοδος δε φράσσεται από πραγματικό αριθμό, οπότε το σύστημα είναι ασταθές.
- Αιτιατότητα: το σύστημα είναι μη αιτιατό γιατί απαιτούνται μελλοντικές τιμές για τον υπολογισμό της εξόδου.
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x[n-n_0]$ η έξοδος είναι $nx[n-n_0+1]+x[n-n_0]$. Καθυστερούμε την έξοδο κατά n_0, και έχουμε $y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0+1]+x[n-n_0] \neq nx[n-n_0+1]+x[n-n_0]$. Άρα το σύστημα δεν είναι Χ.Α.
- Δυναμικότητα: το σύστημα απαιτεί μνήμη, άρα είναι δυναμικό.

iii. $y[n] = x[n] \cos(\omega_0 n)$:

- Γραμμικότητα: για είσοδο $ax_1[n]$ η έξοδος θα είναι $ax_1[n] \cos(\omega_0 n) = ay_1[n]$, ενώ για είσοδο $bx_2[n]$ η έξοδος θα είναι $bx_2[n] \cos(\omega_0 n) = by_2[n]$. Για είσοδο $ax_1[n]+bx_2[n]$ θα έχουμε έξοδο $y[n] = (ax_1[n]+ bx_2[n]) \cos(\omega_0 n) = ax_1[n] \cos(\omega_0 n) + bx_2[n] \cos(\omega_0 n) = ay_1[n] + by_2[n]$, οπότε είναι γραμμικό.
- Ευσταθές: αν $|x[n]| < B_x$, προφανώς $|y[n]| = |x[n] \cos(\omega_0 n)| = |x[n]|| \cos(\omega_0 n)| \leq |x[n]| < B_x$. Το σύστημα είναι ευσταθές.
- Αιτιατότητα: το σύστημα είναι αιτιατό γιατί δεν απαιτούνται μελλοντικές τιμές για τον υπολογισμό της εξόδου.
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x[n - n_0]$ η έξοδος είναι $x[n - n_0] \cos(\omega_0 n)$. Καθυστερούμε την έξοδο κατά n_0, και έχουμε $y[n - n_0] = x[n - n_0] \cos(\omega_0 (n - n_0)) \neq x[n - n_0] \cos(\omega_0 n)$. Άρα το σύστημα δεν είναι Χ.Α.
- Δυναμικότητα: το σύστημα δεν απαιτεί μνήμη, άρα δεν είναι δυναμικό.

Άσκηση 4. Έχουμε:

i.

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1/2)^k u[k] 2^{n-k} u[n-k] \tag{18}$$

$$= 2^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1/2)^k u[k] 2^{-k} u[n-k] = 2^n \sum_{k=0}^{n} (1/2)^k 2^{-k} \tag{19}$$

$$= 2^n \sum_{k=0}^{n} (1/4)^k = 2^n \frac{1-(1/4)^{n+1}}{3/4}, \;\; n \geq 0 \tag{20}$$

$$= \frac{4}{3} 2^n - \frac{4}{3} 2^n (1/4)^n, \;\; n \geq 0 \tag{21}$$

$$= \frac{2}{3}\Big[2^{n+1} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+1}\Big] u[n] \tag{22}$$

ii.

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[-k] (1/2)^{n-k} u[n-k] \tag{23}$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[-k] (1/2)^{-k} u[n-k] \tag{24}$$

Ισχύει

$$u[-k] = \begin{cases} 1, & -k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{25}$$

και

$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{26}$$

Διαχωρίζουμε τις περιπτώσεις $n \geq 0$, $n \leq -1$.

- $n \geq 0$: Είναι

$$c[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[-k] (1/2)^{-k} u[n-k] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-\infty}^{0} (1/2)^{-k} \tag{27}$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-\infty}^{0} 2^k \tag{28}$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{+\infty} (1/2)^k = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \frac{1}{1-(1/2)} = 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n, \;\; n \geq 0 \tag{29}$$

- $n \leq -1$: Είναι

$$c[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[-k] (1/2)^{-k} u[n-k] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-\infty}^{n} (1/2)^{-k} \tag{30}$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-n}^{+\infty} (1/2)^k = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \frac{\Big(\frac{1}{2}\Big)^{-n}}{\frac{1}{2}} = 2, \;\; n \leq -1 \tag{31}$$

Οπότε συνολικά

$$c[n] = 2u[-n-1] + 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] \tag{32}$$

Άσκηση 5. Πρώτα θα βρούμε την απόκριση μηδενικής εισόδου. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\gamma - \frac{1}{9} = 0 \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{6} \tag{33}$$

Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c_1 \Big(\frac{1}{9}\Big)^n, \;\; n \geq 0 \tag{34}$$

Βρίσκουμε το c_1 από τις αρχικές συνθήκες ως

$$y[-1] = 1 \Longleftrightarrow 9c_1 = 1 \Longleftrightarrow c_1 = \frac{1}{9} \tag{35}$$

οπότε

$$y_{zi}[n] = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} u[n] \tag{36}$$

Πριν την απόκριση μηδενικής κατάστασης, πρέπει να βρούμε την κρουστική αποκριση $h[n]$. Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{9}x[n-1] = x[n] \tag{37}$$

Έχουμε ότι η κρουστική απόκριση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών είναι

$$h_0[n] - \frac{1}{9}h_0[n-1] = \delta[n] \tag{38}$$

Η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_0[n] = d_1\left(\frac{1}{9}\right)^n \tag{39}$$

Για $n = 0$ έχουμε

$$h_0[0] - \frac{1}{9}h_0[-1] = 1 \Longrightarrow h_0[0] = 1 \tag{40}$$

Οπότε

$$h_0[n] = \left(\frac{1}{9}\right)^n u[n] \tag{41}$$

και η ζητούμενη κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = 6h_0[n] = 6\left(\frac{1}{9}\right)^n u[n] \tag{42}$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης μέσω της πράξης της συνέλιξης. Είναι

$$y_{zs}[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 6\left(\frac{1}{9}\right)^k u[k]\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k-1] \tag{43}$$

$$= 6\left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k u[k]u[n-k-1] \tag{44}$$

$$= 6\left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k \tag{45}$$

αφού

$$u[k]u[n-k-1] = 1, \quad 0 \le k \le n-1 \tag{46}$$

κι άρα

$$y_{zs}[n] = 6\left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{54}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^n \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right], \;\; n \ge 1 \tag{47}$$

δηλ.

$$y_{zs}[n] = \frac{54}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^n \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] u[n-1] \tag{48}$$

Η συνολική έξοδος θα είναι

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} u[n] + \frac{54}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^n \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right] u[n-1] \tag{49}$$

Το σύστημα ειναι ευσταθές, αφού η χαρακτηριστική ριζα του είναι μικρότερη της μονάδας. Εναλλακτικά, η κρουστική του απόκριση είναι απολύτως αθροισιμη, αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{k=0}^{+\infty} 6\left(\frac{1}{9}\right)^n = 6\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{54}{8} < +\infty \tag{50}$$