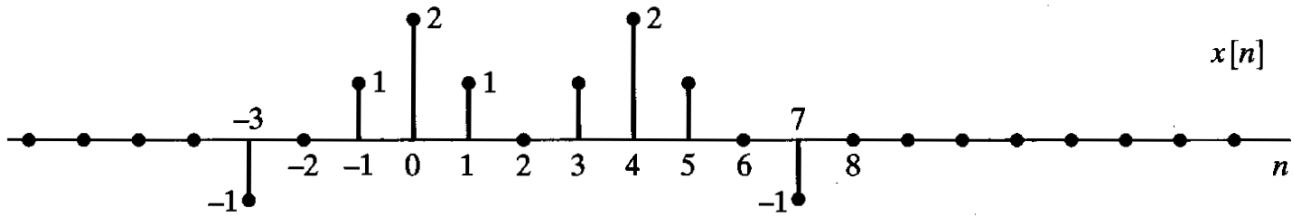


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2019
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Πρώτο Φροντιστήριο

1. Έστω $X(e^{j\omega})$ ο μετασχ. Fourier του $x[n]$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1

Βρείτε τα παρακάτω, ΧΩΡΙΣ να υπολογίσετε ρητά τον $X(e^{j\omega})$.

- (α) $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$
- (β) $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$
- (γ) $\angle X(e^{j\omega})$
- (δ) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$
- (ε) Βρείτε και σχεδιάστε το σήμα που έχει μετασχ. Fourier τον $X(e^{-j\omega})$
- (ζ) Βρείτε και σχεδιάστε το σήμα που έχει μετασχ. Fourier τον $\Re\{X(e^{j\omega})\}$

Λύση:

$$(α) X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sum_{n=-3}^7 x[n]e^{-j\omega n}|_{\omega=0} = \sum_{n=-3}^7 x[n] = 6$$

$$(β) X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-3}^7 x[n]e^{-j\omega n}|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-3}^7 x[n]e^{-j\pi n} = \sum_{n=-3}^7 x[n](-1)^n = 2$$

(γ) Το σήμα στο χρόνο είναι συμμετρικό ως προς $n = 2$. Αν ήταν συμμετρικό ως προς $n = 0$ (δηλ. άρτιο), η φάση του θα ήταν μηδεν. Έστω $y[n]$ αυτό το σήμα, με $x[n] = y[n - 2]$. Λόγω όμως της μετατόπισης κατά $n_0 = 2$ δεξιά, ο μετ. Fourier θα είναι $X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$, και άρα η φάση θα είναι $\arg[X(e^{j\omega})] = -2\omega$.

$$(δ) \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega 0} d\omega = 2\pi x[0] = 4\pi.$$

(ε) Ψάχνουμε ένα $y[n]$ που έχει μετασχ. Fourier τον $X(e^{-j\omega})$. Είναι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} \quad (1)$$

Άρα $y[n] = x[-n]$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2α'.

(γ) Δείξαμε προηγουμένως στο γ) ερώτημα ότι

$$X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega} \quad (2)$$

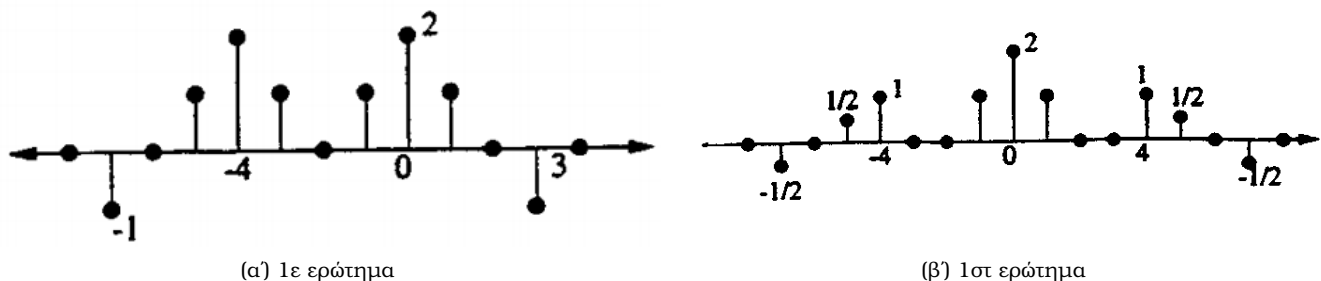
με $Y(e^{j\omega})$ το μετασχ. Fourier του σήματος $y[n]$, που είπαμε ότι είναι συμμετρικό ως προς $n = 0$. Άρα

$$\Re\{X(e^{j\omega})\} = X_R(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})\cos(2\omega) = \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) \quad (3)$$

Παίρνοντας αντίστροφο μετασχ. Fourier, θα έχουμε

$$F^{-1}\{\Re\{X(e^{j\omega})\}\} = \frac{1}{2}y[n+2] + \frac{1}{2}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n+4] + \frac{1}{2}x[n] \quad (4)$$

και το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2β'.



Σχήμα 2: Σχήματα Άσκησης 1

2. Θεωρήστε το παρακάτω ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j(\omega - \frac{\pi}{6})} \left(\frac{1 + e^{-j2\omega} + 2e^{-j4\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}} \right), \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad (5)$$

Βρείτε την έξοδο $y[n]$ για κάθε n αν η είσοδος για κάθε n είναι

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \quad (6)$$

Λύση: Είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} e^{j\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1 + e^{-j2\omega} + 2e^{-j4\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}} \right). \quad (7)$$

Επίσης,

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi n}{2}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi n}{2}} \quad (8)$$

και ξέρουμε ότι συναρτήσεις της μορφής $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος, έτσι ώστε $y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$. Άρα αρκεί να υπολογίσουμε τα $H(e^{j\frac{\pi}{2}})$, $H(e^{-j\frac{\pi}{2}})$. Έχουμε λοιπόν,

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1 + e^{-j\pi} + 2e^{-j2\pi}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\pi}} \right), \quad (9)$$

όπως ξέρουμε όμως $e^{-j\pi} = -1$ και $e^{-j2\pi} = 1$. Επομένως,

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = 4e^{-j\frac{\pi}{3}}. \quad (10)$$

Όμοια,

$$H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) = 4e^{j\frac{2\pi}{3}} = -4e^{-j\frac{\pi}{3}}. \quad (11)$$

Άρα θα είναι:

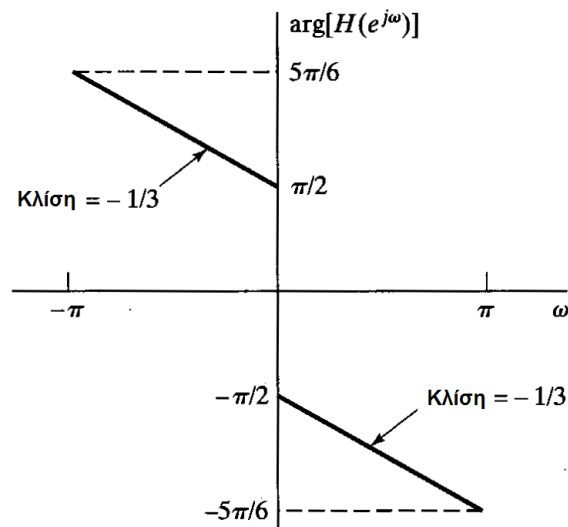
$$\begin{aligned} y[n] &= H(e^{j\frac{\pi}{2}}) \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi n}{2}} + H(e^{-j\frac{\pi}{2}}) \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi n}{2}} = 4e^{-j\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi n}{2}} - 4e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{\pi n}{2}} \\ &= 2e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j\frac{\pi n}{2}} - 2e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{-j\frac{\pi n}{2}} = 2e^{-j\frac{\pi}{3}} (e^{j\frac{\pi n}{2}} - e^{-j\frac{\pi n}{2}}) \\ &= 2e^{-j\frac{\pi}{3}} 2j \sin \frac{\pi n}{2} \\ &= 4e^{j\frac{\pi}{6}} \sin \frac{\pi n}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

3. Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με $|H(e^{j\omega})| = 1$ και έστω ότι το πρωτεύων όρισμα της φάσης, $\arg[H(e^{j\omega})]$, είναι όπως στο Σχήμα 3. Αν η είσοδος είναι

$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi n}{2} + \frac{\pi}{8}\right), \quad (13)$$

βρείτε την έξοδο $y[n]$.

Hint: Ένα ΓΧΑ μπορεί να γραφεί ως $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j \arg[H(e^{j\omega})]}$



Σχήμα 3: Πρωτεύων όρισμα φάσης - Άσκηση 3

Λύση :

Παρατηρούμε ότι $H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$, άρα ισχύει ότι η έξοδος είναι της μορφής

$$y[n] = |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \theta + \angle H(e^{j\omega_0}))$$

Έχουμε $|H(e^{j\omega_0})| = 1$ και $\angle H(e^{j\omega_0}) = H(e^{j\frac{5\pi n}{2}}) = H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3}$. Άρα τελικά

$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi n}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi n}{2} - \frac{13\pi}{4}\right) \quad (14)$$

4. Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n] \quad (15)$$

Βρείτε την απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response), $y_{ss}[n]$, δηλ. την απόκριση $y[n]$ για $n \rightarrow \infty$, για είσοδο

$$x[n] = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) u[n] \quad (16)$$

Hint: Σχεδιάστε το $\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)$

Λύση :

Έχουμε $\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n u[n]$. Επομένως,

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{j}{2}\right)^k u[k](-1)^{n-k} u[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{j}{2}\right)^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{j}{2}\right)^k (-1)^n (-1)^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{j}{2}\right)^k (-1)^n (-1)^k = (-1)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{j}{2}\right)^k (-1)^k \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{-j}{2}\right)^k \\ &= (-1)^n \frac{1 - \left(\frac{-j}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{j}{2}} \end{aligned} \quad (17)$$

Όταν $n \rightarrow +\infty$, $\left(\frac{-j}{2}\right)^{n+1} \rightarrow 0$. Άρα,

$$y_{ss}[n] = (-1)^n \frac{1}{1 + \frac{j}{2}}. \quad (18)$$

5. Ένα σήμα διακριτού χρόνου έχει μετασχ. Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \alpha e^{j\omega})}, \quad |\alpha| < 1 \quad (19)$$

(α) Βρείτε το σήμα $x[n]$

(β) Υπολογίστε το $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cos(2\omega) d\omega$

Λύση:

(α) Πρέπει να κάνουμε Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα (αλλά το πολυώνυμο του παρονομαστή έχει αρνητικούς και θετικούς εκθέτες).

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \alpha e^{j\omega})} = \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(e^{-j\omega} - \alpha)e^{j\omega}} \\ &= \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(e^{-j\omega} - \alpha)} e^{-j\omega} \doteq G(e^{j\omega}) e^{-j\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x[n] = g[n - 1]. \end{aligned} \quad (20)$$

Αρκεί να βρούμε το $g[n]$ από το $G(e^{j\omega})$, με Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα. Είναι

$$G(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{e^{-j\omega} - \alpha} \quad (21)$$

με

$$\begin{aligned} A &= G(e^{j\omega})(1 - \alpha e^{-j\omega})|_{e^{-j\omega}=\frac{1}{\alpha}} = \frac{1 - \alpha^2}{\frac{1}{\alpha} - \alpha} = \frac{1 - \alpha^2}{\frac{1 - \alpha^2}{\alpha}} = \alpha \\ B &= G(e^{j\omega})(e^{-j\omega} - \alpha)|_{e^{-j\omega}=\alpha} = \frac{1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} = 1 \end{aligned} \quad (22)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{1}{e^{-j\omega} - \alpha} \right) e^{-j\omega} = \left(\frac{\alpha e^{-j\omega}}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{e^{-j\omega}}{e^{-j\omega} - \alpha} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \alpha e^{-j\omega} + \frac{1}{1 - \alpha e^{j\omega}} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

και γυρνώντας πίσω στο χρόνο

$$x[n] = \alpha \alpha^{n-1} u[n-1] + \alpha^{-n} u[-n] \quad (24)$$

$$= \alpha^n u[n-1] + \alpha^{-n} u[-n] \quad (25)$$

$$= \alpha^{|n|} \quad (26)$$

(β) Έχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cos(2\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \frac{1}{2} e^{j2\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \frac{1}{2} e^{-j2\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2} x[2] + \frac{1}{2} x[-2] = \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \\ &= \alpha^2 \end{aligned} \quad (27)$$

6. Θεωρείστε το ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ και κρουστική απόκριση $h[n]$.

(α) Σας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία :

- i. Το σύστημα είναι αντιαιτιατό
- ii. $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$
- iii. Ο μετασχ. Fourier της ακολουθίας $h[n-1]$ είναι πραγματικός

Από τα παραπάνω στοιχεία, δείξτε ότι το σύστημα έχει πεπερασμένης διάρκειας κρουστική απόκριση $h[n]$ και συγκεκριμένα ότι η διάρκεια αυτή είναι ίση με $N = 3$.

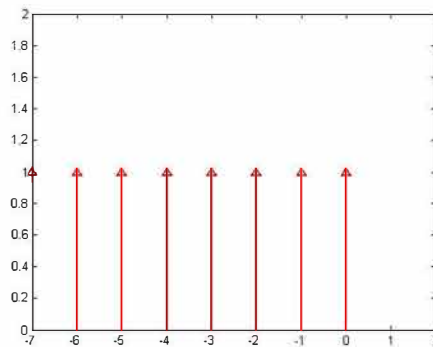
(β) Επιπρόσθετα, σας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία :

- i. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 2$
- ii. $H(e^{j\pi}) = 0$

Υπάρχει αρκετή πληροφορία για να καθορίσετε μοναδικά το σύστημα. Αν ναι, βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$. Αν όχι, εξηγήστε.

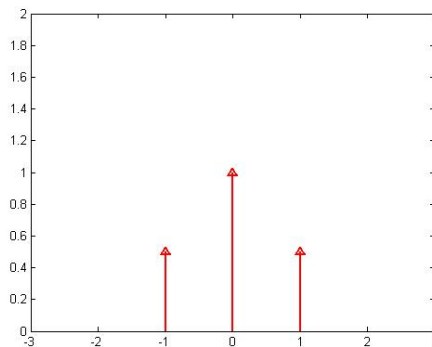
Λύση :

(α) i. Αφού είναι αντι-αιτιατό, το $h[n]$ θα έχει μορφή όπως στο Σχήμα 4.



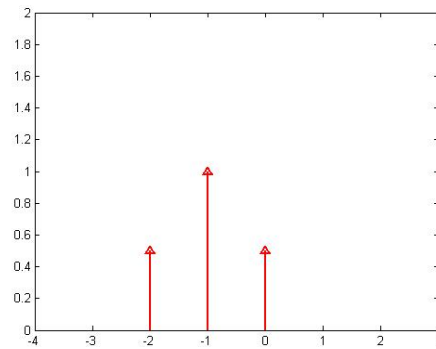
Σχήμα 4: $h[n]$

- ii. $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega}) \implies h[n]$ πραγματικό.
- iii. $F\{h[n-1]\} \in \mathbb{R}$, άρα $h[n-1]$ συμμετρικό ως προς y'/y , δηλαδή είναι άρτιο σήμα, όπως στο Σχήμα 5. Από τα παραπάνω έχουμε ότι αφού $h[n-1]$ συμμετρικό, τότε $h[-2] = h[0]$ λόγω συμμετρίας. Συμπεραίνουμε ότι το $h[n]$ έχει την μορφή του Σχήματος 6.



Σχήμα 5: $h[n-1]$

Άρα το σήμα μας έχει διάρκεια $N = 3$.

Σχήμα 6: $h[n]$

(β)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) d\omega = 2 \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega 0} d\omega = h[0] = 2. \quad (28)$$

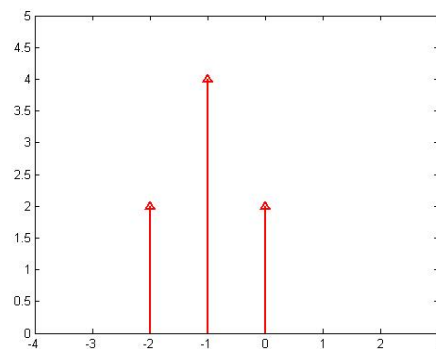
Άρα

$$h[-2] = h[0] = 2. \quad (29)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} H(e^{j\pi}) = 0 &\iff h[-2]e^{j2\pi} + h[-1]e^{j\pi} + h[0]e^{j0} = 0 \\ &\iff 2 * 1 + (-1)h[-1] + 2 * 1 = 0 \\ &\iff h[-1] = 4 \end{aligned} \quad (30)$$

Άρα τελικά το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 7.

Σχήμα 7: $h[n]$

7. Ένα σύστημα έχει μια πραγματική και αιτιατή μοναδιαία απόκριση $h[n]$.

(α) Δείξτε ότι μπορεί να υπολογιστεί το $h[n]$ εάν γνωρίζουμε το πραγματικό μέρος του μετ. Fourier, $H(e^{j\omega})$ του $h[n]$.

(β) Έστω ότι για ένα αιτιατό σύστημα με πραγματική μοναδιαία απόκριση, $h[n]$, έχουμε:

$$\Re\{H(e^{j\omega})\} = 1 + \cos 3\omega \quad (31)$$

Υπολογίστε τον μετ. Fourier του $h[n]$.

Λύση :

(α) Είναι

$$\Re\{H(e^{j\omega})\} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h_\alpha[n] = \frac{h[n] + h[-n]}{2} \quad (32)$$

Επειδή λόγω αιτιότητας, $h[n] = 0, n < 0$:

$$h_\alpha[n] = \begin{cases} \frac{h[-n]}{2}, & n < 0 \\ h[n], & n = 0 \\ \frac{h[n]}{2}, & n > 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ h_\alpha[n], & n = 0 \\ 2h_\alpha[n], & n > 0 \end{cases}$$

Άρα αν γνωρίζω το $\Re\{H(e^{j\omega})\}$ τότε γνωρίζω και το $h_\alpha[n]$ και από την παραπάνω σχέση μπορώ να βρω το $h[n]$.

(β) Έχουμε

$$\Re\{H(e^{j\omega})\} = 1 + \frac{e^{j3\omega}}{2} + \frac{e^{-j3\omega}}{2} \Rightarrow$$

$$h_\alpha[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n+3] + \frac{1}{2}\delta[n-3] \quad (34)$$

Άρα έχουμε ότι:

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-3] \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1 + e^{-j3\omega}. \quad (35)$$

8. Σε ένα ΓΧΑ σύστημα με μοναδιαία απόκριση $h[n]$ εμφανίζεται η είσοδος

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (36)$$

και η έξοδος του είναι

$$y[n] = (n+3) \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (37)$$

Να βρεθεί η εξίσωση διαφορών του συστήματος.

Λύση :

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad (38)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{3(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})^2} + \frac{\frac{1}{3}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})^2} + \frac{3 - \frac{2}{3}e^{-j\omega}}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})^2} \quad (39)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{(3 - \frac{2}{3}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})^2} \Rightarrow \quad (40)$$

$$y[n] - \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = 3x[n] - \frac{17}{12}x[n-1] + \frac{2}{12}x[n-2] \quad (41)$$