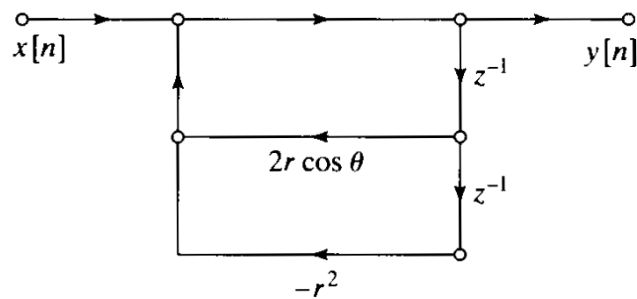


ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

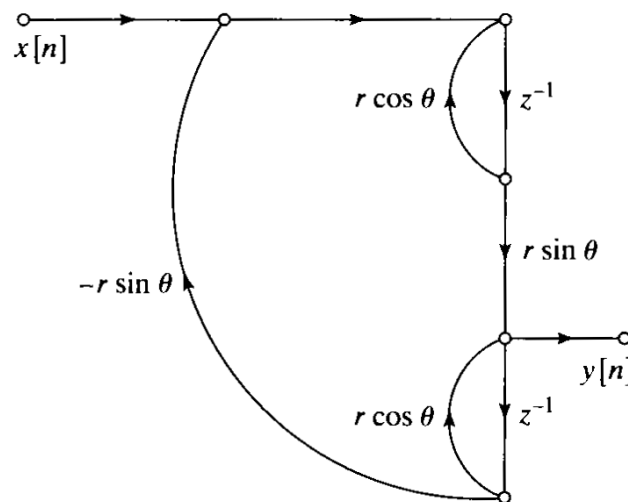
Τρίτο Φροντιστήριο

1. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς των δυο παρακάτω γράφων (Σχήμα. 1) και δείξτε ότι έχουν τους ίδιους πόλους.



Network 1

(a)



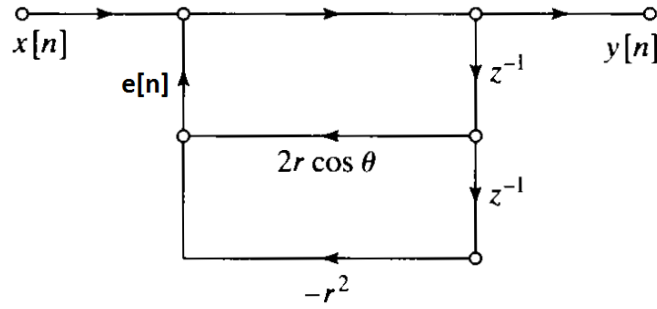
Network 2

(b)

Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1

Λύση:

Για τον πρώτο γραφο, μπορούμε να βρούμε το σύστημα πηγαίνοντας από το χώρο του χρόνου σε αυτόν της συχνότητας. Θέτοντας $e[n]$ στο δεύτερο κόμβο (εκεί όπου υπάρχουν δυο είσοδοι και μια έξοδος), θα έχουμε το Σχήμα 2. Άρα θα έχουμε



Network 1

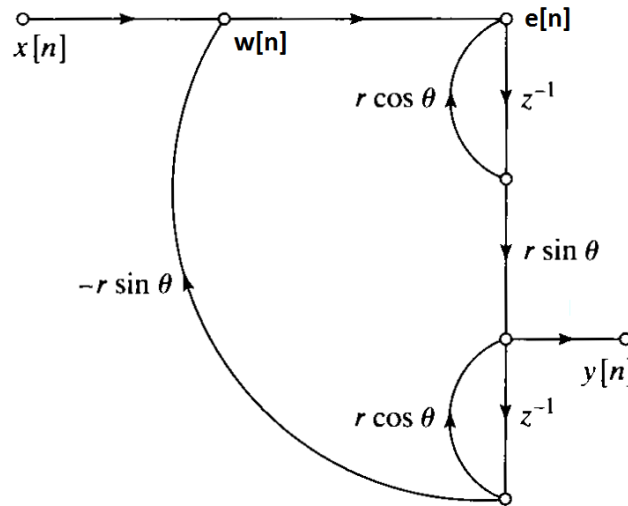
Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 1α - επιπλέον μεταβλητές

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] + e[n] \\
 e[n] &= 2r \cos(\theta) w[n-1] - r^2 w[n-2] \\
 y[n] &= x[n] + e[n] = x[n] + 2r \cos(\theta) w[n-1] - r^2 w[n-2] \\
 &= x[n] + 2r \cos(\theta) y[n-1] - r^2 y[n-2]
 \end{aligned} \tag{1}$$

Αν κάνουμε μετ. Ζ στην τελευταία σχέση, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= X(z) + 2r \cos(\theta) Y(z) z^{-1} - r^2 Y(z) z^{-2} \\
 Y(z)(1 - 2r \cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}) &= X(z) \\
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2r \cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Για το δευτερο δίκτυο-γράφο, βάζοντας μεταβλητές στους ενδιάμεσους κόμβους (εκεί που υπάρχουν δυο εισοδοι και μια έξοδος), όπως στο Σχήμα 3, θα έχουμε:



Network 2

Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 1β - επιπλέον μεταβλητές

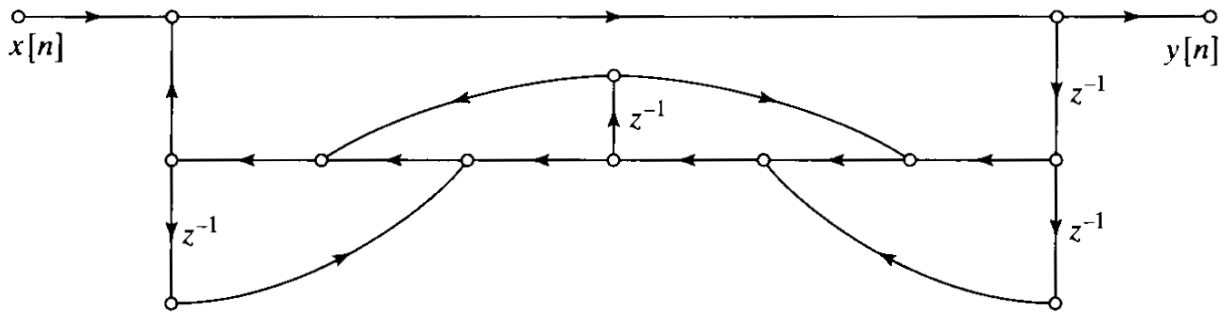
$$\begin{aligned}
 w[n] &= x[n] - r \sin(\theta) y[n-1] \\
 e[n] &= w[n] + r \cos(\theta) e[n-1] \\
 y[n] &= r \sin(\theta) e[n-1] + r \cos(\theta) y[n-1]
 \end{aligned} \tag{3}$$

Κάνοντας μετ. Ζ στις παραπάνω σχέσεις, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 W(z) &= X(z) - r \sin(\theta) z^{-1} Y(z) \\
 E(z) &= W(z) + r \cos(\theta) z^{-1} E(z) \\
 Y(z) &= r \sin(\theta) z^{-1} E(z) + r \cos(\theta) z^{-1} Y(z) \Leftrightarrow \\
 Y(z)(1 - r \cos(\theta) z^{-1}) &= r \sin(\theta) z^{-1} E(z) \Leftrightarrow \\
 Y(z)(1 - r \cos(\theta) z^{-1}) &= \frac{r \sin(\theta) z^{-1}}{1 - r \cos(\theta) z^{-1}} W(z) \Leftrightarrow \\
 Y(z)(1 - r \cos(\theta) z^{-1})^2 &= r \sin(\theta) z^{-1} (X(z) - r \sin(\theta) z^{-1} Y(z)) \Leftrightarrow \\
 Y(z)(1 - r \cos(\theta) z^{-1})^2 &= r \sin(\theta) z^{-1} X(z) - r^2 \sin^2(\theta) z^{-2} Y(z) \Leftrightarrow \\
 Y(z)(1 - r \cos(\theta) z^{-1})^2 + r^2 \sin^2(\theta) z^{-2} Y(z) &= r \sin(\theta) z^{-1} X(z) \Leftrightarrow \\
 Y(z)(1 - 2r \cos(\theta) z^{-1} + r^2 \cos^2(\theta) z^{-2} + r^2 \sin^2(\theta) z^{-2}) &= r \sin(\theta) z^{-1} X(z) \Leftrightarrow \\
 Y(z)(1 - 2r \cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}) &= r \sin(\theta) z^{-1} X(z) \Leftrightarrow \\
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{r \sin(\theta) z^{-1}}{1 - 2r \cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (4)
 \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο.

2. Ο γραφος του Σχήματος 4 αναπαριστά μια γραμμική εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές. Βρεί-

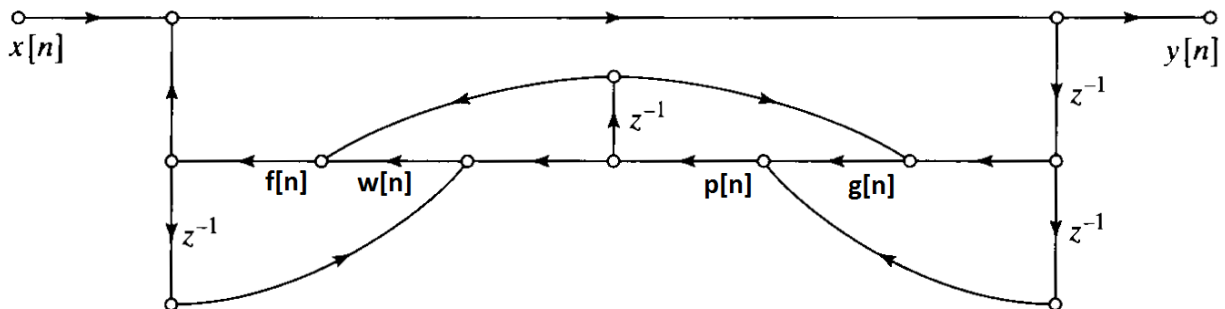


Σχήμα 4: Σχήμα Άσκησης 2

τε την εξίσωση διαφορών που περιγράφεται από τον γράφο.

Λύση:

Βάζοντας επιπλέον μεταβλητές στο σχήμα, όπου χρειάζεται, καταλήγουμε στο Σχήμα 5. Οπότε θα είναι



Σχήμα 5: Σχήμα Άσκησης 2 - επιπλέον μεταβλητές

$$\begin{aligned}
y[n] &= f[n] + x[n] \\
g[n] &= y[n-1] + p[n-1] \\
p[n] &= g[n] + y[n-2] \\
w[n] &= p[n] + f[n-1] \\
f[n] &= w[n] + p[n-1]
\end{aligned}$$

στις οποίες αν κάνουμε μετασχ. Z, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
Y(z) &= F(z) + X(z) \\
G(z) &= z^{-1}Y(z) + z^{-1}P(z) \\
P(z) &= G(z) + z^{-2}Y(z) \\
W(z) &= P(z) + z^{-1}F(z) \\
F(z) &= W(z) + z^{-1}P(z)
\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
Y(z) &= F(z) + X(z) \\
G(z) &= z^{-1}Y(z) + z^{-1}(G(z) + z^{-2}Y(z)) = z^{-1}Y(z) + z^{-1}G(z) + z^{-3}Y(z) \\
&= \frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z) \\
F(z) &= W(z) + z^{-1}P(z) = G(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}F(z) + z^{-1}(G(z) + z^{-2}Y(z)) \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \left(G(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}G(z) + z^{-3}Y(z) \right) \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \left(\frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1} \frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z) + z^{-3}Y(z) \right) \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z)
\end{aligned} \tag{5}$$

και άρα τελικά από την εξίσωση (5), είναι

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z) + X(z) \\
\frac{1 - 3z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}Y(z) &= X(z) \\
(1 - 3z^{-1} - z^{-2} - z^{-3})Y(z) &= (1 - 2z^{-1} + z^{-2})X(z) \leftrightarrow \\
y[n] - 3y[n-1] - y[n-2] - y[n-3] &= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]
\end{aligned} \tag{6}$$

που είναι και η ζητούμενη σχέση.

3. Έστω ο γράφος του Σχήματος 6.

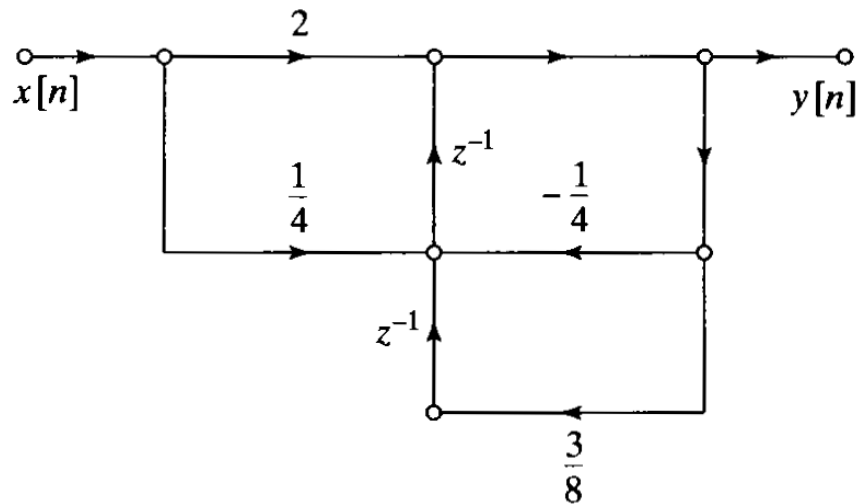
(α) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που απεικονίζει ο γράφος.

(β) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που ικανοποιείται από την είσοδο $x[n]$ και την έξοδο $y[n]$.

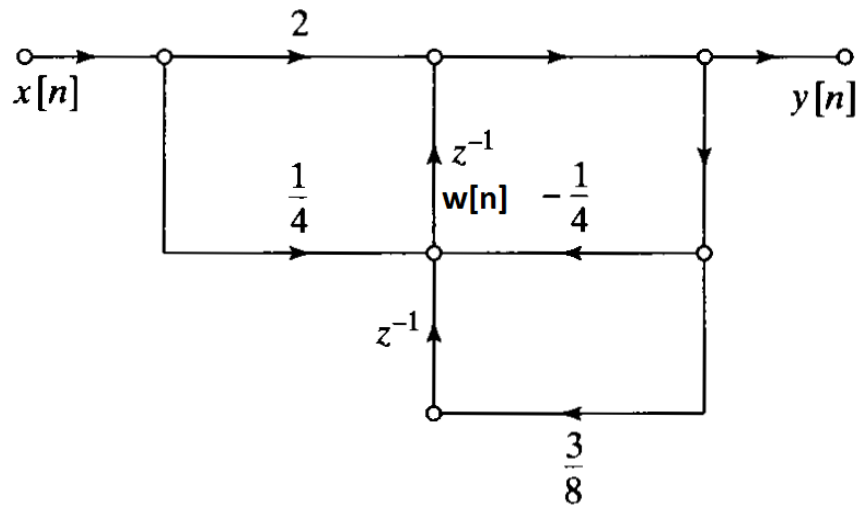
Λύση:

(α) Βάζοντας μια μεταβλητή στον κεντρικό κόμβο, καταλήγουμε στο Σχήμα 7. Θα έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
y[n] &= 2x[n] + w[n-1] \\
w[n] &= \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}y[n] + \frac{3}{8}y[n-1]
\end{aligned}$$



Σχήμα 6: Σχήμα Άσκησης 3



Σχήμα 7: Σχήμα Άσκησης 3 - επιπλέον μεταβλητές

τα οποία και δίνουν μετασχ. Ζ τους παρακάτω

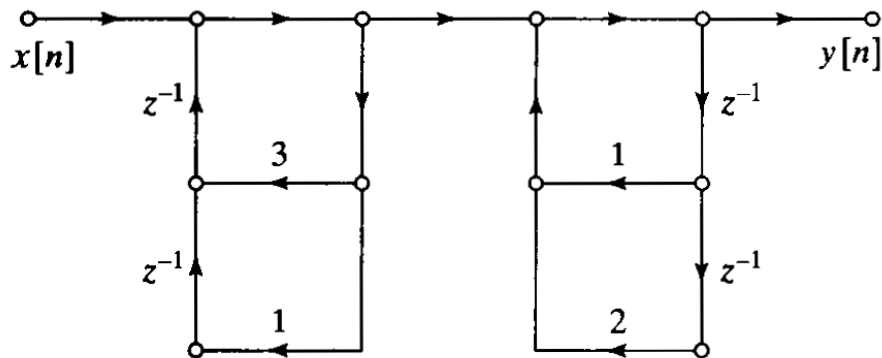
$$\begin{aligned}
 W(z) &= \frac{1}{4}X(z) - \frac{1}{4}Y(z) + \frac{3}{8}z^{-1}Y(z) \\
 Y(z) &= 2X(z) + z^{-1}W(z) = 2X(z) + z^{-1}\left(\frac{1}{4}X(z) - \frac{1}{4}Y(z) + \frac{3}{8}z^{-1}Y(z)\right) \\
 &= 2X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}X(z) - \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{3}{8}z^{-2}Y(z) \\
 Y(z)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right) &= \left(2 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z) \Leftrightarrow \\
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(2 + \frac{1}{4}z^{-1})}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{7}$$

(β) Η εξίσωση διαφορών δίνεται πολύ απλά από το $H(z)$:

$$\begin{aligned}
 Y(z)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right) &= \left(2 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z) \Leftrightarrow \\
 y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] &= 2x[n] + \frac{1}{4}x[n-1]
 \end{aligned} \tag{8}$$

που είναι και το ζητούμενο.

4. Ένα ΓΧΑ σύστημα υλοποιείται από τον γραφο του Σχήματος 8.

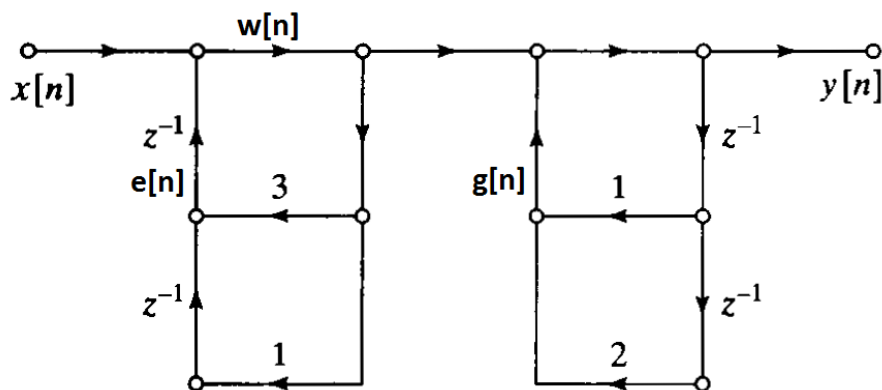


Σχήμα 8: Σχήμα Άσκησης 4

- (α) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που σχετίζει την είσοδο $x[n]$ και την έξοδο $y[n]$ του γράφου αυτού.
 (β) Ποιά είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος;
 (γ) Πόσοι πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις απαιτούνται για τον υπολογισμό της εξόδου; (θεωρούμε ότι οι πολλαπλασιασμοί με τη μονάδα δε προσμετρούνται)
 (δ) Η υλοποίηση του σχήματος 8 απαιτεί 4 καταχωρητές (στοιχεία καθυστέρησης). Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσετε λιγότερους καταχωρητές, με χρήση διαφορετικής δομής; Αν ναι, σχεδιάστε τη δομή, αν όχι, εξηγήστε γιατί δεν μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των καταχωρητών.

Λύση:

- (α) Βάζοντας επιπλέον μεταβλητές στους απαραίτητους κόμβους, καταλήγουμε στο Σχήμα 9. Προσέξτε, ΔΕΝ είναι δομή Direct Form II!! Οπότε οι εξισώσεις είναι



Σχήμα 9: Σχήμα Άσκησης 4 - επιπλέον μεταβλητές

$$\begin{aligned} y[n] &= g[n] + w[n] \\ w[n] &= x[n] + e[n - 1] \\ e[n] &= 3w[n] + w[n - 1] \\ g[n] &= y[n - 1] + 2y[n - 2] \end{aligned}$$

οι οποίες δίνουν μετ. Ζ ως

$$Y(z) = G(z) + W(z) \quad (9)$$

$$W(z) = X(z) + z^{-1}E(z)$$

$$E(z) = 3W(z) + z^{-1}W(z) \Leftrightarrow E(z) = \frac{3 + z^{-1}}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z)$$

$$G(z) = z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) \quad (10)$$

και σύμφωνα με τη σχέση (9) και αντικαθιστώντας, θα είναι

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z) + W(z) = z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) + X(z) + z^{-1}E(z) \\ &= z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) + X(z) + z^{-1}\frac{3 + z^{-1}}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z) \\ &= z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) + X(z) + \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z) \\ Y(z) - z^{-1}Y(z) - 2z^{-2}Y(z) &= X(z) + \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z) \\ Y(z) - z^{-1}Y(z) - 2z^{-2}Y(z) &= \frac{1}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z) \end{aligned}$$

και τελικά

$$\begin{aligned} Y(z) - 4z^{-1}Y(z) + 7z^{-3}Y(z) + 2z^{-4}Y(z) &= X(z) \Leftrightarrow \\ y[n] - 4y[n-1] + 7y[n-3] + 2y[n-4] &= x[n] \end{aligned} \quad (11)$$

(β) Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συστήματος δίνεται από

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + 7z^{-3} + 2z^{-4}} \quad (12)$$

(γ) Από το σχήμα, απαιτούνται 4 προσθέσεις και 2 πολλαπλασιασμοί.

(δ) Δεν είναι δυνατό να μειωθεί ο αριθμός των καταχωρητών. Απαιτούνται το λιγότερο τέσσερις καταχωρητές για ένα σύστημα 4ης τάξης. Ακόμα και η μετατροπή σε Direct Form II απαιτεί επίσης τέσσερις καταχωρητές.

5. Έστω $x[n]$ και $y[n]$ οι ακολουθίες που σχετίζονται με την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{4}x[n]$$

Σχεδιάστε τον Direct Form II γράφο για το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφει αυτήν την εξίσωση διαφορών.

Λύση:

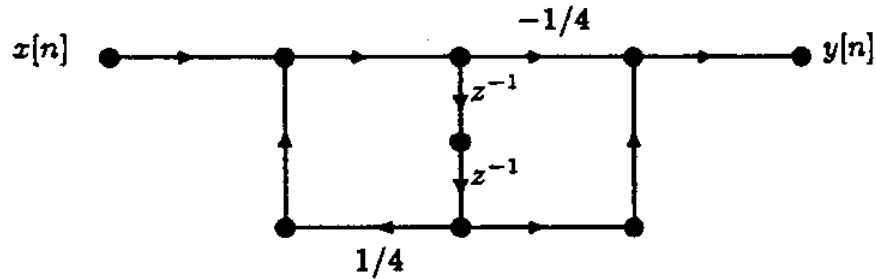
Η εξίσωση διαφορών γράφεται ως

$$\begin{aligned} y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] &= x[n-2] - \frac{1}{4}x[n] \Leftrightarrow \\ Y(z) - \frac{1}{4}Y(z)z^{-2} &= X(z)z^{-2} - \frac{1}{4}X(z) \Leftrightarrow \\ Y(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-2}) &= X(z)(z^{-2} - \frac{1}{4}) \Leftrightarrow \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-\frac{1}{4} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \end{aligned} \quad (13)$$

που είναι της μορφής

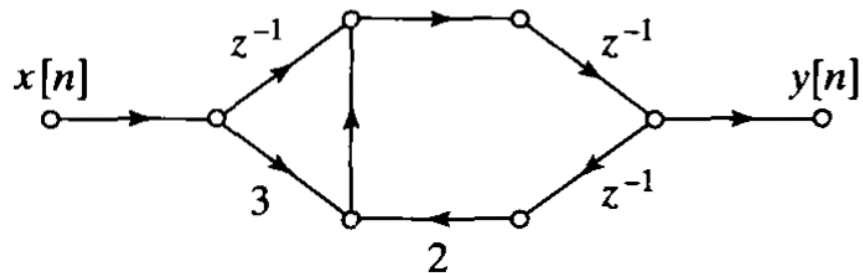
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

και άρα ευκολα σχεδιάζουμε τον Direct Form II γράφο όπως στο Σχήμα 10. που είναι και το ζητούμενο.



Σχήμα 10: Σχήμα Άσκησης 5

6. Έστω ο γράφος του Σχήματος 11. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και την εξίσωση

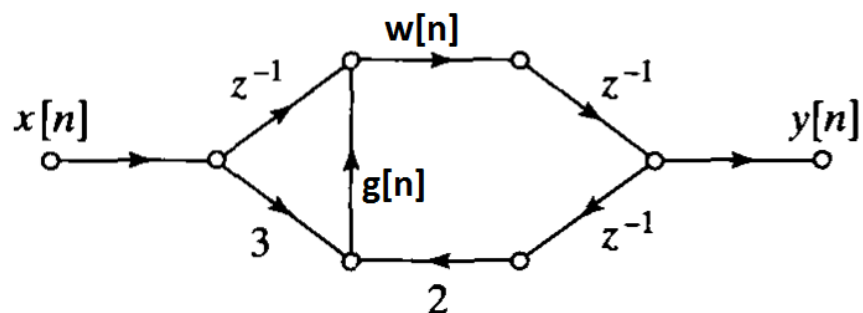


Σχήμα 11: Σχήμα Άσκησης 6

διαφορών που ικανοποιεί αυτό το γράφο.

Λύση:

Εισάγοντας επιπλέον μεταβλητές, θα έχουμε το γραφο Άρα θα έχουμε



Σχήμα 12: Σχήμα Άσκησης 6 - επιπλέον μεταβλητές

$$\begin{aligned}
 w[n] &= g[n] + x[n-1] \\
 g[n] &= 3x[n] + 2y[n-1] \\
 y[n] &= w[n-1]
 \end{aligned}$$

οι οποίες δίνουν μετ. Z

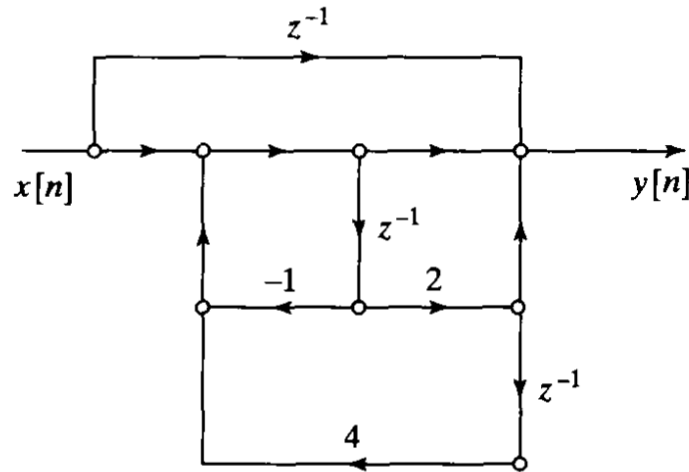
$$\begin{aligned}
 W(z) &= G(z) + z^{-1}X(z) \\
 G(z) &= 3X(z) + 2z^{-1}Y(z) \\
 Y(z) &= W(z)z^{-1} = G(z)z^{-1} + X(z)z^{-2} = 3X(z)z^{-1} + 2z^{-2}Y(z) + X(z)z^{-2} \\
 Y(z)(1 - 2z^{-2}) &= X(z)(3z^{-1} + z^{-2}) \\
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{14}$$

και εύκολα από την παραπάνω σχέση, έχουμε

$$y[n] - 2y[n-2] = 3x[n-1] + x[n-2] \tag{15}$$

που είναι και το ζητούμενο.

7. Έστω ο γράφος του Σχήματος 13 που αντιπροσωπεύει ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα.



Σχήμα 13: Σχήμα Άσκησης 7

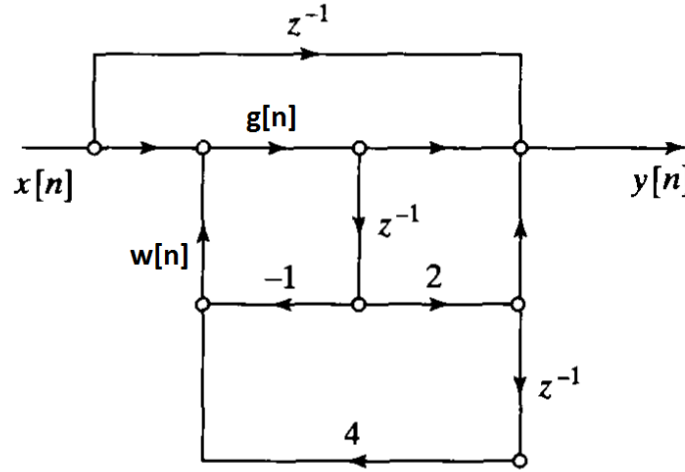
(α) Βρείτε την εξίσωση διαφορών που αντιστοιχεί σε αυτόν το γράφο.

(β) Βρείτε το $h[1]$.

Λύση:

(α) Βάζοντας επιπλέον μεταβλητές στο σχήμα, καταλήγουμε στο Σχήμα 14. Οι εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν το σύστημα είναι οι

$$\begin{aligned}
 g[n] &= w[n] + x[n] \\
 y[n] &= x[n-1] + g[n] + 2g[n-1] \\
 w[n] &= 8g[n-2] - g[n-1]
 \end{aligned}$$



Σχήμα 14: Σχήμα Άσκησης 7 - επιπλέον μεταβλητές

οι οποίες δίνουν μετ. Z

$$\begin{aligned}
 G(z) &= W(z) + X(z) \\
 W(z) &= 8G(z)z^{-2} - G(z)z^{-1} = 8(W(z) + X(z))z^{-2} - (W(z) + X(z))z^{-1} \\
 &= 8W(z)z^{-2} + 8X(z)z^{-2} - W(z)z^{-1} - X(z)z^{-1} \\
 W(z) &= \frac{-z^{-1} + 8z^{-2}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}}X(z) \\
 Y(z) &= z^{-1}X(z) + G(z) + 2G(z)z^{-1} \\
 &= z^{-1}X(z) + W(z) + X(z) + 2z^{-1}(W(z) + X(z)) \\
 &= X(z)(1 + 3z^{-1}) + W(z)(1 + 2z^{-1}) \\
 &= X(z)(1 + 3z^{-1}) + \frac{-z^{-1} + 8z^{-2}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}}X(z)(1 + 2z^{-1}) \\
 &= X(z) \frac{(1 + 3z^{-1})(1 + z^{-1} - 8z^{-2}) + (-z^{-1} + 8z^{-2})(1 + 2z^{-1})}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}} \\
 &= X(z) \frac{1 + z^{-1} - 8z^{-2} + 3z^{-1} + 3z^{-2} - 24z^{-3} - z^{-1} - 2z^{-2} + 8z^{-2} + 16z^{-3}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}} \\
 &= X(z) \frac{1 + 3z^{-1} + z^{-2} - 8z^{-3}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}}
 \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
 Y(z)(1 + z^{-1} - 8z^{-2}) &= X(z)(1 + 3z^{-1} + z^{-2} - 8z^{-3}) \Leftrightarrow \\
 y[n] + y[n-1] - 8y[n-2] &= x[n] + 3x[n-1] + x[n-2] - 8x[n-3] \quad (16)
 \end{aligned}$$

(β) Από την παραπάνω εξίσωση διαφορών, και δεδομένου ότι το σύστημα είναι αιτιατό, δηλαδή $h[n] = 0$, $n < 0$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 h[n] + h[n-1] - 8h[n-2] &= \delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2] - 8\delta[n-3] \\
 h[0] &= 1 \\
 h[1] + 1 &= 3 \Leftrightarrow h[1] = 2 \quad (17)
 \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο.

8. Έστω ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ και συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{z(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

- (α) Σχεδιάστε το γραφο μορφής Direct Form II για το παραπάνω σύστημα.
 (β) Σχεδιάστε τον transposed γράφο του ερωτήματος α).

Λύση:

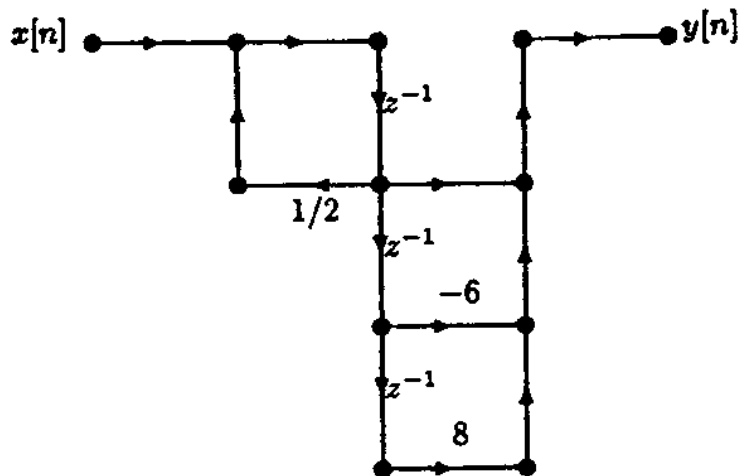
- (α) Το σύστημα $H(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{z^{-1}(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{z^{-1} - 6z^{-2} + 8z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

που είναι της μορφής

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

Άρα κατ' ευθείαν μπορούμε να σχεδιάσουμε το γραφο, σύμφωνα με τη θεωρία. Ο γράφος φαίνεται στο Σχήμα 15.



Σχήμα 15: Σχήμα Άσκησης 8α

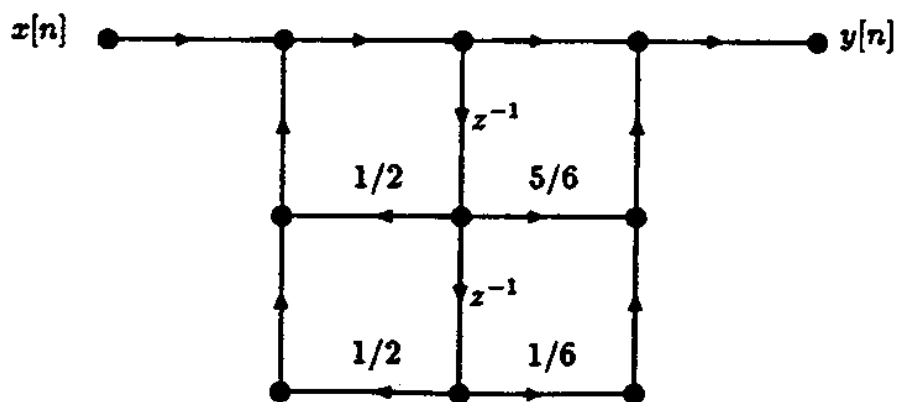
- (β) Για να σχεδιάσουμε τον transposed γράφο, αντιστρέφουμε τη φορά των βελών στο γράφο, και αλλάζουμε θέση την είσοδο με την έξοδο. Άρα ο ζητούμενος γράφος φαίνεται στο Σχήμα 16.

9. Σχεδιάστε τον Direct Form I γράφο του συστήματος

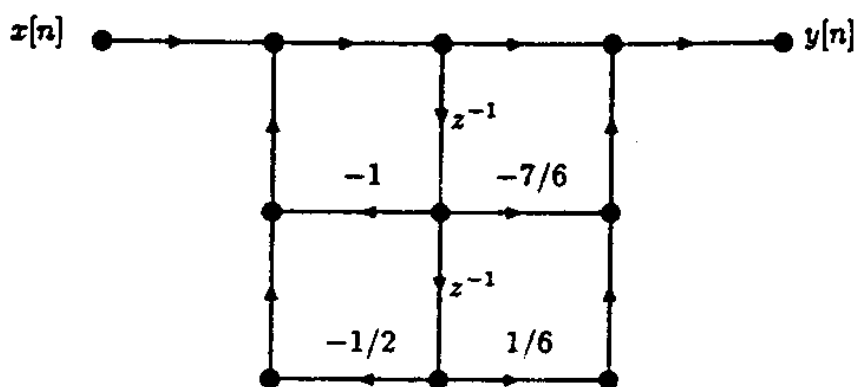
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Λύση:

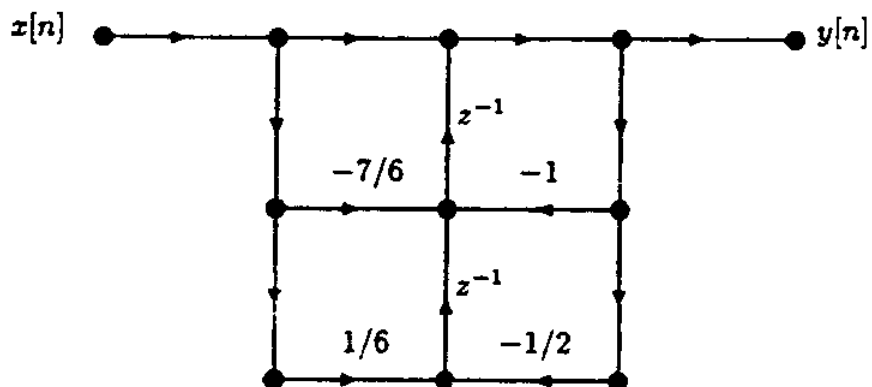
Το σύστημα είναι ήδη στη μορφή $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$, άρα μπορούμε κατ' ευθείαν να σχεδιάσουμε τον Direct Form I γράφο, όπως στο Σχήμα 17.



Σχήμα 18: Σχήμα Άσκησης 10



Σχήμα 19: Σχήμα Άσκησης 11-I



Σχήμα 20: Σχήμα Άσκησης 11-II