

## Κεφάλαιο 16

# Ο Μετασχηματισμός Z

Έχουμε δει σε προηγούμενο κεφάλαιο το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου, και το πώς χρησιμοποιείται για να μας δώσει πληροφορία για ένα διακριτό σήμα στο πεδίο της συχνότητας. Το κακό είναι ότι υπάρχουν σήματα που συναντάμε στην πράξη για τα οποία ο μετασχ. Fourier δεν υπάρχει. Τι εννοούμε “δεν υπάρχει”;

Ας ξαναμιλήσουμε λίγο για τις προϋποθέσεις ύπαρξης του Μετασχ. Fourier, που θα μας δώσουν την αφορμή για να πάμε σε κάτι διαφορετικό. Όταν λοιπόν μιλάμε για “ύπαρξη” ενός μετασχηματισμού, αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα ή το ολοκλήρωμα, ή γενικότερα η μαθηματική μορφή που τον αναπαριστά, συγκλίνει. Εν προκειμένω, υπενθυμίζεται ότι ο μετασχ. Fourier δίνεται από τον τύπο:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (16.1)$$

Για να υπάρχει λοιπόν ο μετασχ. Fourier ενός διακριτού σήματος  $x[n]$  μέσω της σύγκλισης του αθροίσματος, αρκεί να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad (16.2)$$

δηλαδή, το  $x[n]$  να είναι απολύτως αθροίσιμο<sup>1</sup>. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι αν πάρουμε τις απόλυτες τιμές των δειγμάτων του σήματος, και τις προσθέσουμε όλες μαζί, το αποτέλεσμά μας δε θα “φύγει” στο  $+\infty$  αλλά θα μας δώσει έναν αριθμό.

Για παράδειγμα, το σήμα  $x[n] = a^n u[n]$ , με  $|a| < 1$ , είναι απολύτως αθροίσιμο. Ας το δούμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} \quad (16.3)$$

αφού  $|a| < 1$ , όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις γνωστές σχέσεις για τα αθροίσματα.

Όμως για να δούμε τι συμβαίνει για το σήμα  $x[n] = a^n u[n]$ , με  $|a| > 1$  αυτή τη φορά. Για να δούμε, είναι απολύτως αθροίσιμο;

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a^n u[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} \quad (16.4)$$

μόνον αν  $|a| < 1$ . Όμως από υπόθεση έχουμε  $|a| > 1$ , άρα δεν μπορούμε να γράψουμε την τελευταία ισότητα, άρα το σήμα δεν είναι απολύτως αθροίσιμο και άρα ο Fourier του δεν υπάρχει. Ένα τέτοιο παράδειγμα σήματος είναι το  $x[n] = 2^n u[n]$ .

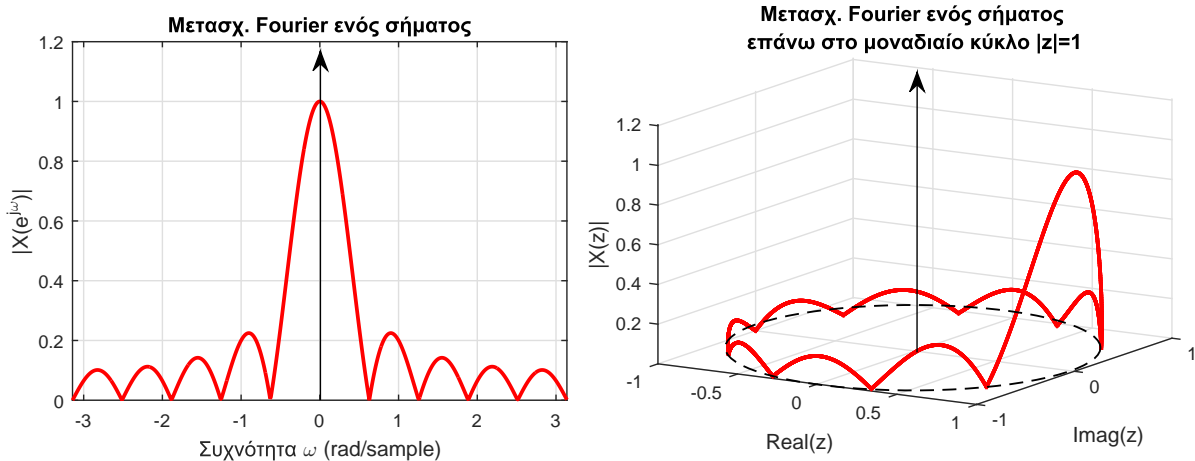
Ωραία, και τώρα τι κάνουμε; Υπάρχουν σήματα για τα οποία δεν μπορούμε να ελέγξουμε το συχνοτικό τους περιεχόμενο, απ' ό,τι φαίνεται, δηλ. που δεν μπορούμε να τα δούμε από το πεδίο της συχνότητας. Τι συμφορά! ☹ Υπάρχουν ένα σωρό σήματα στην πράξη που δεν πληρούν τη συνθήκη σύγκλισης. Τι θα κάνουμε με αυτά;;;

<sup>1</sup> Αυτή η συνθήκη είναι ικανή, αλλά όχι και αναγκαία, όπως έχουμε ήδη δει. Υπάρχουν σήματα που ΔΕΝ είναι απολύτως αθροίσιμα αλλά ο μετασχ. Fourier τους υπάρχει, όπως για παράδειγμα η βηματική συνάρτηση  $u[n]$ , αλλά τότε εμπλέκουμε γενικευμένες συναρτήσεις, όπως η συνάρτηση Δέλτα, για την εύρεση του μετασχηματισμού.

Εδώ έρχεται λοιπόν η “επέκταση” του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier, κι αυτή η “επέκταση” λέγεται **Μετασχηματισμός Z**. Με ποια έννοια είναι επέκταση; Τι ακριβώς “επεκτείνεται” και πού; Ας το δούμε.

## 16.1 Διαισθητική Προσέγγιση

Γνωρίζετε ότι ο μετασχ. Fourier  $X(e^{j\omega})$  ενός σήματος  $x[n]$  μπορεί να ιδωθεί ως μια προβολή του σήματος  $x[n]$  στο χώρο που δημιουργούν τα μιγαδικά εκθετικά σήματα  $e^{-j\omega n}$ . Επίπλέον, τα μιγαδικά αυτά εκθετικά σήματα είναι περιοδικά στη συχνότητα με περίοδο  $2\pi$ , γιατί  $e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi)n}$ . Ως συνέπεια αυτού, έχουμε δει ότι το φάσμα  $X(e^{j\omega})$  ενός σήματος διακριτού χρόνου  $x[n]$  είναι περιοδικό με περίοδο  $2\pi$ . Άρα λοιπόν θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Fourier ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο ενός μιγαδικού επιπέδου, αφού αποτελείται από άθροισμα συναρτήσεων  $e^{-j\omega n_0}$ , που η καθεμία έχει “συντελεστή”  $x[n_0]$ . Όταν βλέπουμε λοιπόν ένα φάσμα ενός σήματος διακριτού χρόνου, ουσιαστικά αυτό που βλέπουμε ορίζεται πάνω σε αυτόν τον κύκλο, επαναλαμβάνοντας μια πλήρη “στροφή” του κύκλου - και άρα “βλέποντας” το ίδιο κομμάτι του φάσματος - κάθε  $2\pi$ . Απλά η γραφική του παράσταση γινόταν σε ένα διδιάστατο επίπεδο πλάτους - συχνότητας ή φάσης - συχνότητας, όπως έχουμε δει ήδη, για λόγους ευκολίας<sup>2</sup>. Το Σχήμα 16.1 δείχνει πως είναι πραγματικά το φάσμα ενός διακριτού σήματος στο μιγαδικό χώρο (εδώ, το φάσμα είναι πραγματική συνάρτηση του  $\omega$ , για ευκολία σχεδίασης). Παρατηρήστε ότι ορίζουμε το



Σχήμα 16.1: Φάσμα σήματος στο μιγαδικό επίπεδο.

περιοδικό φάσμα ως τιμές μιας συνάρτησης που ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Η “επέκταση” λοιπόν που συζητάμε είναι ο ορισμός ενός (ή περισσότερων) φάσματος πάνω και σε άλλους κύκλους του μιγαδικού επιπέδου, και όχι μόνο στο μοναδιαίο, όπως γίνεται στον μετασχ. Fourier! Πώς μπορεί να γίνει κάτι τέτοιο; Μα φυσικά, χρησιμοποιώντας εκθετικά της μορφής  $z = re^{j\omega}$  αντί των απλών  $e^{j\omega}$ , τα οποία ορίζονται πάνω σε κύκλους ακτίνας  $r$ !!

Ας το δούμε στην πράξη. Μιλήσαμε πριν για το σήμα

$$x[n] = 2^n u[n] \quad (16.5)$$

και είδαμε ότι δεν έχει μετασχ. Fourier. Όμως ξέρουμε ότι

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (16.6)$$

για  $|a| < 1$ . Πώς θα μπορούσαμε να κάνουμε το προαναφερθέν  $x[n]$  να έχει μετασχ. Fourier; Μα φυσικά αν κάπως “μετατρέπαμε” αυτό το  $2^n$  σε κάτι (μικρότερο της μονάδας)<sup>n</sup>, ώστε να καταλήξουμε στην περίπτωση της Σχέσης (16.6). Έστω λοιπόν ότι διαιρούμε αυτό το  $2^n$  με έναν αριθμό  $r^n > 2^n$ , με  $r > 0$  και πραγματικό, ώστε να μπορεί να γίνει μετασχηματισμός (sic) κατά Fourier. Έτσι θα είναι

$$\left(\frac{2}{r}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{r} e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{r} e^{-j\omega}} \quad (16.7)$$

<sup>2</sup>Σας θυμίζει κάτι; Μήπως κάτι παρόμοιο κάναμε όταν πήγαμε από το μετασχ. Fourier στο μετασχ. Laplace στα σήματα συνεχούς χρόνου;!!! ☺

με  $r > 2$ . Πώς όμως το παραπάνω αποτέλεσμα σχετίζεται με το σήμα που προσπαθούμε να αναλύσουμε; Εδώ αξίζει να κάνουμε μια παύση: η σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{r}\right)^n u[n] e^{-j\omega n} \quad (16.8)$$

μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n r^{-n} u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n u[n] r^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n u[n] (re^{j\omega})^{-n} \quad (16.9)$$

Όμως αυτή η σχέση είναι ουσιαστικά ένας ντεμί-μετασχηματισμός  $\odot$ Fourier του αρχικού μας σήματος, όχι επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, αλλά σε έναν κύκλο ακτίνας  $r$ , με  $r > 2$ !! Έτσι, το σήμα μας αναλύεται σε μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής  $z = re^{j\omega}$ , αντί των  $z = e^{j\omega}$  του μετασχ. Fourier. Άρα μόνο στην περιοχή  $r > 2$  του μιγαδικού επιπέδου μπορούμε να ορίσουμε αυτόν το νέο μετασχηματισμό. Όμως η μεταβλητή  $r$  είναι η ακτίνα του κύκλου που βρίσκονται τα εκθετικά αυτά, οπότε αποτελεί το μέτρο των εκθετικών αυτών. Μπορούμε δηλαδή να πούμε ισοδύναμα ότι η περιοχή αυτή είναι η  $|z| > 2$ . Με άλλα λόγια, μπορούμε να διαλέξουμε οποιοδήποτε κύκλο ακτίνας  $|z| > 2$  (άρα έχουμε άπειρες επιλογές) για να μετασχηματίσουμε το σήμα μας! Το σύνολο των κύκλων αυτών, πάνω στους οποίους ορίζεται ο νέος μας μετασχηματισμός ονομάζεται **Πεδίο Σύγκλισης - Region of Convergence - ROC**.

Έτσι, ο μετασχηματισμός που αναλύει σήματα διακριτού χρόνου σε κύκλους ακτίνας  $r > 0$  του μιγαδικού επιπέδου που ορίζονται από μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής  $re^{j\omega}$ , λέγεται **Μετασχηματισμός Z** και ορίζεται ως:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad (16.10)$$

με  $z = re^{j\omega}$ , και ο αντίστροφός του ορίζεται ως:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (16.11)$$

Ο τελευταίος πρόκειται για επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο, και θα αναφερθούμε σε αυτόν αργότερα. Στην πράξη, θα χρησιμοποιούμε άλλες μεθόδους για να πηγαίνουμε από τον χώρο του μετασχ. Z στο χώρο του χρόνου.

Με την ευκαιρία, δείτε την ομοιότητά του με τον μετασχηματισμό Fourier:

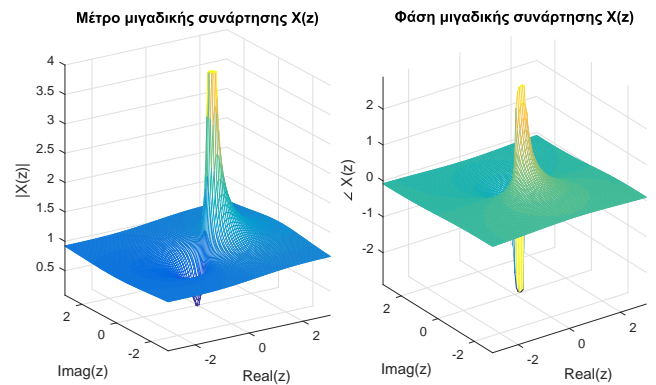
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (16.12)$$

Ουσιαστικά δηλαδή, αν στον ορισμό του μετασχ. Z θέσουμε  $z = e^{j\omega}$ , θα πάρουμε τον μετασχ. Fourier, δηλ. ο μετασχ. Fourier είναι η “έκδοση” του μετασχ. Z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο! Καθόλου περίεργο, με βάση όσα είπαμε, όμως τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά - θα δούμε κάποιες σημαντικές λεπτομέρειες αργότερα...

Παρατηρήστε ότι ο μετασχ. Z είναι μια τετραδιάστατη συνάρτηση ( $z : \mathbb{C} \rightarrow X(z) : \mathbb{C}$ ), και άρα εν γένει δεν μπορούμε να τον σχεδιάσουμε στο χαρτί. Μπορούμε όμως να σχεδιάσουμε το μέτρο του,  $|X(z)| = |X(re^{j\omega})|$ , και τη φάση του,  $\angle X(z) = \angle X(re^{j\omega})$ , για διάφορα  $r$ , ως τριδιάστατες συναρτήσεις του  $z$ . Μάλιστα, μια τέτοια σχεδίαση θα μας δώσει ένα διαισθητικό πλεονέκτημα στη συμπεριφορά του μετασχ. Z σε σχέση με το μετασχ. Fourier.

Ας δούμε πως μοιάζουν το μέτρο και η φάση μιας μιγαδικής συνάρτησης  $X(z)$ , χωρίς αυτή να συνδέεται με το μετασχ. Z. Έστω λοιπόν η συνάρτηση

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \quad (16.13)$$



Σχήμα 16.2: Μέτρο και φάση μιγαδικής συνάρτησης  $X(z)$ .

για  $a = 0.5$ . Ας βρούμε τις τιμές του πλάτους και της φάσης της σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 16.2.

Όμως είδαμε νωρίτερα ότι ο μετασχ.  $Z$  έχει κάποιους περιορισμούς στο χώρο του μιγαδικού επιπέδου που μπορούμε να τον ορίσουμε. Για το σήμα  $x[n] = 2^n u[n]$ , ο περιορισμός ήταν  $|z| > 2$ , και το αναφέραμε ως Πεδίο Σύγκλισης. Πριν δούμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα υπολογισμού του μετασχ.  $Z$  και των γραφημάτων που προκύπτουν, ας μελετήσουμε τις συνθήκες ύπαρξης του μετασχ.  $Z$ .

## 16.2 Ύπαρξη του μετασχ. $Z$

Από τον ορισμό του μετασχ.  $Z$ , έχουμε ότι

$$Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x[n]}{z^n} \quad (16.14)$$

Η ύπαρξη του μετασχηματισμού είναι εγγυημένη αν

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x[n]}{z^n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right| < +\infty \quad (16.15)$$

για κάποιο  $z$ . Αν θεωρήσουμε ότι  $x[n] = 0$ ,  $n < 0$ , τότε το παραπάνω γράφεται

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right| < +\infty \quad (16.16)$$

Αποδεικνύεται ότι οποιοδήποτε σήμα μεγαλώνει πιο αργά από το  $r^n$ , για  $r > 0 \in \mathfrak{R}$ , δηλ.  $|x[n]| \leq r^n$ , η παραπάνω σχέση ικανοποιείται και άρα υπάρχει ο μετασχ.  $Z$  του, γιατί

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x[n]}{z^n} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{r^n}{z^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{r}{|z|} \right)^n = \frac{1}{1 - \left( \frac{r}{|z|} \right)^n} \quad (16.17)$$

για  $|z| > r$ . Έτσι, ο μετασχ.  $Z$  υπάρχει μόνο για  $|z| > r$ .

Με παρόμοιο συλλογισμό αποδεικνύεται η ύπαρξη για οποιοδήποτε σήμα  $x[n]$ . Σήματα που μεγαλώνουν πιο γρήγορα από το  $r^n$  (όπως π.χ. το  $r^{n^2}$ ) δε θα μας απασχολήσουν και στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι κάθε σήμα που συναντάμε έχει μετασχ.  $Z$ .

## 16.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα υπολογισμού του μετασχ.  $Z$  πάνω σε συνήθη σήματα, και πώς ακριβώς γίνεται αυτή η “επέκταση” σε κύκλους διαφορετικούς από το μοναδιαίο. Κι εδώ, χρήσιμες θα μας φανούν οι παρακάτω σχέσεις του Πίνακα ;;.

### Παράδειγμα 16.1:

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός  $Z$  του σήματος

$$x[n] = a^n u[n] \quad (16.18)$$

### Λύση:

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]z^{-n} \quad (16.19)$$

Επειδή η  $u[n]$ , η γνωστή βηματική συνάρτηση, είναι μη μηδενική και ίση με 1 για  $n \geq 0$ , μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

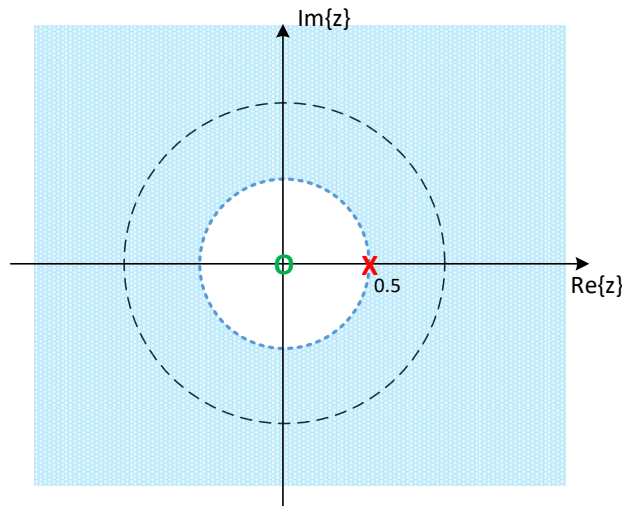
$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n \quad (16.20)$$



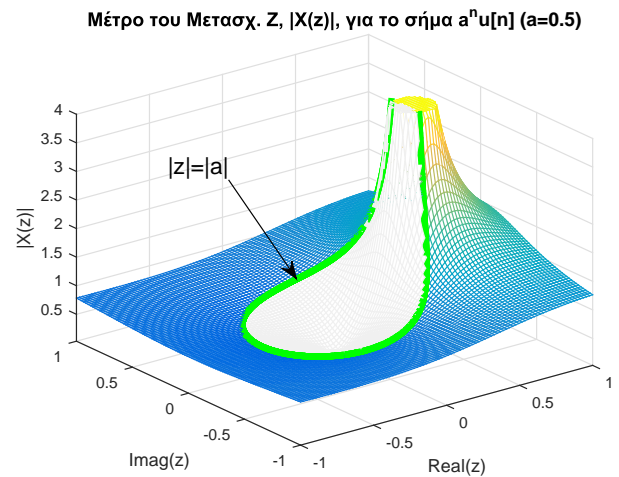
Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις σχέσεις του Πίνακα ;;. Άρα θα έχουμε:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (16.21)$$

με  $|az^{-1}| < 1 \iff |a| < |z|$ . Να λοιπόν ο χώρος του μιγαδικού επιπέδου που ορίζεται ο μετασχ. Z, δηλ. το Πεδίο Σύγκλισης. Αν το  $|a|$  είναι μικρότερο της μονάδας, ο μετασχ. Z ορίζεται σε όλους τους κύκλους εντός του μπλέ χρώματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 16.3(α) ( η θέση του  $a$  είναι τυχαία στο σχήμα και ίση με 0.5). Στο Σχήμα 16.3(β) φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Z. Παρατηρήστε ότι δεν περιλαμβάνει τις τιμές για τις οποίες



(α') Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για  $a = 0.5$



(β') Μέτρο μετασχ. Z.

Σχήμα 16.3: Μετασχηματισμός Z του σήματος  $x[n] = a^n u[n]$ : (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

$|z| < |a|$ . Η πράσινη καμπύλη ορίζει τον κύκλο  $|z| = |a|$ . Αν γράψουμε το μετασχηματισμό ως

$$X(z) = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a| \quad (16.22)$$

μπορούμε να ορίσουμε τη θέση  $z = a$  ως πόλος του μετασχηματισμού, διότι τον απειρίζει (μηδενίζει τον παρονομαστή), ενώ τη θέση  $z = 0$  ως μηδενικό του μετασχηματισμού, διότι τον μηδενίζει (μηδενίζει τον αριθμητή).

### Παράδειγμα 16.2:

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος

$$x[n] = -a^n u[-n - 1] \quad (16.23)$$

#### Λύση:

Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n - 1]z^{-n} \quad (16.24)$$

Επειδή η  $u[-n - 1]$  είναι μη μηδενική για  $n \leq -1$ , μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n \quad (16.25)$$

Εδώ που φτάσαμε, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως κάποια από τις Σχέσεις του Πίνακα ;;, γιατί τα όρια στο παραπάνω άθροισμα δεν είναι ίδια με κάποια από τις σχέσεις αυτές. Πρέπει να κάνουμε ένα βήμα ακόμα, κι

αυτό δεν είναι άλλο από το να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε  $k = -n$  και τότε το άθροισμά μας γίνεται

$$X(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = - \sum_{k=\infty}^1 (a^{-1}z)^k \quad (16.26)$$

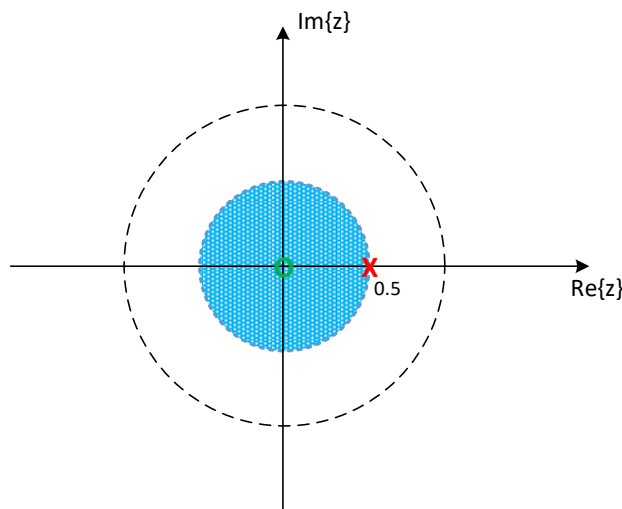
$$= - \sum_{k=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^k = - \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^k - 1 \right) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^k \quad (16.27)$$

Τώρα πλέον θα έχουμε:

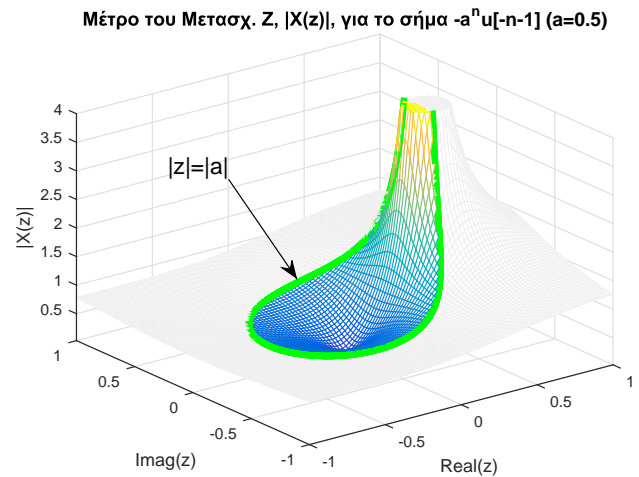
$$X(z) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^k = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1 - a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} - \frac{1}{1 - a^{-1}z} \quad (16.28)$$

$$= \frac{1 - 1 - a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = - \frac{a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (16.29)$$

με πεδίο σύγκλισης ROC  $|a^{-1}z| < 1 \iff |a| > |z|$ , άρα εδώ ορίζεται ο ΖΤ σε κύκλους οι οποίοι έχουν ακτίνα μικρότερη από  $|a|$ , όπως δείχνει το Σχήμα 16.4(α) (η θέση του  $a$  είναι τυχαία στο σχήμα και ίση με 0.5). Στο



(α') Πεδίο σύγκλισης μετασχ. Z για  $a = 0.5$



(β') Μέτρο μετασχ. Z για  $a = 0.5$

Σχήμα 16.4: Μετασχηματισμός Z του σήματος  $x[n] = -a^n u[-n-1]$ : (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

Σχήμα 16.4(β) φαίνεται το μέτρο του μετασχ. Z. Παρατηρήστε ότι δεν περιλαμβάνει τις τιμές για τις οποίες  $|z| > |a|$ . Η πράσινη καμπύλη ορίζει τον κύκλο  $|z| = |a|$ . Αν γράψουμε το μετασχηματισμό ως

$$X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a| \quad (16.30)$$

μπορούμε να ορίσουμε τη θέση  $z = a$  ως πόλος του μετασχηματισμού, διότι τον απειρίζεται (μηδενίζει τον παρονομαστή), ενώ τη θέση  $z = 0$  ως μηδενικό του μετασχηματισμού, διότι τον μηδενίζει (μηδενίζει τον αριθμητή).

#### Σημαντική παρατήρηση:

Είδαμε στα δυο πρώτα παραδείγματα ότι δυο διαφορετικά σήματα στο χρόνο, έχουν τον ίδιο μετασχ. Z. Σωστά; Λάθος! ☹Ο μετασχ. Z δεν είναι μόνο ο τύπος που καταλήγουν τα μαθηματικά. Είναι και το πεδίο σύγκλισης ROC! Ποτέ δε γράφουμε μόνο τον τύπο του μετασχ. Z. Πάντα πρέπει να γράφουμε μαζί και το εκάστοτε ROC! Το ROC είναι αυτό που ορίζει μονοσήμαντα τα ζευγάρια μετασχ. Z! Χωρίς αυτό, αν μας έδιναν τον τύπο του μετασχ. Z των παραδειγμάτων, δε θα μπορούσαμε να πούμε από ποιό σήμα στο χρόνο προέρχεται! Μπορεί να είναι είτε το

$$x[n] = a^n u[n]$$

είτε το

$$y[n] = -a^n u[-n-1]$$

Το ROC είναι αυτό που καθορίζει το κάθε ζευγάρι μετασχ. Z! Ανάλογα λοιπόν με το ROC, έχουμε διαφορετικά ζεύγη μετασχ. Z.

**Παράδειγμα 16.3:**

Να βρεθεί ο μετασχ. Z του σήματος

$$w[n] = x[n] + y[n] = a^n u[n] - \beta^n u[-n - 1] \tag{16.31}$$

Λύση:

Είδαμε παραπάνω ότι

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, |z| > |a| \tag{16.32}$$

$$-\beta^n u[-n - 1] \leftrightarrow \frac{1}{1 - \beta z^{-1}} = \frac{z}{z - \beta}, |z| < |\beta| \tag{16.33}$$

Επειδή ο μετασχ. Z είναι γραμμικός (θα αναφερθούμε σύντομα σε αυτό), το άθροισμα δυο σημάτων έχει μετασχ. Z το άθροισμα των μετασχηματισμών, με την περιογή σύγκλισης του αθροίσματος να ικανοποιεί τη σχέση

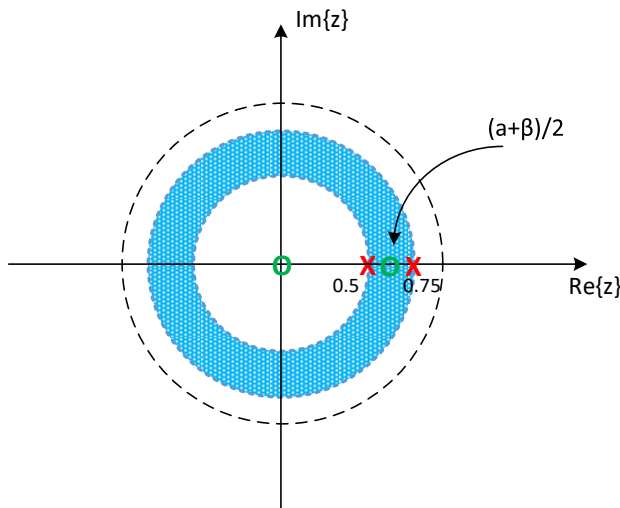
$$ROC_w \supseteq ROC_x \cap ROC_y \tag{16.34}$$

Αυτό σημαίνει προφανώς ότι για να υπάρχει ο μετασχ. Z του αθροίσματος, θα πρέπει το πεδίο σύγκλισης του να είναι μη κενό σύνολο. Αυτό εξαρτάται από τις σχετικές θέσεις των  $a, \beta$ . Η αλγεβρική έκφραση του μετασχηματισμού θα είναι

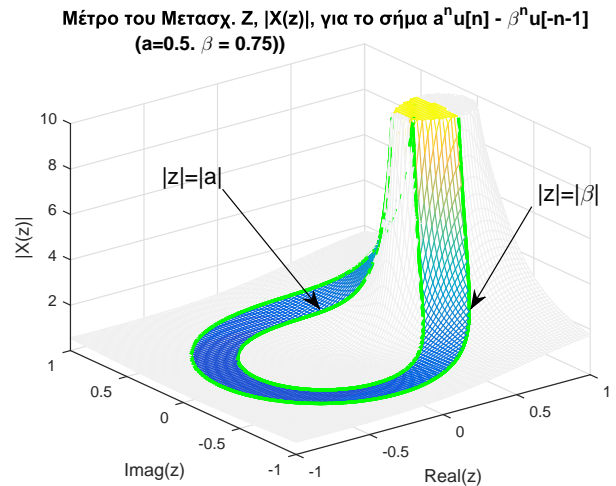
$$W(z) = \frac{z}{z - a} + \frac{z}{z - \beta} = \frac{z(z - \beta) + z(z - a)}{(z - a)(z - \beta)} \tag{16.35}$$

Οι πόλοι του μετασχ. αυτού βρίσκονται στις θέσεις  $z_1 = a, z_2 = \beta$ .

- Αν  $|a| < |\beta|$ , τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το  $|a| < |z| < |\beta|$ , δηλ. ένας δακτύλιος στο  $z$ -επίπεδο. Το πεδίο σύγκλισης φαίνεται στο Σχήμα 16.5(α) ενώ το μέτρο του μετασχηματισμού στο Σχήμα 16.5(β). Αν



(α') Πεδίο σύγκλισης, με  $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$ .



(β') Μέτρο μετασχ. Z με  $|a| = 0.5 < |\beta| = 0.75$ .

Σχήμα 16.5: Μετασχηματισμός Z του σήματος  $w[n] = a^n u[n] - \beta^n u[-n - 1]$ : (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

γράφουμε το μετασχηματισμό ως

$$W(z) = \frac{z}{z - a} + \frac{z}{z - \beta} = \frac{z(2z - (a + \beta))}{(z - a)(z - \beta)}, |z| > |z| > |a| \tag{16.36}$$

μπορούμε να ορίσουμε τις θέσεις  $z = a, z = \beta$  ως πόλοι του μετασχηματισμού, διότι τον απειρίζουν (μηδενίζουν τον παρονομαστή), ενώ τις θέσεις  $z = 0, z = (a + \beta)/2$  ως μηδενικά του μετασχηματισμού, διότι τον

μηδενίζουν (μηδενίζει τον αριθμητή).

- Αν  $|a| \geq |\beta|$ , τότε το πεδίο σύγκλισης είναι το κενό σύνολο,  $\emptyset$ , και άρα ο μετασχ. Z, παρ' όλο που έχει αλγεβρική μορφή, δεν υπάρχει, γιατί δεν έχει "πεδίο ορισμού", δηλ. κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου όπου θα ορίζεται!

#### Παράδειγμα 16.4:

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος

$$x[n] = \delta[n] \quad (16.37)$$

#### Λύση:

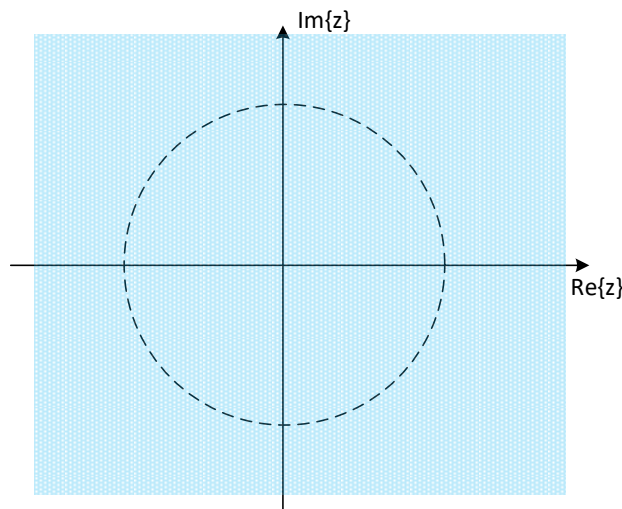
Είναι:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} \quad (16.38)$$

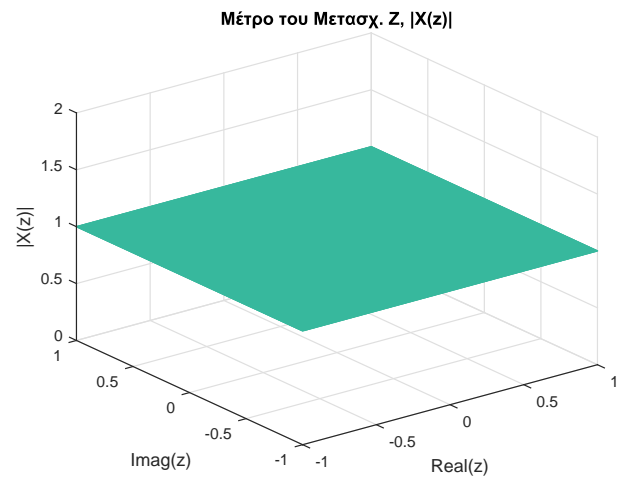
Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση Δέλτα  $\delta[n]$  ορίζεται μόνο στη θέση  $n = 0$  κι έχει πλάτος 1. Παντού αλλού είναι μηδέν. Άρα το παραπάνω άθροισμα θα γίνει:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]z^{-n} = 1z^0 = 1 \quad (16.39)$$

Προφανώς εδώ δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός όσον αφορά το πεδίο σύγκλισης ROC, άρα ο μετασχ. Z του σήματος αυτού ορίζεται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο!! Ενδιαφέρον! Το μέτρο του μετασχ. Z φαίνεται στο Σχήμα 16.6.



(α') Πεδίο σύγκλισης.



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος  $x[n] = \delta[n]$ .

Σχήμα 16.6: Μετασχηματισμός Z του σήματος  $x[n] = \delta[n]$ : (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

#### Παράδειγμα 16.5:

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Z του σήματος

$$x[n] = \delta[n - n_0] \quad (16.40)$$

#### Λύση:

Εδώ θα βρούμε τον Z της μετατοπισμένης συνάρτησης Δέλτα. Η  $\delta[n - n_0]$  είναι μια συνάρτηση Δέλτα στη θέση  $n_0$ . Το  $n_0$  αυτό μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό. Είναι λοιπόν:

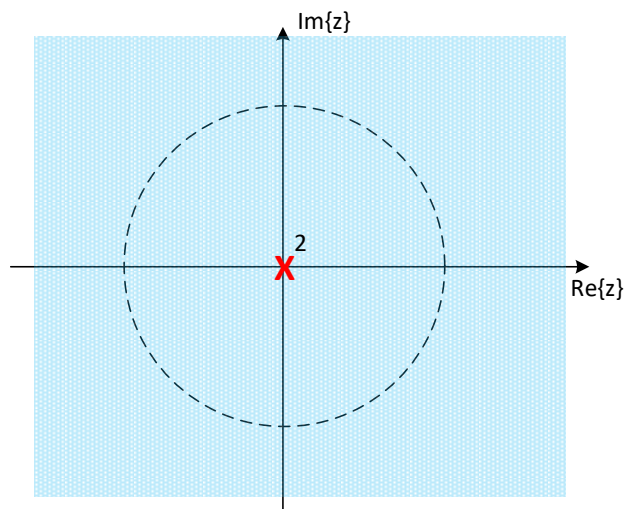
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]z^{-n} \tag{16.41}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση Δέλτα  $\delta[n - n_0]$  ορίζεται μόνο στη θέση  $n = n_0$  και έχει πλάτος 1. Παντού αλλού είναι μηδέν. Άρα το παραπάνω άθροισμα θα γίνει:

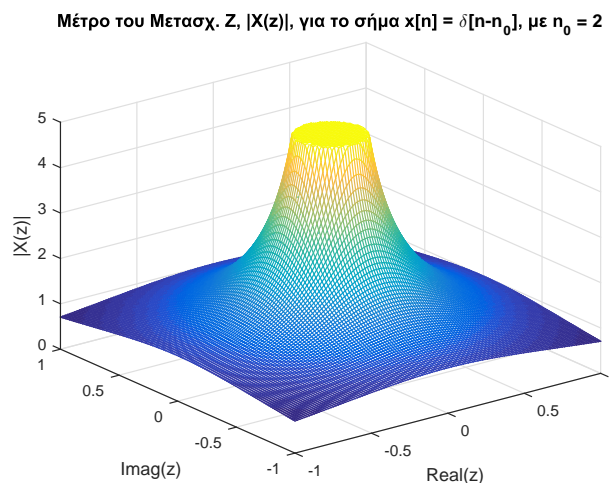
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0]z^{-n} = 1z^{-n_0} = z^{-n_0} \tag{16.42}$$

με πεδίο σύγκλισης ROC το  $|z| > 0$ . Το μηδέν δεν περιλαμβάνεται στο ROC γιατί για  $z = 0$ , απειρίζεται το  $z^{-n_0} = \frac{1}{z^{n_0}}$  (μηδενίζεται ο παρονομαστής). Οπότε ο μετασχηματισμός έχει έναν πόλο στη θέση  $z = 0$ . Άρα βρήκαμε ότι ο μετασχ. Z της  $\delta[n - n_0]$  είναι ο  $z^{-n_0}$ , με ROC  $|z| > 0$ .

Το μέτρο του μετασχ. Z για  $n_0 = 2$  φαίνεται στο Σχήμα 16.7. Παρατηρήστε πως αν γράψουμε το μετασχημα-



(α') Πεδίο σύγκλισης.



(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος  $x[n] = \delta[n - n_0]$ , για  $n_0 = 2$ .

Σχήμα 16.7: Μετασχηματισμός Z του σήματος  $x[n] = \delta[n - n_0]$ , για  $n_0 = 2$ : (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

τισμό ως

$$X(z) = \frac{1}{z^{n_0}} \tag{16.43}$$

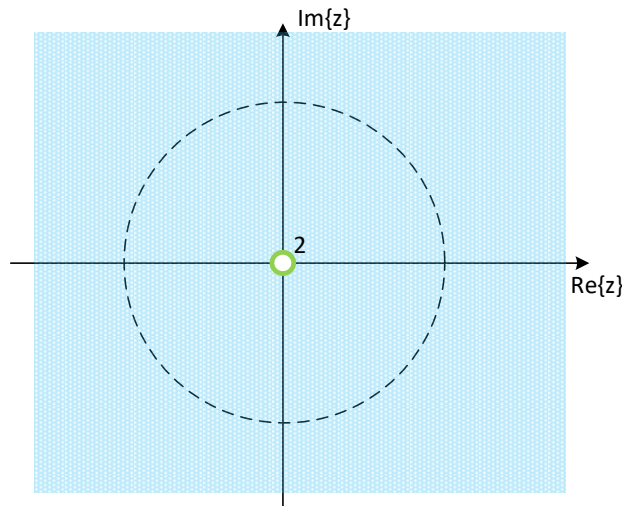
παρατηρούμε εύκολα ότι ο μετασχηματισμός απειρίζεται στη θέση  $z = 0$ , και μάλιστα ο πόλος στη θέση αυτή είναι πολλαπλός (τάξης  $n_0$ ). Επίσης παρατηρούμε ότι για  $z \rightarrow \pm\infty$ , ο μετασχηματισμός μηδενίζεται. Άρα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα μηδενικό στο άπειρο! Θα μιλήσουμε αργότερα για τα μηδενικά και τους πόλους με περισσότερη ακρίβεια.

Στην περίπτωση που  $n_0 < 0$ , το μέτρο του μετασχ. Z για  $n_0 = -2$  φαίνεται στο Σχήμα 16.8. Τέλος, παρατηρούμε εύκολα ότι ο μετασχηματισμός απειρίζεται όταν  $z \rightarrow \pm\infty$ , και μάλιστα ο πόλος στη θέση αυτή είναι πολλαπλός (τάξης  $n_0$ ). Άρα συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας πόλος στο άπειρο. Επίσης παρατηρούμε ότι για  $z = 0$ , ο μετασχηματισμός μηδενίζεται, οπότε υπάρχει ένα μηδενικό στη συμβολή των αξόνων.

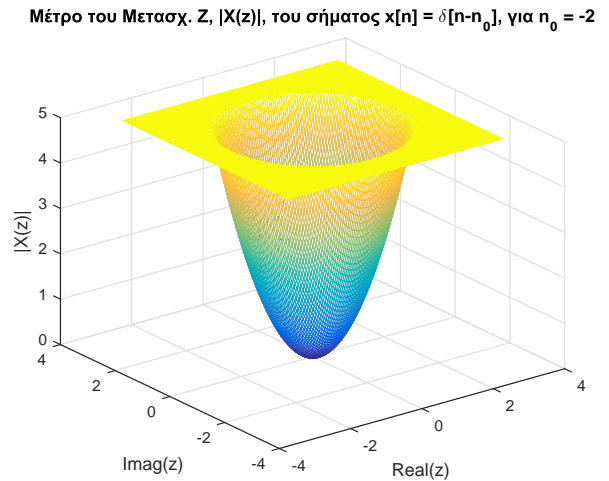
### 16.4 Σύνδεση με το μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου

Όταν θέτουμε  $z = e^{j\omega}$  στο άθροισμα του μετασχ. Z, αυτό που κάνουμε “σιωπηλά” είναι ότι εκτιμούμε το μετασχ. Z σε συχνότητες που βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου, που δεν είναι άλλος απ’ τον κύκλο  $|z| = |e^{j\omega}| = 1!$

Για να μπορούμε όμως να το κάνουμε αυτό, πρέπει ο μοναδιαίος αυτός κύκλος να περιέχεται μέσα στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z! Αλλιώς δεν έχει κανένα νόημα ο υπολογισμός του  $X(z)|_{z=e^{j\omega}}$ ! Γι’ αυτό λοιπόν, όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου μέσω του μετασχ. Z, πρέπει να προσέχουμε



(α') Πεδίο σύγκλισης.

(β') Μέτρο μετασχ. Z σήματος  $x[n] = \delta[n - n_0]$ , για  $n_0 = -2$ .

Σχήμα 16.8: Μετασχηματισμός Z του σήματος  $x[n] = \delta[n - n_0]$ , για  $n_0 = -2$ : (α) Πεδίο σύγκλισης, (β) Μέτρο Μετασχηματισμού.

πρώτα αν ο μοναδιαίος κύκλος περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z. Αν περιέχεται, καλώς, αντικαθιστούμε  $z = e^{j\omega}$  στον τύπο του μετασχ. Z και έχουμε το μετασχ. Fourier. Αν όχι, τότε ο μετασχ. Fourier δεν μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Z! Ας μιλήσουμε όμως με λίγο μεγαλύτερη ακρίβεια σχετικά με αυτά, και μέσα από παραδείγματα.

Ο ορισμός του μετασχ. Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (16.44)$$

είναι ταυτόσημος με τον ορισμό του μετασχ. Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (16.45)$$

αν στη Σχέση (16.45) θέσουμε όπου  $e^{j\omega}$  το  $z = re^{j\omega}$ . Είναι εύλογο να περιμένει κανείς ότι ο μετασχ. Z,  $X(z)$ , ενός σήματος  $x[n]$ , να είναι ίδιος με τον μετασχ. Fourier,  $X(\omega)$ , του ίδιου σήματος, με το  $e^{j\omega}$  να έχει αντικατασταθεί από το  $z$ . Για παράδειγμα, μάθαμε πριν λίγο ότι

$$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \quad (16.46)$$

Αντικαθιστώντας το  $z$  με το  $e^{j\omega}$ , έχουμε ότι

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = X(e^{j\omega}) \quad (16.47)$$

που είναι ο μετασχ. Fourier του σήματος  $x[n]$ , όπως είδαμε σε προηγούμενο Κεφάλαιο. Δυστυχώς αυτή η διαδικασία δεν ισχύει για κάθε σήμα  $x[n]$ . Μπορούμε να την χρησιμοποιούμε μόνο όταν η περιοχή σύγκλισης του μετασχ. Z περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.

Για παράδειγμα, ο μετασχ. Fourier της βηματικής συνάρτησης  $x[n] = u[n]$  είναι ο

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \quad (16.48)$$

για  $\omega \in [-\pi, \pi]$ . Ο αντίστοιχος μετασχ. Z είναι ο

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, |z| > 1 \quad (16.49)$$

και όπως βλέπουμε από την περιοχή σύγκλισης, δεν περιλαμβάνεται ο μοναδιαίος κύκλος σε αυτή. Άρα, ο μετασχ. Z δεν μπορεί να μας δώσει το μετασχ. Fourier, αλλά ούτε και το αντίστροφο! Σε αυτές τις περιπτώσεις, η σχέση μεταξύ των δυο μετασχηματισμών δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος για αυτήν την περιπλοκή σχετίζεται με τη σύγκλιση του αθροίσματος του μετασχ. Fourier, όπου η άθροιση περιορίζεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Λόγω αυτού του περιορισμού, το άθροισμα του μετασχ. Fourier για τη βηματική συνάρτηση δε συγκλίνει. Χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε μια γενικευμένη συνάρτηση - τη  $\delta(\omega)$  - για τη σύγκλιση.

Αντιθέτως, το άθροισμα του μετασχ. Z για τη βηματική συνάρτηση  $u[n]$  συγκλίνει αλλά μόνο για  $|z| > 1$ , μια περιοχή που είναι “απαγορευμένη” για το μετασχ. Fourier! ☹

Ένα ακόμα ενδιαφέρον στοιχείο είναι ότι παρ’ όλο που ο μετασχ. Z μας συστήθηκε ως μια γενίκευση του μετασχ. Fourier, υπάρχουν σήματα (π.χ. περιοδικά σήματα), για τα οποία ο μετασχ. Z δεν υπάρχει, ενώ ο μετασχ. Fourier υπάρχει! (αλλά δεν προκύπτει από απλή σύγκλιση του αθροίσματος).

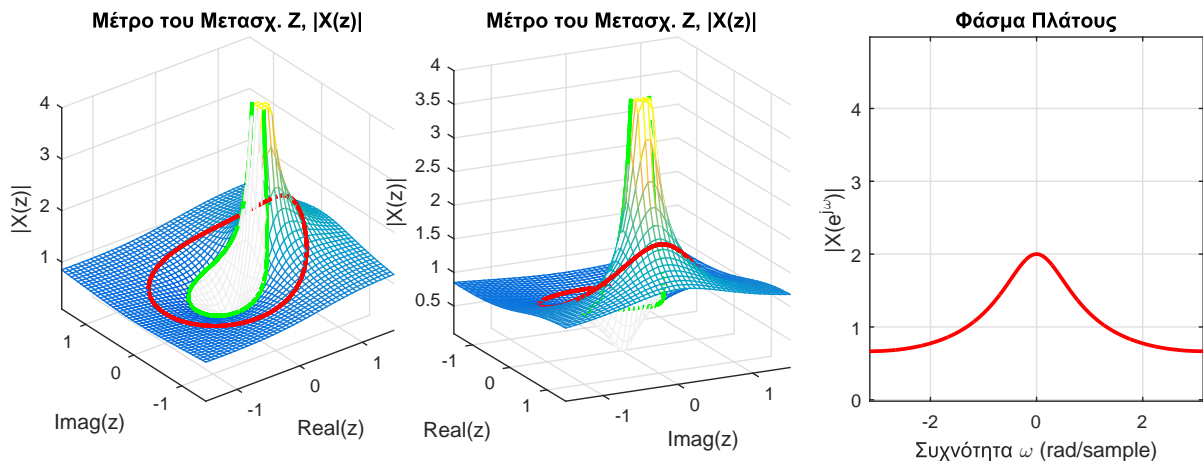
Ας δούμε μερικά παραδείγματα αυτής της σχέσης των δυο μετασχηματισμών.

**Παράδειγμα 16.6:**

Ας θεωρήσουμε ξανά το σήμα

$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1 \quad (16.50)$$

κι ας βρούμε τους μετασχηματισμούς Z και Fourier.



Σχήμα 16.9: Μέτρο μετασχ. Z,  $|X(z)|$  και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους  $|X(e^{j\omega})|$ , για  $a = 0.5$ .

Είδαμε ότι αυτό το σήμα έχει μετασχηματισμό Z ως

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, |z| > |a| \quad (16.51)$$

και ότι έχει μετασχ. Fourier ως

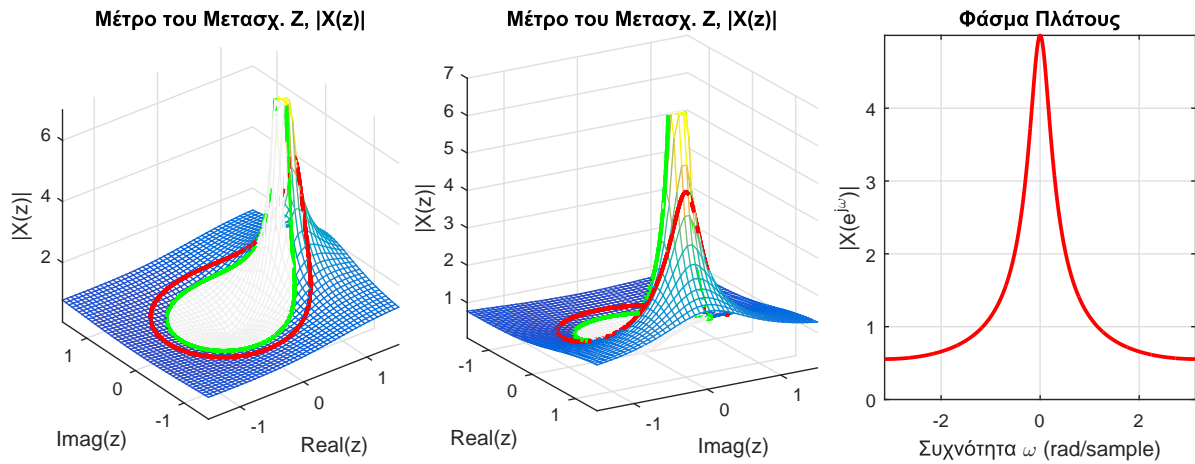
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (16.52)$$

Στα Σχήματα 16.9,16.10 βλέπετε το  $|X(z)|$  για μερικές τιμές του  $z$  από δυο οπτικές γωνίες, και για  $a = 0.5$  και  $a = 0.8$  αντίστοιχα, καθώς και το μέτρο του Μετασχ. Fourier του ίδιου σήματος, το οποίο θυμίζεται ότι είναι

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(\omega)}} \quad (16.53)$$

Παρατηρήστε στα τρισδιάστατα γραφήματα το μοναδιαίο κύκλο που έχει σχεδιαστεί επάνω στο  $|X(z)|$ . Αυτός ο





Σχήμα 16.10: Μέτρο μετασχ.  $Z$ ,  $|X(z)|$  και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους  $|X(e^{j\omega})|$ , για  $a = 0.8$ .

κύκλος είναι ο μοναδιαίος κύκλος όπου εκεί ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier, και ο κύκλος αυτός έχει “απλωθεί” επάνω στο τρισδιάστατο γράφημα για να μας δώσει τις τιμές του  $|X(e^{j\omega})|$ ! Είναι ακριβώς οι ίδιες τιμές με το  $|X(e^{j\omega})|$  που είναι σχεδιασμένο ως δισδιάστατο σήμα και στα δύο Σχήματα. Ακολουθήστε τις τιμές του μοναδιαίου κύκλου για μια πλήρη περιστροφή επάνω στο  $|X(z)|$  και δείτε ότι ακολουθούν ακριβώς την ίδια μονοτονία με το  $|X(e^{j\omega})|$ ! Επίσης, προσέξτε τον πόλο στη θέση  $z = a = 0.5$  και  $z = a = 0.8$ , ο οποίος απειρίζεται το  $|X(z)|$ . Τέλος, το  $|X(z)|$  μηδενίζεται για  $z = 0$ , οπότε στο  $z = 0$  βλέπετε ένα μικρό “βύθισμα” της γραφικής παράστασης. Τέλος, πρέπει να επισημανθεί ότι το πεδίο σύγκλισης δε φαίνεται στα σχήματα αυτά, αλλά γνωρίζουμε ότι είναι  $|z| > |a|$  και για τα δυο Σχήματα.

Συγκρίνετε το Σχήμα 16.9 με το Σχήμα 16.10. Καταλαβαίνετε γιατί άλλαξε το μέτρο του μετασχ. Fourier κατ’ αυτόν τον τρόπο; Πώς επηρεάστηκε το μέτρο της φασματικής απόκρισης όταν ο πόλος πλησίασε το μοναδιαίο κύκλο; Μπορείτε να αντιληφθείτε τι θα συμβεί αν ο πόλος βρεθεί ακριβώς επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ. στη θέση  $|z| = 1$ ;

#### Παράδειγμα 16.7:

Βρείτε το μετασχ.  $Z$  της συνάρτησης Δέλτα,  $x[n] = \delta[n]$ .

Λύση:

Πιο πριν δείξαμε ότι

$$x[n] = \delta[n] \longleftrightarrow X(z) = 1, \quad \forall z \quad (16.54)$$

και γνωρίζουμε ότι

$$x[n] = \delta[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = 1 \quad (16.55)$$

Στο Σχήμα (16.11), βλέπουμε ακριβώς αυτό που περιμέναμε. Για κάθε τιμή του  $z$ , ο μετασχ.  $Z$  είναι σταθερός και ίσος με 1, το ίδιο και ο μετασχ. Fourier που ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. ■

#### Παράδειγμα 16.8:

Ας δούμε τώρα και το μετασχ.  $Z$  μιας μετατοπισμένης συνάρτησης Δέλτα. Πιο πριν δείξαμε ότι

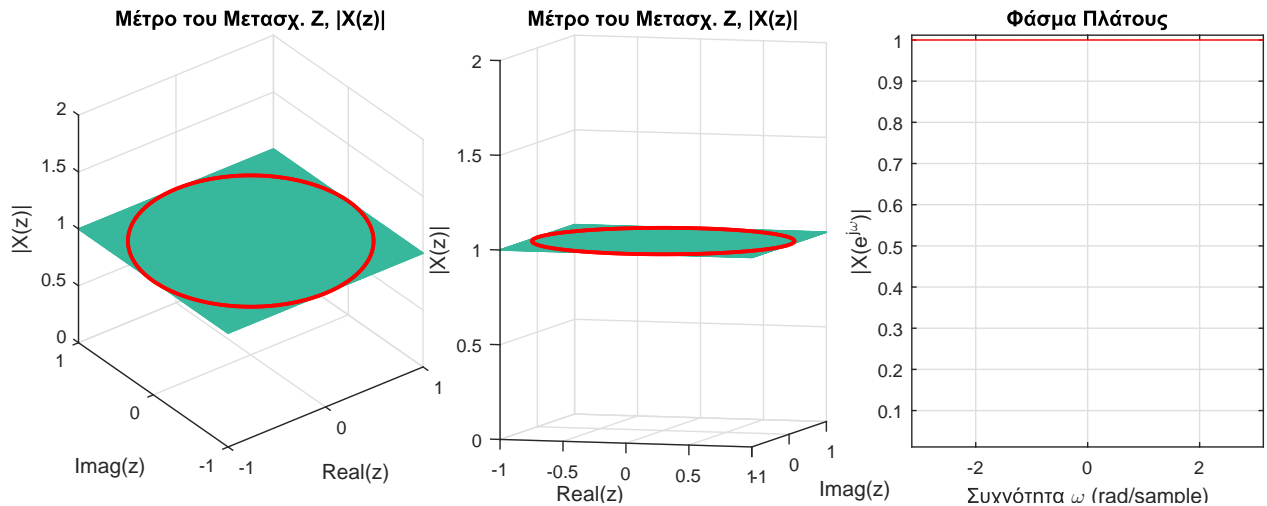
$$x[n] = \delta[n - n_0] \longleftrightarrow X(z) = z^{-n_0}, \quad \forall z \neq 0 \quad (16.56)$$

και γνωρίζουμε ότι

$$x[n] = \delta[n - n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} \quad (16.57)$$

Παρατηρούμε ότι το μέτρο του μετασχ. Fourier είναι μονάδα, αλλά υπάρχει μη μηδενική φάση ίση με  $\angle H(e^{j\omega}) =$



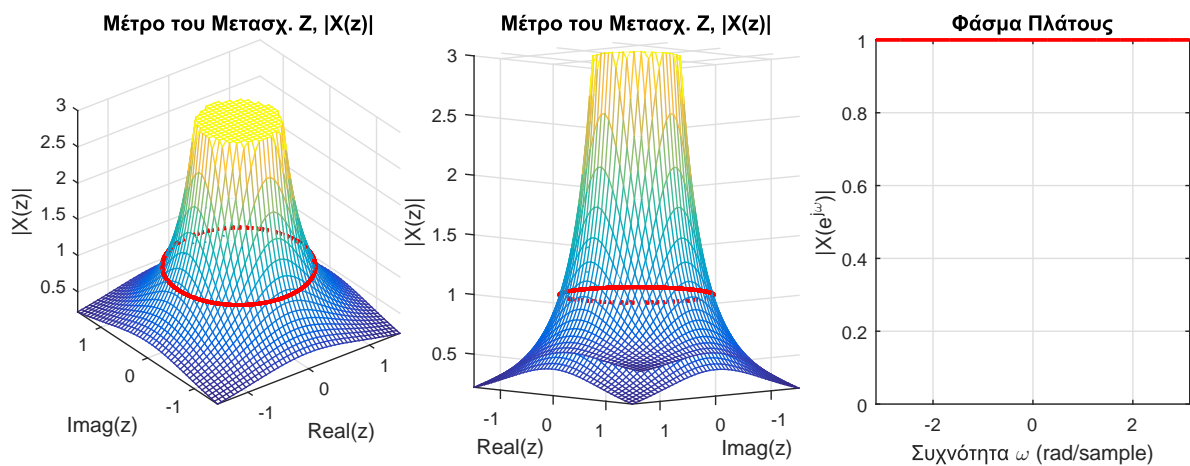


Σχήμα 16.11: Μέτρο μετασχ. Z,  $|X(z)|$  και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους  $|X(e^{j\omega})|$ , της συνάρτησης  $x[n] = \delta[n]$ .

$-\omega n_0$ . Ας θεωρήσουμε  $n_0 = 2$ . Το μέτρο του μετασχ. Z θα είναι

$$|X(z)| = |z^{-2}| = \frac{1}{|z^2|} = \frac{1}{|r^2 e^{j2\omega}|} = \frac{1}{r^2} \tag{16.58}$$

Στο Σχήμα (16.12), βλέπουμε ακριβώς αυτό που περιμέναμε. Για  $z = e^{j\omega}$ , δηλ. επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, ο



Σχήμα 16.12: Μέτρο μετασχ. Z,  $|X(z)|$  και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους  $|X(e^{j\omega})|$ , της συνάρτησης  $x[n] = \delta[n - 2]$ .

μετασχ. Z είναι σταθερός και ίσος με 1, το ίδιο φυσικά και ο μετασχ. Fourier, αφού κι αυτός ορίζεται επάνω εκεί. Επίσης, το φάσμα πλάτους είναι όπως ακριβώς το περιμέναμε.

**Παράδειγμα 16.9:**

Ας δούμε το φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής (Moving Average), που τόσες φορές το έχουμε αναφέρει. Ως γνωστόν, το αιτιατό φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής δίνεται από τον τύπο

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_2 + 1}, & 0 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{16.59}$$

Υπενθυμίζεται ότι για το παραπάνω φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής, έχουμε δείξει ότι

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| |e^{-j\omega M_2/2}| = \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad (16.60)$$

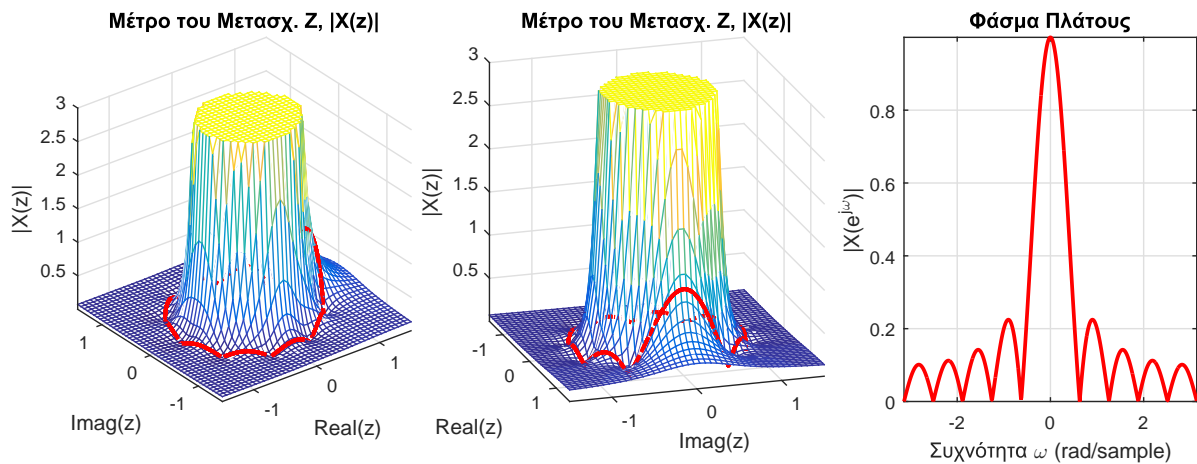
και

$$\angle X(e^{j\omega}) = \begin{cases} -M_2\omega/2, & 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2 + \pi, & \frac{2\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{4\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2, & \frac{4\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{6\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2 + \pi, & \frac{6\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{8\pi}{M_2+1} \\ -M_2\omega/2, & \frac{8\pi}{M_2+1} \leq \omega < \frac{10\pi}{M_2+1} \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (16.61)$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι ο μετασχ. Z του παραπάνω σήματος είναι

$$X(z) = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{n=0}^{M_2} z^{-n} = \frac{1}{M_2 + 1} \frac{1 - (z^{-1})^{M_2+1}}{1 - z^{-1}} \quad (16.62)$$

Το παραπάνω όμως μπορεί να γραφεί ως



Σχήμα 16.13: Μέτρο μετασχ. Z,  $|X(z)|$  και μοναδιαίος κύκλος (σε δυο όψεις), και φάσμα πλάτους  $|X(e^{j\omega})|$ , του φίλτρου κυλιόμενης μέσης τιμής για  $M_2 = 9$ .

$$X(z) = \frac{1}{M_2 + 1} \frac{1 - (z^{-1})^{M_2+1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z^{M_2}} \frac{z^{M_2+1} - 1}{z - 1} \quad (16.63)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχουν  $M_2 + 1$  μηδενισμοί του παρονομαστή (δηλ. οι πόλοι), ο ένας βρίσκεται στο  $z = 1$  και οι υπόλοιποι  $M_2$  στο  $z = 0$ . Οι μηδενισμοί του αριθμητή (που θα δούμε αργότερα ότι λέγονται μηδενικά) βρίσκονται στις θέσεις  $z_k = e^{j2\pi k/(M_2+1)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, M_2$ , δηλ. είναι  $M_2 + 1$  το πλήθος. Ο ένας απ' αυτούς, ο  $z_0 = 1$  βρίσκεται στην ίδια θέση με τον πόλο που αναφέραμε πριν. Αυτοί οι δυο μηδενισμοί, του αριθμητή και του παρονομαστή στη θέση  $z = 1$  αλληλοακυρώνονται, οπότε στη θέση  $z = 1$  η συνάρτηση  $H(z)$  συμπεριφέρεται κανονικά, χωρίς να μηδενίζεται ή να απειρίζεται.

Άρα τελικά, το  $X(z)$  έχει  $M_2$  πόλους στο  $z = 0$  και  $M_2$  μηδενικά στα  $z_k = e^{j2\pi k/(M_2+1)}$ ,  $k = 1, \dots, M_2$ . Δείτε το Σχήμα (16.13). Ανατρέξτε στην ανάλυση που κάναμε για το φίλτρο κυλιόμενης μέσης τιμής, όταν συζητούσαμε για τη φασματική απόκριση. Παρατηρήστε τις ομοιότητες.

Από τα παραπάνω παραδείγματα, μπορούμε να συνοψίσουμε τα εξής συμπεράσματα:

### Σχέση Μετασχ. Z και Μετασχ. Fourier

- (α') Ο μετασχ. Fourier  $X(e^{j\omega})$  ενός σήματος  $x[n]$  μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z  $X(z)$  αν ο τελευταίος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο στο πεδίο σύγκλισής του.
- (β') Στην παραπάνω περίπτωση, ο μετασχ. Fourier αποτελεί μια κάθετη “φέτα” της επιφάνειας του μετασχ. Z στο μιγαδικό επίπεδο, και βρίσκεται πάνω από τον κύκλο ακτίνας  $|z| = 1$ .
- (γ') Τα φάσματα πλάτους και φάσης (αν και δεν δείξαμε τη φάση σχηματικά στα προηγούμενα παραδείγματα) αποτελούν και αυτά “φέτες” των διδιάστατων συναρτήσεων  $|X(z)|$  και  $\phi(z)$  επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου.

## 16.5 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z

Έχουν αποδειχθεί κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες σχετικά με τον Z. Ο πίνακας 16.1 εμφανίζει τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες. Τα πεδία σύγκλισης του μονόπλευρου μετασχ. Z είναι αντίστοιχα με αυτά του δίπλευρου,

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Z			
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχηματισμός Z	Πεδίο Σύγκλισης
	$x[n]$ $y[n]$	$X(z)$ $Y(z)$	$R_x$ $R_y$
Γραμμικότητα	$Ax[n] + By[n]$	$AX(z) + BY(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Χρονική μετατόπιση	$x[n - n_0]$	$X(z)z^{-n_0}$	τουλάχιστον το $R_x$
Στάθμιση στο χώρο Z	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$ z_0 R_x$
Συζυγές σήμα στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	$R_x$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(1/z)$	$1/R_x$
Συνέλιξη	$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$	$R \supseteq R_x \cap R_y$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	τουλάχιστον το $R_x$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z  > 0\}\}$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R \supseteq \{R_x \cap \{ z  > 1\}\}$
Θεώρημα Αρχικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$	
Θεώρημα Τελικής Τιμής	$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$	

Πίνακας Ιδιοτήτων Μονόπλευρου Μετασχηματισμού Z		
Χρονική καθυστέρηση	$x[n + n_0], n_0 > 0$	$z^{-n_0}X(z) + \sum_{k=0}^{n_0-1} z^{-k}x[k - n_0]$
Χρονική προήγηση	$x[n - n_0], n_0 > 0$	$z^{n_0}X(z) - \sum_{k=0}^{n_0-1} z^{-k}x[k]$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z) - x[-1]$
Άθροιση στο χρόνο	$\sum_{k=0}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$

Πίνακας 16.1: Πίνακας Ιδιοτήτων του μετασχ. Z

με τη μόνη διαφορά ότι πάντα περιγράφονται ως μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου εξωτερικά ενός κύκλου - ο κύκλος καθορίζεται πάντα από τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο.

### 16.5.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Παρακάτω ακολουθούν αποδείξεις των ιδιοτήτων του Πίνακα 16.1, μαζί με παραδείγματα εφαρμογής τους. Σε όλες τις ιδιότητες, θεωρούμε ότι ένα σήμα  $x[n]$  έχει μετασχ. Ζ  $X(z)$  με πεδίο σύγκλισης  $R_x$ , και - όπου χρειάζεται - ένα σήμα  $y[n]$  έχει μετασχ. Ζ  $Y(z)$  με πεδίο σύγκλισης  $R_y$ .

#### 16.5.1.1 Γραμμικότητα

Για ένα σήμα  $w[n] = Ax[n] + By[n]$ , με  $A, B$  σταθερές, ο μετασχ. Ζ του δίνεται ως

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (Ax[n] + By[n])z^{-n} \quad (16.64)$$

$$= A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} + B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} \quad (16.65)$$

$$= AX(z) + BY(z) \quad (16.66)$$

με  $R_w \supseteq R_x \cap R_y$ .

Άρα

$$\boxed{Ax[n] + By[n] \longleftrightarrow AX(z) + BY(z), \quad R \supseteq R_x \cap R_y} \quad (16.67)$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η εφαρμογή της γραμμικότητας είναι εύκολη και το πεδίο σύγκλισης αποτελείται από την τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης. Θα ήταν πιο ενδιαφέρον να δούμε ένα παράδειγμα όπου το πεδίο σύγκλισης του αθροίσματος είναι υπερσύνολο της τομής των επιμέρους πεδίων.

#### Παράδειγμα 16.10:

Έστω οι μετασχ. Ζ

$$X(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.68)$$

και

$$Y(z) = -\frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad (16.69)$$

των οποίων τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι  $R_x = \{|z| > 1/2\}$  και  $R_y = \{|z| > 1/2\}$ . Ζητείται ο μετασχ. Ζ του αθροίσματος των δυο μετασχηματισμών.

Λύση:

Η τομή των δυο πεδίων είναι  $R = \{|z| > 1/2\}$ . Όμως ο μετασχ. Ζ του αθροίσματος  $x[n] + y[n]$  είναι

$$X(z) + Y(z) = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad (16.70)$$

$$= \frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) - \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad (16.71)$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \quad (16.72)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (16.73)$$

το οποίο έχει πεδίο σύγκλισης το  $R_{x+y} = \{|z| > 1/3\}$ , που είναι υπερσύνολο του  $\{|z| > 1/2\}$ .

## 16.5.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Για το σήμα  $y[n] = x[n - n_0]$ , με  $n_0 \in \mathfrak{R}$ , ο μετασχ. Z δίνεται ως

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n - n_0]z^{-n} \quad (16.74)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k-n_0} = z^{-n_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} \quad (16.75)$$

$$= z^{-n_0} X(z) \quad (16.76)$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει το  $R_y = R_x$ .

$$\boxed{x[n - n_0] \longleftrightarrow X(z)z^{-n_0}, \quad R = R_x} \quad (16.77)$$

**Παράδειγμα 16.11:**

Έστω το σήμα

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] \quad (16.78)$$

Ας βρούμε το μετασχ. Z του.

Λύση:

Παρατηρήστε ότι μπορούμε να το γράψουμε ως

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n+2] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} u[n+2] = 9x[n+2] \quad (16.79)$$

με

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (16.80)$$

του οποίου ο μετασχ. Z είναι γνωστός ως

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad R_x = \{|z| > 1/3\} \quad (16.81)$$

Άρα για το  $y[n] = x[n+2]$  θα έχουμε

$$Y(z) = 9z^2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}, \quad R_y = \{|z| > 1/3\} \quad (16.82)$$

## 16.5.1.3 Στάθμιση στο χώρο του Z

Για το σήμα  $y[n] = z_0^n x[n]$ , με  $z_0 \in \mathbb{C}$ , ο μετασχ. Z δίνεται ως

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_0^n x[n]z^{-n} \quad (16.83)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](z/z_0)^{-n} = X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (16.84)$$

με το πεδίο σύγκλισης το  $R_y = |z_0|R_x$ .

$$\boxed{z_0^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad R = |z_0|R_x} \quad (16.85)$$

**Παράδειγμα 16.12:**

Έστω το σήμα

$$y[n] = 2e^{j\pi/4n} a^n u[n] \quad (16.86)$$

Ας βρούμε το μετασχ. Z του.

Λύση:  
Θα είναι

$$Y(z) = \frac{1}{1 - a \frac{z^{-1}}{\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}}} = \frac{1}{1 - 2ae^{j\pi/4}z^{-1}} \quad (16.87)$$

με πεδίο σύγκλισης

$$|2ae^{j\pi/4}z^{-1}| < 1 \iff |z| > 2|a| \quad (16.88)$$

Στην Άσκηση XXXX μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με χρήση του ορισμού. ■

Παρατηρήστε ότι όταν  $z_0 = e^{j\omega_0}$ , έχουμε  $e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{-j\omega_0} z)$ , με πεδίο σύγκλισης  $R = R_x$ . Το γινόμενο  $e^{-j\omega_0} z$  αντιστοιχεί σε μια περιστροφή κατά γωνία  $\omega_0$  στο μιγαδικό επίπεδο, δηλ. σε μια μετατόπιση στη συχνότητα κατά  $\omega_0$ . Η περιστροφή μπορεί να είναι με τη φορά του ρολογιού ( $\omega_0 < 0$ ) ή αντίθετη με αυτή ( $\omega_0 > 0$ ), και αντίστοιχα η μετατόπιση στη συχνότητα θα είναι προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά. Η ιδιότητα αυτή είναι ουσιαστικά η ίδια με την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα του μετασχ. Fourier που έχουμε ήδη συζητήσει.

**16.5.1.4 Συζυγές σήμα στο χρόνο**Για το σήμα  $y[n] = x^*[n]$ , ο μετασχ. Z δίνεται ως

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]z^{-n} = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](z^*)^{-n} \right)^* = X^*(z^*) \quad (16.89)$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει ίδιο,  $R_y = R_x$ .

Άρα

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(z^*), \quad R = R_x \quad (16.90)$$

**Παράδειγμα 16.13:**

Αν για ένα σήμα γνωρίζετε ότι είναι πραγματικό, εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του  $z$ , και έχει ακριβώς δυο πόλους και δυο μηδενικά, εκ των οποίων το ένα μηδενικό βρίσκεται στη θέση  $z = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$  και ο ένας πόλος στη θέση  $z = e^{-j\pi/8}$ , τότε βρείτε το μετασχ. Z του.

Λύση:  
Ο μετασχ. Z θα είναι της μορφής

$$X(z) = A \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)} \quad (16.91)$$

με  $z_1 = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$  και  $p_1 = e^{-j\pi/8}$ . Αφού το σήμα είναι πραγματικό, τότε

$$x[n] = x^*[n] \longleftrightarrow X(z) = X^*(z^*) \quad (16.92)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι για κάθε πόλο ή μηδενικό πραγματικού σήματος στη θέση  $z = z_0$  υπάρχει ένας πόλος ή μηδενικό στη θέση  $z = (z_0)^*$ . Άρα η μορφή του μετασχηματισμού είναι

$$X(z) = A \frac{(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z - p_1)(z - p_1^*)} = A \frac{(z - \sqrt{2}e^{j\pi/4})(z - \sqrt{2}e^{-j\pi/4})}{(z - e^{-j\pi/8})(z - e^{j\pi/8})} \quad (16.93)$$

Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι δυο,  $|z| > 1$  ή  $|z| < 1$ . Καταλαβαίνετε γιατί; ☺

Το παράδειγμα αυτό μας υποδεικνύει κάτι πολύ σημαντικό: ότι για ένα πραγματικό σήμα  $x[n]$ , οι πόλοι και τα μηδενικά του στο χώρο του μετασχ. Z έρχονται πάντα σε συζυγή ζεύγη!

### 16.5.1.5 Αντιστροφή στο χρόνο

Για το σήμα  $y[n] = x[-n]$ , ο μετασχ. Z δίνεται ως

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]z^{-n} \quad (16.94)$$

$$= \sum_{k=+\infty}^{-\infty} x[k]z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^k \quad (16.95)$$

$$= X(z^{-1}) \quad (16.96)$$

με το πεδίο σύγκλισης να αντιστρέφεται, δηλ.  $R_y = 1/R_x$ .

Άρα

$$x[-n] \longleftrightarrow X(z^{-1}), \quad R = 1/R_x \quad (16.97)$$

#### Παράδειγμα 16.14:

Για το σήμα  $x[n] = a^n u[n]$ , ο μετασχ. Z είναι

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad R_x = \{|z| > a\} \quad (16.98)$$

Βρείτε το μετασχ. Z του σήματος  $x[-n]$ .

Λύση:

Σύμφωνα με την ιδιότητα, για το σήμα  $y[n] = x[-n] = a^{-n} u[-n]$ , ο μετασχ. Z είναι

$$Y(z) = \frac{1}{1 - az}, \quad R_y = \{|z| < 1/a\} \quad (16.99)$$

Ας το επιβεβαιώσουμε με τον ορισμό.

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{-n} u[-n]z^{-n} \quad (16.100)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^0 a^{-n} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 (a^{-1} z^{-1})^n \quad (16.101)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1} z^{-1})^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az)^n \quad (16.102)$$

$$= \frac{1}{1 - az}, \quad |z| < 1/a \quad (16.103)$$

### 16.5.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Για το σήμα  $y[n] = x[n/k]$  με  $k \in \mathbb{Z}$ , το οποίο γράφεται ως

$$y[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{το } n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } k \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (16.104)$$

ο μετασχ. Z του δίνεται ως

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n/k]z^{-n} \quad (16.105)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]z^{-lk} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l](z^k)^{-l} \quad (16.106)$$

$$= X(z^k) \quad (16.107)$$

με πεδίο σύγκλισης  $R = R_x^{1/k}$ .

Άρα

$$\boxed{x[n/k] \longleftrightarrow X(z^k), R = R_x^{1/k}} \quad (16.108)$$

### Παράδειγμα 16.15:

Αν το σήμα  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  έχει μετασχ. Z

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, R_x = \{|z| > \frac{1}{2}\} \quad (16.109)$$

τότε βρείτε το μετασχ. Z του σήματος  $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} u[n/2]$ .

Λύση:

Το σήμα  $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} u[n/2]$  θα έχει μετασχ. Z

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}\right)}, R_y = \left\{|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} \quad (16.110)$$

Ας το επιβεβαιώσουμε με χρήση του ορισμού:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/2} u[n/2]z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l u[l]z^{-2l} \quad (16.111)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2z^2}\right)^l = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}, |z| > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (16.112)$$

#### 16.5.1.7 Συνέλιξη στο χρόνο

Για τα σήματα  $x[n], y[n]$ , που το καθένα έχει πεδίο σύγκλισης  $R_x, R_y$  αντίστοιχα, το σήμα  $w[n] = x[n] * y[n]$  έχει μετασχ. Z ως

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] * y[n])z^{-n} \quad (16.113)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] \right) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n-k]z^{-n} \right) \quad (16.114)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \left( z^{-k} Y(z) \right) = Y(z) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k} \quad (16.115)$$

$$= Y(z)X(z) \quad (16.116)$$

με πεδίο σύγκλισης  $R_z \supseteq R_x \cap R_y$ .

Άρα

$$\boxed{x[n] * y[n] \longleftrightarrow X(z)Y(z), R \supseteq R_x \cap R_y} \quad (16.117)$$



**Παράδειγμα 16.16:**

Ας θεωρήσουμε δυο αιτιατά σήματα

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.118)$$

$$y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (16.119)$$

Βρείτε το μετασχ. Z της συνέλιξής τους.

Λύση:

Η συνέλιξή τους μας δίνει (δείξτε το!)

$$x[n] * y[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{1 - (-2)^{n+1}}{3} u[n] = \left[\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n] \quad (16.120)$$

Οι μετασχ. Z των δυο σημάτων είναι

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad R_x = \{|z| > 1/2\} \quad (16.121)$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad R_y = \{|z| > 1/4\} \quad (16.122)$$

Το γινόμενο  $X(z)Y(z)$  δίνει

$$X(z)Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)}, \quad R = \{|z| > 1/2\} \quad (16.123)$$

Ο μετασχ. Z του σήματος  $x[n] * y[n]$  είναι

$$Z\{x[n] * y[n]\} = Z\left\{\left[\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]\right\} \quad (16.124)$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)} \quad (16.125)$$

που είναι ίδιο αποτέλεσμα με τη Σχέση (16.123).

**16.5.1.8 Διαφορά στο χρόνο**

Για το σήμα  $y[n] = x[n] - x[n-1]$ , ο μετασχ. Z έχει ως

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] - x[n-1])z^{-n} \quad (16.126)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-1]z^{-n} = X(z) - X(z)z^{-1} \quad (16.127)$$

$$= (1 - z^{-1})X(z) \quad (16.128)$$

με πεδίο σύγκλισης το  $R_y \supseteq R_x$ , διότι ο όρος  $(1 - z^{-1})$  μπορεί να απαλείφει αντίστοιχο πόλο στον παρονομαστή του  $X(z)$ , με αποτέλεσμα το πεδίο σύγκλισης που θα προκύψει να είναι υπερσύνολο του αρχικού πεδίου σύγκλισης. Άρα

$$\boxed{x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow (1 - z^{-1})X(z), \quad R \supseteq R_x} \quad (16.129)$$

**Παράδειγμα 16.17:**

Ένα σήμα  $x[n]$  έχει μετασχ.  $Z$  για τον οποίο ισχύουν τα ακόλουθα:

- Έχει δυο πόλους, εκ των οποίων ο ένας είναι στη θέση  $z = \frac{1}{2}$ .
- Έχει δυο μηδενικά στη θέση  $z = 0$ .
- Το σήμα  $x[n] - x[n-1]$  είναι απολύτως αθροίσιμο.
- Το σήμα  $x[n]$  δεν είναι απολύτως αθροίσιμο.
- Ο μετασχ.  $Z$  έχει εξωστρεφές πεδίο σύγκλισης.

Λύση:

Ο μετασχ.  $Z$  είναι της μορφής

$$X(z) = A \frac{z^2}{(z-2)(z-p_2)} = A \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - p_2z^{-1}\right)} \quad (16.130)$$

Ο πόλος  $z = p_2$  μπορεί να είναι εντός, επάνω, ή εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Δεδομένου ότι το σήμα  $x[n]$  δεν είναι απολύτως αθροίσιμο (που σημαίνει ότι δεν υπάρχει ο μετασχ. Fourier μέσω του ορισμού του επάνω στο μοναδιαίο κύκλο) και ότι το πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού  $Z$  είναι εξωστρεφές, ο πόλος σίγουρα δε θα είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Αν ήταν εντός, τότε ο μοναδιαίος κύκλος θα συμπεριλαμβανόταν στο εξωστρεφές πεδίο σύγκλισης και το σήμα θα ήταν απολύτως αθροίσιμο. Για να βρούμε τον εναπομείναντα πόλο, θα χρησιμοποιήσουμε ότι

$$x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow X(z)(1 - z^{-1}) = \frac{A(1 - z^{-1})}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - p_2z^{-1}\right)} \quad (16.131)$$

και το γεγονός ότι το σήμα  $x[n] - x[n-1]$  είναι απολύτως αθροίσιμο. Αφού είναι απολύτως αθροίσιμο, μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Αυτό σημαίνει ότι ο πόλος  $p_2$  ακυρώθηκε από το νεοεισαχθέντα όρο  $(1 - z^{-1})$  του αριθμητή. Άρα ο πόλος αυτός βρίσκεται στη θέση  $z = 1$ . Οπότε τελικά ο μετασχ.  $Z$  είναι

$$X(z) = A \frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \quad |z| > 1 \quad (16.132)$$

**16.5.1.9 Παραγωγή στο χώρο του  $Z$** 

Αν παραγωγίσουμε τον ορισμό του μετασχ.  $Z$ , έχουμε

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{d}{dz} z^{-n} \quad (16.133)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](-n)z^{-n+1} = zZ\{-nx[n]\} \quad (16.134)$$

Άρα η ιδιότητα της παραγωγίσης στη συχνότητα είναι η ακόλουθη

$$-nx[n] \longleftrightarrow z \frac{d}{dz}X(z) \quad (16.135)$$

με το πεδίο σύγκλισης να παραμένει  $R_x$ .

Άρα

$$\boxed{-nx[n] \longleftrightarrow z \frac{d}{dz}X(z), \quad R = R_x} \quad (16.136)$$

**Παράδειγμα 16.18:**

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Z του σήματος

$$x[n] = nu[n] \quad (16.137)$$

Λύση:  
Γνωρίζουμε ότι

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > a \quad (16.138)$$

και για  $a = 0$  έχουμε

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \quad (16.139)$$

Με την ιδιότητα της παραγωγισής στο χώρο του Z, θα έχουμε

$$x[n] = nu[n] \longleftrightarrow X(z) = -z \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad R_x = \{|z| > 1\} \quad (16.140)$$

**16.5.1.10 n-οστή παραγωγή στο χώρο του Z**

Επαναλαμβάνοντας  $n$  φορές τη διαδικασία της Παραγράφου 16.5.1.9, έχουμε ότι

$$(-1)^k n^k x[n] \longleftrightarrow z^k \frac{d^k}{dz^k} X(z) \quad (16.141)$$

με πεδίο σύγκλισης το  $R_x$ .  
Άρα

$$\boxed{(-1)^k n^k x[n] \longleftrightarrow z^k \frac{d^k}{dz^k} X(z), \quad R = R_x} \quad (16.142)$$

**Παράδειγμα 16.19:**

Ας υπολογίσουμε το μετασχ. Z του σήματος

$$x[n] = \delta[n] - n^2 u[n] \quad (16.143)$$

Λύση:  
Γνωρίζουμε από το προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1 \quad (16.144)$$

Με την ιδιότητα της  $n$ -οστής παραγωγισής στο χώρο του Z, θα έχουμε

$$x[n] = \delta[n] - n^2 u[n] \longleftrightarrow X(z) = 1 - (-1)^2 z^2 \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 - \frac{2z^{-1}}{(1 - z^{-1})^3}, \quad R_x = \{|z| > 1\} \quad (16.145)$$

**16.5.1.11 Άθροισμα στο χρόνο**

Για το σήμα  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ , το οποίο γράφεται ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] u[n - k] = x[n] * u[n] \quad (16.146)$$

θα έχουμε τον ακόλουθο μετασχ. Z

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] * u[n]) z^{-n} \quad (16.147)$$

$$= X(z)U(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}} \quad (16.148)$$

λόγω της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο, η οποία και ορίζει το πεδίο σύγκλισης ως  $R_y \supseteq R_x \cap \{|z| > 1\}$ .  
Άρα

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{X(z)}{1-z^{-1}}, \quad R \supseteq R_x \cap \{|z| > 1\} \quad (16.149)$$

### Παράδειγμα 16.20:

Ας βρούμε το μετασχ. Z του σήματος

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n a^k \cos(\omega_0 k) u[k] \quad (16.150)$$

Λύση:  
Το σήμα

$$x[n] = a^n \cos(\omega_0 n) u[n] \quad (16.151)$$

έχει μετασχ. Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(\omega_0 n) z^{-n} \quad (16.152)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{j\omega_0 n} z^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega_0 n} z^{-n} \quad (16.153)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{j\omega_0} z^{-1})^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\omega_0} z^{-1})^n \quad (16.154)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - a e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - a e^{-j\omega_0} z^{-1}} \quad (16.155)$$

$$= \frac{1 - a \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad (16.156)$$

με  $R_x = \{|z| > |a|\}$ , ώστε τα αθροίσματα να συγκλίνουν. Άρα ο μετασχ. Z του  $x[n]$  θα είναι

$$X(z) = \frac{1 - a \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad (16.157)$$

με το πεδίο σύγκλισης να είναι

$$R_x = \{|z| > a\} \quad (16.158)$$

Άρα ο μετασχ. Z του σήματος  $y[n]$  θα είναι

$$Y(z) = \frac{1 - a \cos(\omega_0) z^{-1}}{(1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2})(1 - z^{-1})} \quad (16.159)$$

με πεδίο σύγκλισης

$$R_y \supseteq R_x \cap \{|z| > 1\} = \{|z| > 1\} \quad (16.160)$$

αν  $|a| < 1$ , ή

$$R_y \supseteq R_x \cap \{|z| > 1\} = \{|z| > |a|\} \quad (16.161)$$

αν  $|a| > 1$ .

## 16.5.1.12 Θεώρημα Αρχικής Τιμής

Αν θεωρήσουμε ένα σήμα με την ιδιότητα  $x[n] = 0, n < 0$ , τότε ο μετασχ. Z του θα είναι

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x[n]}{z^n} \quad (16.162)$$

Τότε θα είναι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} = 0 \quad (16.163)$$

αν  $n > 0$ . Για  $n = 0$ , θα είναι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[n] \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} \Big|_{n=0} = 1 \quad (16.164)$$

Άρα

$$\boxed{x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)} \quad (16.165)$$

**Παράδειγμα 16.21:**

Έστω ένα σήμα που ικανοποιεί την ιδιότητα  $x[n] = 0, n < 0$ . Από τους παρακάτω μετασχ. Z, απορρίψτε αυτόν που δεν μπορεί να είναι πιθανός μετασχηματισμός Z για ένα τέτοιο σήμα.

$$X_1(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad (16.166)$$

$$X_2(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad (16.167)$$

Λύση:

Σύμφωνα με το θεώρημα αρχικής τιμής, θα πρέπει να ισχύει ότι  $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x[0]$ . Χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε το  $x[0]$  μπορούμε να απορρίψουμε τον μετασχ.  $X_1(z)$ , εφ' όσον γνωρίζουμε ότι το όριό του όταν  $z \rightarrow \infty$  δεν είναι πεπερασμένο - δείξτε το - ενώ για το μετασχ.  $X_2(z)$ , αυτό είναι πεπερασμένο. Αυτό μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι για ένα σήμα που ικανοποιεί την ιδιότητα  $x[n] = 0, n < 0$ , ο μετασχ. Z του δεν μπορεί να είναι ρητή συνάρτηση με πολυώνυμο αριθμητή μεγαλύτερου βαθμού από το αντίστοιχο του παρονομαστή.

## 16.5.1.13 Θεώρημα Τελικής Τιμής

Υποθέτοντας ότι  $x[n] = 0, n < 0$  και ότι το όριο  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x[n]$  υπάρχει, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$x[n] = x_\infty u[n] + x_1[n] \quad (16.168)$$

με  $x_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} x[n]$  και  $x_1[n]$  μια ακολουθία για την οποία ισχύει ότι  $x_1[n] = 0, n < 0$  και  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_1[n] = 0$ . Ο μετασχ. Z της παραπάνω σχέσης δίνει

$$X(z) = x_\infty \frac{1}{1 - z^{-1}} + X_1(z) \quad (16.169)$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $1 - z^{-1}$  και τα δυο μέλη, έχουμε

$$(1 - z^{-1})X(z) = (1 - z^{-1})x_\infty \frac{1}{1 - z^{-1}} + (1 - z^{-1})X_1(z) \quad (16.170)$$

και παίρνοντας το όριο

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) = x_\infty + \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X_1(z) \quad (16.171)$$

έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow 1} X(z) = x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x[n] \quad (16.172)$$

Άρα

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)} \quad (16.173)$$

**Παράδειγμα 16.22:**

Για το σήμα

$$x[n] = \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{2} \right] u[n] \quad (16.174)$$

βρείτε το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] \quad (16.175)$$

Λύση:

Σύμφωνα με το θεώρημα τελικής τιμής, το σήμα ικανοποιεί τη σχέση  $x[n] = 0, n < 0$ , και άρα θα έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad R_x = \{|z| > 1\} \cap \{|z| > \frac{1}{2}\} = \{|z| > 1\} \quad (16.176)$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) = - \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{\frac{1}{2}}{1 - z^{-1}} = -\frac{1}{2} \quad (16.177)$$

αποτέλεσμα που μπορούμε να επιβεβαιώσουμε και με απ' ευθείας υπολογισμό του ορίου στο σήμα του χρόνου:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{1}{2} \right] u[n] = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad (16.178)$$

■

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων του μονόπλευρου μετασχ. Z που διαφέρουν από αυτές του δίπλευρου αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη (Ασκήσεις XXXX, XXXX, XXXX, XXXX).

## 16.6 Κατηγορίες σημάτων και η σχέση τους με το Μετασχ. Z

Ας κάνουμε μια μικρή αναφορά σε ένα είδος κατηγοριοποίησης σημάτων με βάση τη διάρκειά τους στο χρόνο, και ας δούμε τη σχέση τους με το μετασχ. Z.

Ένα σήμα λέγεται **δεξιόπλευρο** όταν οι μη-μηδενικές τιμές του ξεκινούν από ένα σημείο  $n_0$  στο χρόνο και εκτείνονται ως το  $+\infty$  (με άλλα λόγια, όταν πριν από κάποιο χρονικό σημείο  $n_0$  οι τιμές του σήματος είναι μηδέν), δηλ.

$$\text{δεξιόπλευρο σήμα: } x[n] = 0, \quad n < n_0 \quad (16.179)$$

για κάποιο  $n_0$ . Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad (16.180)$$

$$x_2[n] = u[n + 5] \quad (16.181)$$

$$x_3[n] = nu[n - 2] \quad (16.182)$$

είναι δεξιόπλευρα, αλλά όχι και τα

$$x_1[n] = a^n u[-n - 1] \quad (16.183)$$

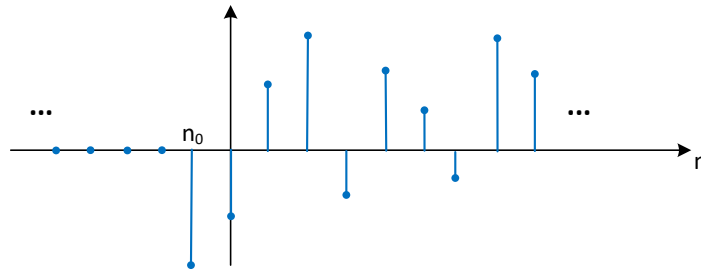
$$x_2[n] = u[-5 - n] \quad (16.184)$$

$$x_3[n] = nu[2 - n] \quad (16.185)$$

$$x_4[n] = n^2 + 1 \quad (16.186)$$

διότι είτε έχουν μη-μηδενικές τιμές σε κάθε χρονική στιγμή, είτε δεν υπάρχει κάποιο χρονικό διάστημα  $(-\infty, n_0]$  για το οποίο οι τιμές του σήματος να είναι μηδέν. Παρακάτω, στο Σχήμα 16.14, φαίνεται πώς μοιάζει ένα δεξιόπλευρο σήμα. Ένα σήμα λέγεται **αριστερόπλευρο** όταν οι μη-μηδενικές τιμές του ξεκινούν από ένα σημείο  $n_0$  στο χρόνο και εκτείνονται ως το  $-\infty$  (με άλλα λόγια, όταν μετά από κάποιο χρονικό σημείο  $n_0$  οι τιμές του σήματος είναι μηδέν), δηλ.

$$x[n] = 0, \quad n > n_0 \quad (16.187)$$



Σχήμα 16.14: Δεξιόπλευρο σήμα.

Για παράδειγμα, τα σήματα

$$x_1[n] = -a^n u[-n - 1] \tag{16.188}$$

$$x_2[n] = u[-n + 5] \tag{16.189}$$

$$x_3[n] = nu[-n - 2] \tag{16.190}$$

είναι αριστερόπλευρα, αλλά όχι και τα

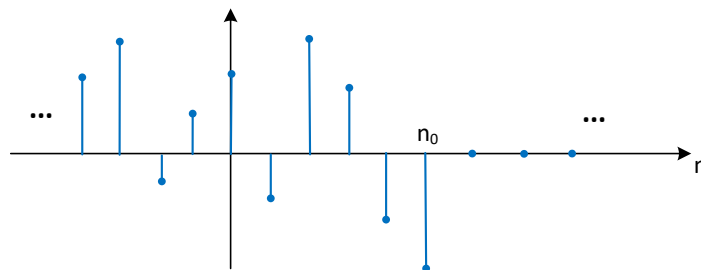
$$x_1[n] = a^n u[n + 3] \tag{16.191}$$

$$x_2[n] = u[n + 5] \tag{16.192}$$

$$x_3[n] = nu[3 + n] \tag{16.193}$$

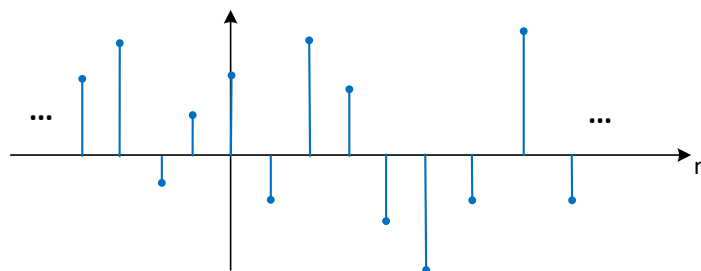
$$x_4[n] = n^2 + 1 \tag{16.194}$$

διότι είτε έχουν μη-μηδενικές τιμές σε κάθε χρονική στιγμή, είτε δεν υπάρχει κάποιο χρονικό διάστημα  $[n_0, +\infty)$  για το οποίο οι τιμές του σήματος να είναι μηδέν. Παρακάτω, στο Σχήμα 16.15 φαίνεται πώς μοιάζει ένα αριστερόπλευρο σήμα. Υπάρχουν και τα **αμφίπλευρα** σήματα, που δεν είναι ούτε αριστερόπλευρα ούτε δεξιόπλευρα, δηλ.



Σχήμα 16.15: Αριστερόπλευρο σήμα.

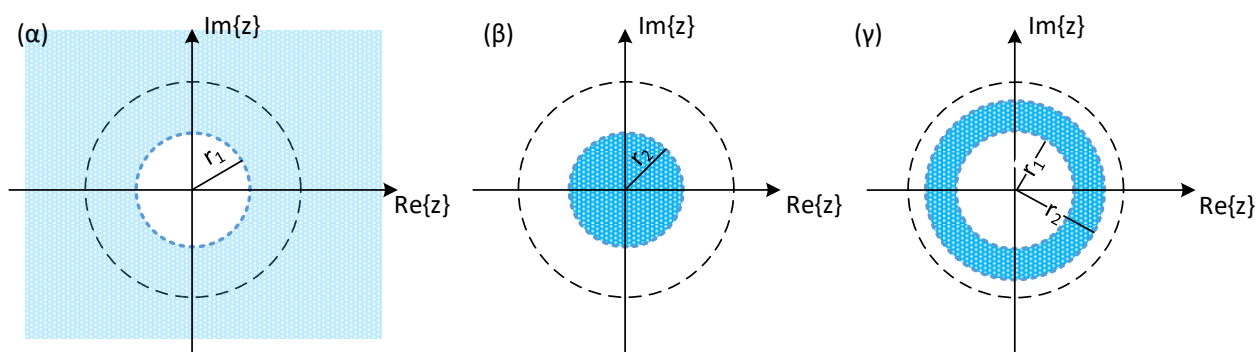
εκτείνονται με εν γένει μη μηδενικές τιμές από το  $-\infty$  ως το  $+\infty$  στο χρόνο, όπως αυτό του Σχήματος 16.16.



Σχήμα 16.16: Αμφίπλευρο σήμα.

Πώς μεταφράζεται αυτή η κατηγοριοποίηση των σημάτων, όσον αφορά το μετασχηματισμό Z, και κυρίως την περιοχή σύγκλισής τους;

- Αποδεικνύεται ότι τα δεξιόπλευρα σήματα έχουν περιοχή σύγκλισης ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που ξεκινάει από έναν κύκλο και εκτείνεται προς τα “έξω”, προς το  $\pm\infty$ . Αυτό μαθηματικά γράφεται ως  $|z| > |r_1|$ . Το Παράδειγμα 16.1 στην Ενότητα 16.3 είναι ένα δεξιόπλευρο σήμα. Δείτε το ROC του. Γενικότερα, το ROC ενός τέτοιου σήματος φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 16.17(α) και συχνά θα το αναφέρουμε ως “εξωστρεφές”.
- Επίσης, τα αριστερόπλευρα σήματα έχουν περιοχή σύγκλισης ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που ξεκινάει από έναν κύκλο και εκτείνεται προς τα “μέσα”, προς το 0. Αυτό γράφεται μαθηματικά ως  $|z| < |r_1|$ . Το Παράδειγμα 16.2 στην Ενότητα 16.3 είναι ένα αριστερόπλευρο σήμα. Δείτε το ROC του. Γενικότερα, το ROC ενός τέτοιου σήματος φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 16.17(β) και συχνά θα το αναφέρουμε ως “εσωστρεφές”.
- Τα αμφίπλευρα σήματα έχουν περιοχή σύγκλισης ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που αποτελεί ένα δακτύλιο ανάμεσα σε δυο πόλους. Αυτό γράφεται μαθηματικά ως  $|r_1| < |z| < |r_2|$ . Το Παράδειγμα 16.3 στην Ενότητα 16.3 είναι ένα αμφίπλευρο σήμα. Γενικότερα, το ROC ενός τέτοιου σήματος φαίνεται στο Σχήμα 16.17(γ).



Σχήμα 16.17: Πεδίο σύγκλισης (α) δεξιόπλευρου, (β) αριστερόπλευρου, (γ) αμφίπλευρου σήματος.

Επίσης, ένα σήμα  $x[n]$  λέγεται **αιτιατό**, όταν ισχύει  $x[n] = 0, n < 0$ , δηλαδή όταν οι τιμές του είναι μηδέν πριν τη χρονική στιγμή  $n = 0$ . Τα σήματα

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad (16.195)$$

$$x_2[n] = a^n u[n - 6] \quad (16.196)$$

$$x_3[n] = -u[n - 1] \quad (16.197)$$

είναι αιτιατά αλλά όχι τα

$$x_1[n] = a^n u[n + 1] \quad (16.198)$$

$$x_2[n] = a^n u[n + 6] \quad (16.199)$$

$$x_3[n] = -u[n + 1] \quad (16.200)$$

γιατί έχουν μη-μηδενικές τιμές πριν τη χρονική στιγμή  $n = 0$ . Όπως είναι φανερό, ένα αιτιατό σήμα δεν μπορεί να είναι αριστερόπλευρο (αλλά σίγουρα είναι δεξιόπλευρο). Η γραφική παράσταση ενός αιτιατού σήματος διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 16.18. Το ROC ενός αιτιατού σήματος είναι όπως το ROC που φαίνεται για το δεξιόπλευρο σήμα, δηλ. ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που εκτείνεται από έναν κύκλο και προς το  $\infty$ .

Ένα σήμα  $x[n]$  λέγεται **αντι-αιτιατό**, όταν ισχύει  $x[n] = 0, n > 0$ , δηλαδή όταν οι τιμές του είναι μηδέν μετά τη χρονική στιγμή  $n = 0$ . Τα σήματα

$$x_1[n] = -a^n u[-n - 1] \quad (16.201)$$

$$x_2[n] = a^n u[-n - 6] \quad (16.202)$$

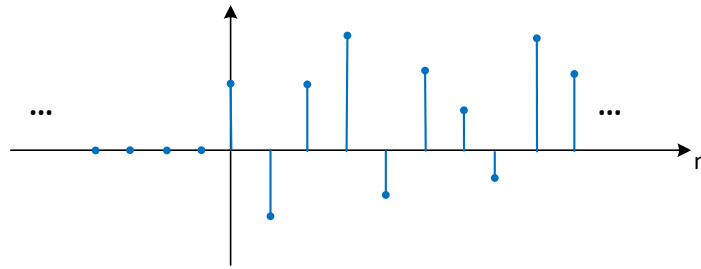
$$x_3[n] = -u[-n - 3] \quad (16.203)$$

είναι αντι-αιτιατά αλλά όχι τα

$$x_1[n] = a^n u[-n + 1] \quad (16.204)$$

$$x_2[n] = a^n u[-n + 6] \quad (16.205)$$

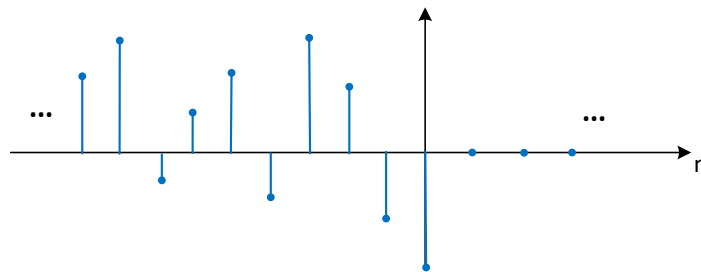




Σχήμα 16.18: Αιτιατό σήμα.

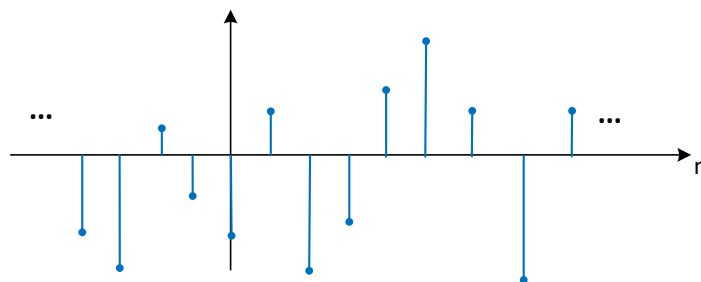
$$x_3[n] = -u[-n + 1] \quad (16.206)$$

γιατί έχουν μη-μηδενικές τιμές μετά τη χρονική στιγμή  $n = 0$ . Όπως είναι φανερό, ένα αντί-αιτιατό σήμα δεν μπορεί να είναι δεξιόπλευρο (αλλά είναι σίγουρα αριστερόπλευρο). Η γραφική παράσταση ενός αντί-αιτιατού σήματος διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 16.19. Το ROC ενός αντι-αιτιατού σήματος είναι όπως το ROC



Σχήμα 16.19: Αντιαιτιατό σήμα.

που φαίνεται για το αριστερόπλευρο σήμα, δηλ. ένα κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που εκτείνεται από έναν κύκλο και προς το 0.



Σχήμα 16.20: Μη αιτιατό σήμα.

Τέλος, ένα σήμα λέγεται **μη αιτιατό** όταν έχει μη-μηδενικές τιμές και σε θετικούς και σε αρνητικούς χρόνους. Ένα μη αιτιατό σήμα διακριτού χρόνου φαίνεται στο Σχήμα 16.20.

Όπως καταλαβαίνετε, μας ενδιαφέρουν λίγο παραπάνω τα αιτιατά σήματα γιατί αυτά είναι πραγματοποιήσιμα (δεν υπάρχει στην πράξη αρνητικός χρόνος! ☺). Βέβαια, κάποια μη αιτιατά σήματα μπορούν να γίνουν αιτιατά αν τους κάνουμε μια μετατόπιση στο χρόνο, ενώ αν δεν περιοριζόμαστε σε υλοποιήσιμους πραγματικούς χρόνους τότε ακόμα και μη αιτιατά συστήματα είναι πραγματοποιήσιμα.

## 16.7 Πίνακες Μετασχηματισμού Z

Ευτυχώς, υπάρχουν διαθέσιμοι πίνακες που μας δίνουν γνωστά ζεύγη μετασχηματισμών Z, και αυτούς χρησιμοποιούμε για να δουλεύουμε χωρίς να χρησιμοποιούμε τον ορισμό. Ένας τέτοιος πίνακας δίνεται στον πίνακα 16.2.

Πίνακας Μετασχηματισμών Z			
Σήμα	Μετ. Z	ROC	Κατηγορία σήματος
$\delta[n]$	1	όλο το z	αιτιατό
$\delta[n - n_0], n_0 > 0$	$z^{-n_0}$	$z \neq 0$	αιτιατό
$\delta[n + n_0], n_0 > 0$	$z^{n_0}$	$z \neq \infty$	αντι-αιτιατό
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z  < 1$	αντι-αιτιατό
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  >  a $	αιτιατό
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z  <  a $	αντι-αιτιατό
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$-nu[-n - 1]$	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$	$ z  < 1$	αντι-αιτιατό
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  >  a $	αιτιατό
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$	$ z  <  a $	αντι-αιτιατό
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - z^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2z^{-1} \cos(\omega_0) + z^{-2}}$	$ z  > 1$	αιτιατό
$a^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1 - az^{-1} \cos(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $	αιτιατό
$a^n \sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{az^{-1} \sin(\omega_0)}{1 - 2az^{-1} \cos(\omega_0) + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $	αιτιατό

Πίνακας 16.2: Πίνακας με γνωστά ζευγη μετασχ. Z

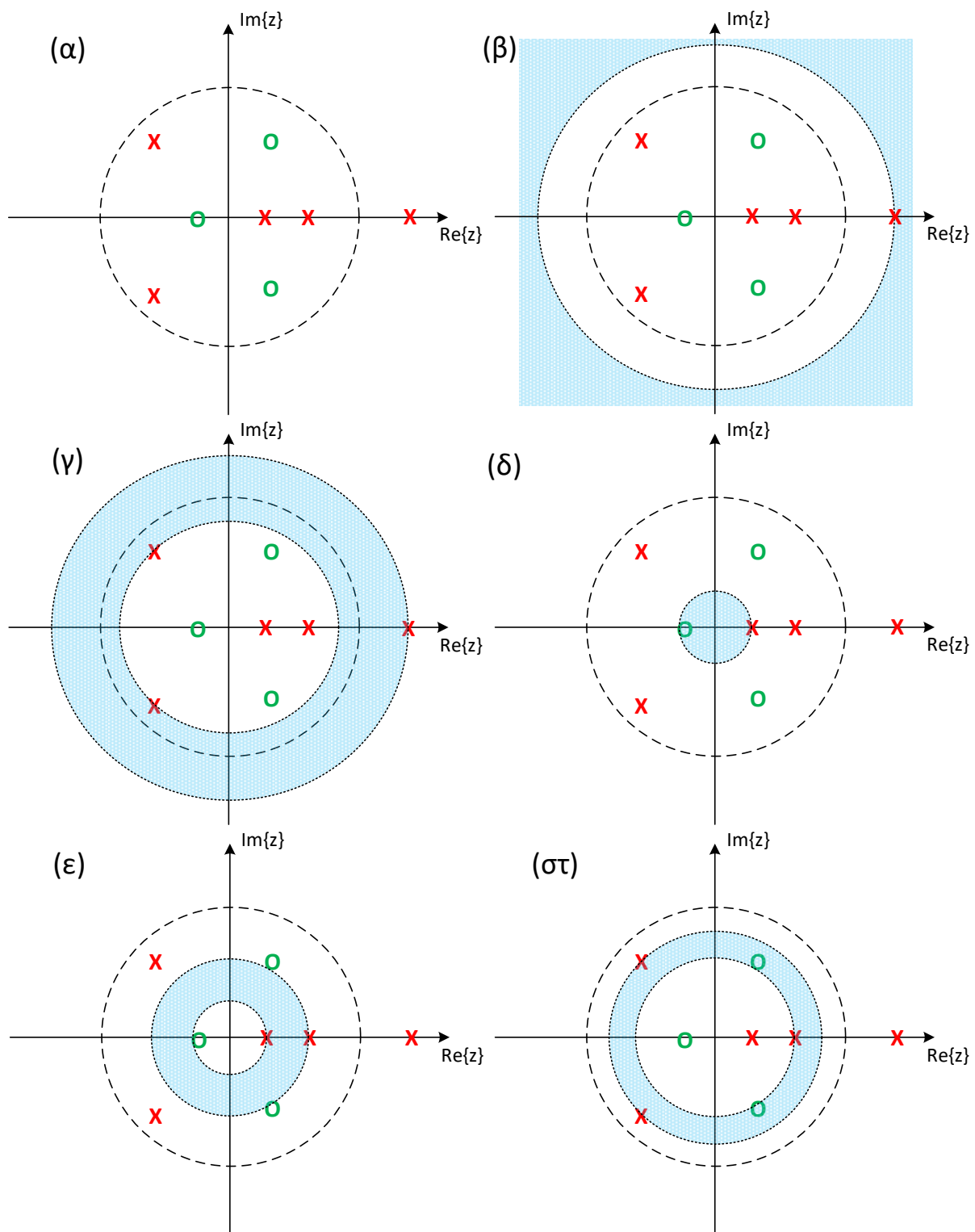
## 16.8 Ιδιότητες Περιοχής Σύγκλισης

Οι ιδιότητες του πεδίου σύγκλισης (ROC στο εξής) παρατίθενται παρακάτω<sup>3</sup>:

1. Το ROC είναι ένας δακτυλιός, ένας δίσκος με κέντρο την αρχή των αξόνων, ή μια περιοχή εκτός ενός δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων.
2. Ο μετασχ. Fourier μπορεί να υπολογιστεί από το μετασχ. Z, αν και μόνο αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z του σήματος περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.
3. Το ROC δεν πρέπει να περιέχει ποτέ πόλους!
4. Αν το  $x[n]$  είναι πεπερασμένης διάρκειας, τότε το πεδίο σύγκλισης είναι ολο το z-επίπεδο, εκτός ίσως από το  $z = 0$  ή το  $z = \infty$ .
5. Αν το  $x[n]$  είναι δεξιόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης εκτείνεται από το μακρινότερο από το  $z = 0$  πόλο (αυτον με το μεγαλύτερο μέτρο) και ως το  $\infty$ , δηλ. είναι της μορφής  $|z| > |a|$ , με  $a$  τον μακρινότερο πόλο.
6. Αν το  $x[n]$  είναι αριστερόπλευρο, το πεδίο σύγκλισης εκτείνεται από το κοντινότερο στο  $z = 0$  πόλο (αυτον με το μικρότερο μέτρο) και ως το 0, δηλ. είναι της μορφής  $|z| < |b|$ , με  $b$  τον κοντινότερο πόλο.
7. Αν το  $x[n]$  είναι αμφίπλευρο, το πεδίο σύγκλισης αποτελείται από έναν δακτυλιο, που φράσσεται δεξιά και αριστερα του από πόλους, δηλ. είναι της μορφής  $|a| < |z| < |b|$ , με  $|a| < |b|$  πόλους, και κανέναν άλλο πόλο ενδιάμεσα των  $|a|, |b|$ .

Ας δούμε το Σχήμα 16.21. Έστω το σήμα  $x[n]$  με μετασχ. Z  $X(z)$  ο οποίος έχει πραγματικούς πόλους

<sup>3</sup>Είναι αντίστοιχες με αυτές του Μετασχ. Laplace στη μελέτη σημάτων συνεχούς χρόνου...



Σχήμα 16.21: Πιθανά πεδία σύγκλισης ενός σήματος με τρεις πραγματικούς και δυο συζυγείς μιγαδικούς πόλους.

$z_r = a < b < c$  και συζυγείς μιγαδικούς πόλους  $z_c = d, d^*$ , με  $b < |d| < c$  όπως στο Σχήμα 16.21(α). Επίσης, έστω ότι τα μηδενικά βρίσκονται στις θέσεις  $z_o = e, e^*, f$ , τα οποία όμως δεν σχετίζονται με το πεδίο σύγκλισης.

Τα πιθανά πεδία σύγκλισης του μετασχηματισμού φαίνονται στα Σχήματα 16.21(β,γ,δ,ε,στ), εφαρμόζοντας απλά τις ιδιότητες που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Στο Σχήμα 16.21(β), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : |z| > c \tag{16.207}$$

και σύμφωνα με όσα έχουμε πει, αντιστοιχεί σε ένα δεξιόπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], b^n u[n], c^n u[n], d^n u[n], (d^*)^n u[n]\} \quad (16.208)$$

Στο Σχήμα 16.21(γ), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : |d| < |z| < c \quad (16.209)$$

και αντιστοιχεί σε ένα αμφίπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], b^n u[n], -c^n u[-n-1], -d^n u[-n-1], -(d^*)^n u[-n-1]\} \quad (16.210)$$

αφού το πεδίο σύγκλισης  $|d| < |z| < c$  προκύπτει ως η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης

$$ROC = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{|z| > a\} \cap \{|z| > b\} \cap \{|z| < c\} \cap \{|z| > |d|\} \quad (16.211)$$

Στο Σχήμα 16.21(δ), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : |z| < a \quad (16.212)$$

και αντιστοιχεί σε ένα αριστερόπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{-a^n u[-n-1], -b^n u[-n-1], -c^n u[-n-1], -d^n u[-n-1], -(d^*)^n u[-n-1]\} \quad (16.213)$$

Στο Σχήμα 16.21(ε), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : a < |z| < b \quad (16.214)$$

και αντιστοιχεί σε ένα αμφίπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], -b^n u[-n-1], -c^n u[-n-1], -d^n u[-n-1], -(d^*)^n u[-n-1]\} \quad (16.215)$$

αφού το πεδίο σύγκλισης  $a < |z| < b$  προκύπτει ως η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης

$$ROC = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{|z| > a\} \cap \{|z| < b\} \cap \{|z| < c\} \cap \{|z| > |d|\} \quad (16.216)$$

Στο Σχήμα 16.21(στ), το πεδίο σύγκλισης είναι

$$ROC : b < |z| < |d| \quad (16.217)$$

και αντιστοιχεί ξανά σε ένα αμφίπλευρο σήμα. Οπότε το σήμα στο χρόνο θα περιέχει μέσα όρους της μορφής

$$x[n] = f\{a^n u[n], b^n u[n], -c^n u[-n-1], -d^n u[-n-1], -(d^*)^n u[-n-1]\} \quad (16.218)$$

αφού το πεδίο σύγκλισης  $b < |z| < |d|$  προκύπτει ως η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης

$$ROC = R_1 \cap R_2 \cap R_3 = \{|z| > a\} \cap \{|z| > b\} \cap \{|z| < c\} \cap \{|z| < |d|\} \quad (16.219)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι αν έχουμε  $N$  διακριτούς πραγματικούς πόλους, τότε έχουμε  $N + 1$  πιθανά πεδία σύγκλισης.

## 16.9 Διάγραμμα Πόλων-Μηδενικών

Η προηγούμενη παράγραφος έκανε εμφανές ότι όταν μιλάμε για σήματα (και πολύ σύντομα, για συστήματα) στο χώρο του μετασχηματισμού  $Z$ , μας ενδιαφέρει να μπορούμε να γνωρίζουμε τους πόλους και τα μηδενικά τους και να μπορούμε να σχεδιάζουμε το περίφημο **διάγραμμα πόλων-μηδενικών**. Θα επικεντρωθούμε σε μετασχηματισμούς που έχουν ρητή μορφή (λόγος πολυωνύμων του  $z$ ), όπως όλοι όσοι έχουμε δει ως τώρα, αφού στην πράξη είναι πολύ συχνά εμφανιζόμενοι<sup>4</sup>. Ας θυμηθούμε τους ορισμούς: για ένα ρητό μετασχ.  $Z$ , **μηδενικά** ονομάζονται οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου μηδενίζεται ο μετασχ.  $Z$  (πιθανές τέτοιες θέσεις: οι ρίζες του πολυωνύμου του αριθμητή) και **πόλοι** ονομάζονται οι θέσεις του μιγαδικού επιπέδου όπου απειρίζεται ο μετασχ.  $Z$  (πιθανές τέτοιες θέσεις: οι ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή). Γενικότερα, μηδενικά λέγονται τα σημεία

<sup>4</sup>Όταν μιλήσουμε για εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα, αυτό θα γίνει εμφανέστερο.

του μιγαδικού επιπέδου που μηδενίζουν το μετασχηματισμό, ενώ πόλοι λέγονται τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου που τον απειρίζουν.

Ένας ρητός μετασχηματισμός Z μπορεί να γραφεί γενικότερα ως:

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}} \quad (16.220)$$

όπου  $M, N$  ο βαθμός των πολυωνύμων. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με  $z^M$  και  $z^N$  αντίστοιχα, θα έχουμε:

$$X(z) = z^{N-M} \frac{a_0 z^M + a_1 z^{M-1} + a_2 z^{M-2} + \dots + a_M}{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_N} \quad (16.221)$$

Παραγοντοποιώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{k=1}^N (z - \lambda_k)}, \quad (16.222)$$

με  $\xi_k, \lambda_k$  τα μηδενικά και οι πόλοι αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι υπάρχουν  $M$  μηδενικά και  $N$  πόλοι, ενώ

- αν  $N > M$  τότε υπάρχουν επιπλέον  $N - M$  μηδενικά στο  $z = 0$  (δηλ. ένα μηδενικό τάξης  $N - M$ ), και
- αν  $N < M$  υπάρχουν επιπλέον  $M - N$  πόλοι στο  $z = 0$  (δηλ. ένας πόλος τάξης  $N - M$ ).

Άρα βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Z έχει τόσους πόλους όσα και μηδενικά!

Αν πάλι ο μετασχ. Z είναι της μορφής

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0} \frac{\prod_{k=1}^M (z - \xi_k)}{\prod_{k=1}^N (z - \lambda_k)}, \quad (16.223)$$

τότε υπάρχουν  $M$  μηδενικά και  $N$  πόλοι, ενώ

- αν  $N > M$ , τότε υπάρχουν  $N - M$  μηδενικά στο  $\infty$ , και
- αν  $N < M$ , τότε υπάρχουν  $M - N$  πόλοι στο  $\infty$ .

Άρα και πάλι βλέπετε ότι κάθε ρητός μετασχ. Z έχει τόσους πόλους όσα και μηδενικά.

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι ο μετασχ. Z καθορίζεται πλήρως από τη θέση των πόλων και των μηδενικών του, πέραν μιας σταθεράς  $a_0/b_0$ . Η σταθερά αυτή επηρεάζει μόνο το πλάτος του σήματος, ενώ οι πόλοι και τα μηδενικά καθορίζουν τη συμπεριφορά του, όπως έχουμε ήδη δει στα παραδείγματα.

Για παράδειγμα, στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 16.21, μπορούμε να εξάγουμε το μετασχ. Z που αντιστοιχεί σε αυτό, και είναι

$$X(z) = A \frac{(z - e)(z - e^*)(z - f)}{(z - d)(z - d^*)(z - a)(z - b)(z - c)} \quad (16.224)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 μηδενικά και 5 πόλοι. Άρα υπάρχουν 2 επιπλέον μηδενικά στο  $\infty$  (που δεν έχουν σχεδιαστεί).

Ας δούμε μερικά ακόμα παραδείγματα.

### Παράδειγμα 16.23:

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} \quad (16.225)$$

Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z + 3}{z^2 - 3z + 2}. \quad (16.226)$$

Πρέπει να βρούμε τις ρίζες του αριθμητή και του παρονομαστή. Άρα λύνουμε λοιπόν τις αντίστοιχες εξισώσεις:

$$z^2 - 2z + 3 = 0 \implies z = 1 + j\sqrt{2} \text{ ή } z = 1 - j\sqrt{2} \quad (16.227)$$

$$z^2 - 3z + 2 = 0 \implies z = 2 \text{ ή } z = 1 \quad (16.228)$$

Προφανώς το σύστημα είναι ΠΙΡ, αφού εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του  $z^{-1}$ .

Άρα έχουμε δυο μηδενικά στις θέσεις  $z = 1 + j\sqrt{2}$  και  $z = 1 - j\sqrt{2}$ , και δυο πόλους στις θέσεις  $z = 2$  και  $z = 1$ . Το πλήθος των πόλων είναι ίσο με αυτό των μηδενικών. Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται παρακάτω, στο Σχήμα 16.22(α).

### Παράδειγμα 16.24:

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{8})}{z(z+0.15)(z-0.3)} \quad (16.229)$$

Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι ήδη παραγοντοποιημένη και βλέπουμε πολύ εύκολα τους πόλους και τα μηδενικά από την εξίσωση. Έχουμε 3 μηδενικά στις θέσεις  $z = 1, z = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{8}$  και 3 πόλους στις θέσεις  $z = 0, z = -0.15, z = 0.3$ . Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται παρακάτω, στο Σχήμα 16.22(β).

### Παράδειγμα 16.25:

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = 2 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} \quad (16.230)$$

Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  γράφεται ως

$$H(z) = 2 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2} = z^{-2}(2z^2 + z + \frac{1}{4}) = \frac{2z^2 + z + \frac{1}{4}}{z^2} \quad (16.231)$$

Άρα έχουμε να λύσουμε τις εξισώσεις

$$2z^2 + z + \frac{1}{4} = 0 \iff z = -0.25 + j0.25, z = -0.25 - j0.25 \quad (16.232)$$

$$z^2 = 0 \iff z = 0, \text{ διπλή ρίζα.} \quad (16.233)$$

Έχουμε δυο μηδενικά στις θέσεις  $z = -0.25 + j0.25, z = -0.25 - j0.25$  και δυο πόλους στη θέση  $z = 0$ . Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 16.22(γ).

**Παράδειγμα 16.26:**

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} \tag{16.234}$$

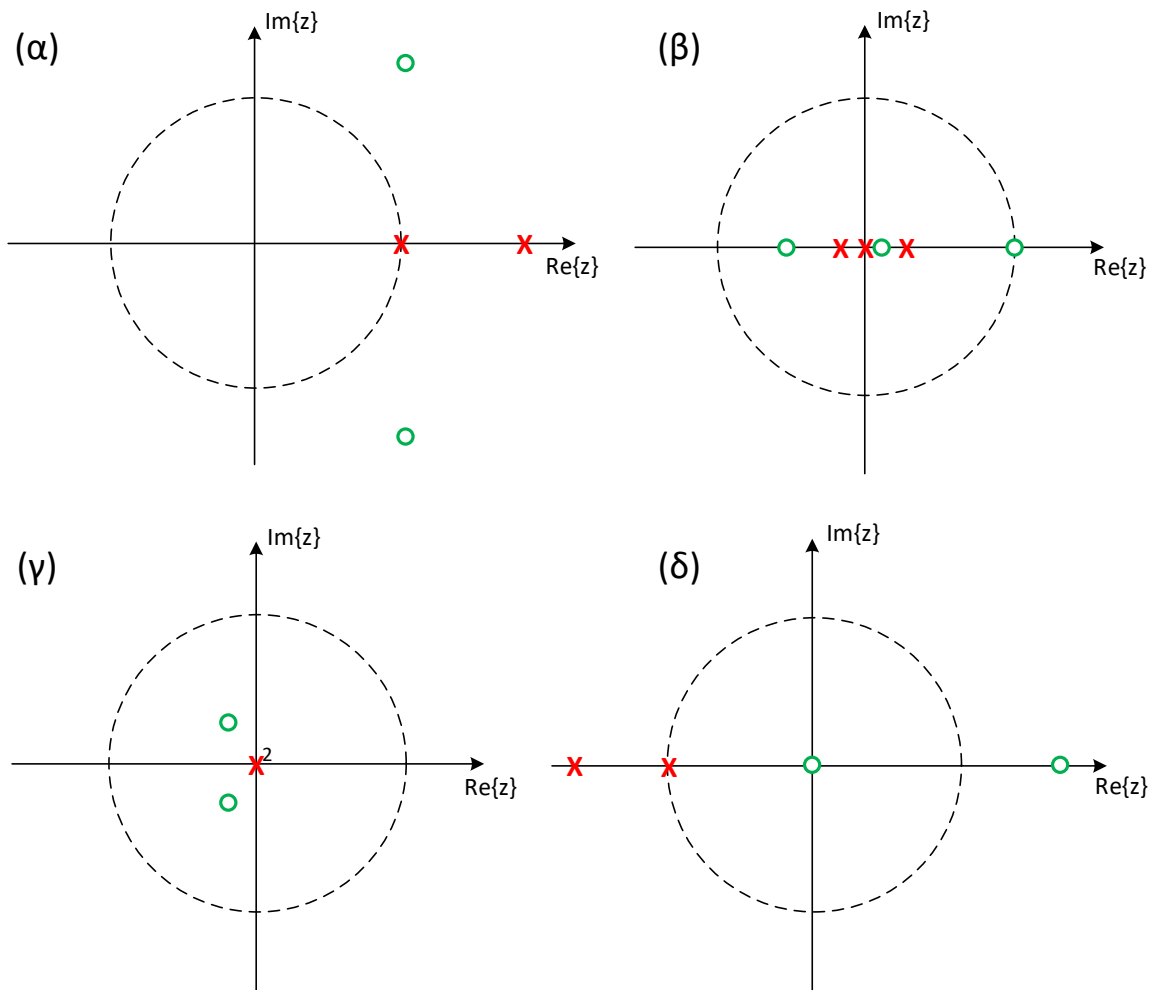
Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z - 2)}{z^2 + 3z + 2} \tag{16.235}$$

Προφανώς τα μηδενικά είναι στις θέσεις  $z = 0, z = 2$ , ενώ οι πόλοι είναι στις θέσεις  $z = -2, z = -1$ . Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνεται στο Σχήμα 16.22(δ).



Σχήμα 16.22: Διαγράμματα Πόλων-Μηδενικών Παραδειγμάτων.

Μπορείτε να αναγνωρίσετε τα πιθανά πεδία σύγκλισης κάθε μετασχηματισμού από τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών του Σχήματος 16.22; ©



## 16.10 Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

Στην Παράγραφο 16.1, είδαμε ότι ο αντίστροφος μετασχ. Z δίνεται ως

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (16.236)$$

και αποτελεί ένα ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο επάνω σε κλειστή καμπύλη  $C$  που περιέχει τη συμβολή των αξόνων και βρίσκεται εντός του πεδίου σύγκλισης, και με φορά ολοκλήρωσης την αντίστροφη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Για να υπολογίσει κανείς το παραπάνω ολοκλήρωμα απαιτείται το *θεώρημα ολοκλήρωσης του Cauchy*, καθώς και το *θεώρημα υπολοίπων* της μιγαδικής ανάλυσης. Τα δυο αυτά θεωρήματα ανήκουν στον τομέα της Μιγαδικής Ανάλυσης, τον οποίο δε θεωρούμε ότι κατέχετε ☺. Εναλλακτικά, θα χρησιμοποιήσουμε τρεις άλλες μεθόδους:

1. Το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρές
2. Τη μακρά διαίρεση
3. Το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Ας τα δούμε, μαζί με χαρακτηριστικά παραδείγματα.

### 16.10.1 Ανάπτυγμα σε Δυναμοσειρά

Σκοπός μας σε αυτή τη μέθοδο είναι να αναπτύξουμε το μετασχ. Z ως

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{-n} \quad (16.237)$$

δηλ. ως μια δυναμοσειρά απείρων όρων, η οποία θα πρέπει να συγκλίνει εντός της περιοχής σύγκλισης του μετασχηματισμού. Γνωρίζουμε όμως ότι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \quad (16.238)$$

από τον ορισμό του μετασχ. Z. Επειδή η αναπαράσταση μιας συνάρτησης από άπειρους όρους είναι μονοσήμαντη, θα πρέπει

$$x[n] = a_n \quad \forall n \quad (16.239)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 16.27:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του σήματος

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a| \quad (16.240)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad (16.241)$$

για  $|x| \leq 1$ . Για  $x = az^{-1}$ , έχουμε

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (az^{-1})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n \right) z^{-n} \quad (16.242)$$



Από την παραπάνω σχέση εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$x[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n u[n-1] \quad (16.243)$$

■

### Παράδειγμα 16.28:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του σήματος

$$X(z) = \cos(z) \quad (16.244)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (16.245)$$

Για  $x = z$ , θα είναι

$$X(z) = \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (16.246)$$

Θέτοντας  $k = -2n \iff n = -k/2$ , με την απαίτηση το  $k$  να είναι άρτιος, έχουμε

$$X(z) = \sum_{k=0}^{-\infty} (-1)^{-\frac{k}{2}} \frac{z^{-k}}{(-k)!} = \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^{-\frac{k}{2}}}{(-k)!} z^{-k} \quad (16.247)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$x[n] = \frac{(-1)^{-\frac{n}{2}}}{(-n)!} \quad (16.248)$$

για  $n < 0$  και άρτιο.

■

### Παράδειγμα 16.29:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του αιτιατού σήματος

$$X(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-5}} \quad (16.249)$$

Λύση:

Με χρήση γεωμετρικών σειρών, έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1 - 4z^{-5}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (4z^{-5})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n z^{-5n} = 1 + 4z^{-5} + 16z^{-10} + \dots \quad (16.250)$$

Ο αντίστροφος μετασχ. Z θα είναι

$$x[n] = Z^{-1}\{1 + 4z^{-5} + 16z^{-10} + \dots\} = \delta[n] + 4\delta[n-5] + 16\delta[n-10] + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} 4^k \delta[n-5k] \quad (16.251)$$

### 16.10.2 Μακρά Διαίρεση

Η μακρά διαίρεση - αν και όχι τόσο δημοφιλής - μπορεί να χρησιμοποιηθεί όταν ο μετασχ. Ζ  $X(z)$  αποτελείται από λόγο πολυωνύμων και η διαίρεσή τους είναι απλή. Επίσης, χρησιμοποιείται αν θέλουμε να βρούμε μερικές από τις πρώτες τιμές του σήματος στο χρόνο  $x[n]$ . Το μειονέκτημά της είναι ότι μπορεί να οδηγήσει σε μη κλειστή μορφή εξίσωσης του  $x[n]$ , και ότι δεν εφαρμόζεται σε αμφίπλευρα σήματα.

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 16.30:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Ζ του σήματος

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (16.252)$$

Λύση:

Παρ' όλο που ο παραπάνω αντίστροφος είναι γνωστός, ας δούμε πως εφαρμόζεται η μακρά διαίρεση στο Σχήμα 16.23α'. Άρα

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots \quad (16.253)$$

Ο αντίστροφος μετασχ. Ζ τότε θα είναι

$$x[n] = Z^{-1}\{1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots\} = \delta[n] + a\delta[n-1] + a^2\delta[n-2] + \dots \quad (16.254)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \delta[n-k] = a^n u[n] \quad (16.255)$$

#### Παράδειγμα 16.31:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Ζ του σήματος

$$X(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (16.256)$$

Λύση:

Η μακρά διαίρεση φαίνεται στο Σχήμα 16.23β'. Άρα

$$X(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = 2 + 2z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (16.257)$$

Ο αντίστροφος μετασχ. Ζ τότε θα είναι

$$x[n] = Z^{-1}\{2 + 2z^{-1} + z^{-2} + \dots\} = 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + \dots \quad (16.258)$$

1	1 - az <sup>-1</sup>
-1 + az <sup>-1</sup>	1 + az <sup>-1</sup> + a <sup>2</sup> z <sup>-2</sup> + ...
az <sup>-1</sup>	
-(-a <sup>2</sup> z <sup>-2</sup> + az <sup>-1</sup> )	
a <sup>2</sup> z <sup>-2</sup>	
-(-a <sup>3</sup> z <sup>-3</sup> + a <sup>2</sup> z <sup>-2</sup> )	
a <sup>3</sup> z <sup>-3</sup>	
...	

(α') Μακρά Διαίρεση του Παραδείγματος 16.30.

2 + z <sup>-1</sup>	1 - 0.5z <sup>-1</sup>
-2 + z <sup>-1</sup>	2 + 2z <sup>-1</sup> + z <sup>-2</sup> + ...
2z <sup>-1</sup>	
-(-z <sup>-2</sup> + 2z <sup>-1</sup> )	
z <sup>-2</sup>	
-(-0.5z <sup>-3</sup> + z <sup>-2</sup> )	
0.5z <sup>-3</sup>	
...	

(β') Μακρά Διαίρεση του Παραδείγματος 16.31.

Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός υπολογίζεται πιο εύκολα αν τον γράψουμε ως

$$X(z) = \frac{2 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.259)$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (16.260)$$

Δεδομένου του πεδίου σύγκλισης και της ιδιότητας της γραμμικότητας, θα είναι

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (16.261)$$

Επιβεβαιώστε ότι πράγματι οι τιμές των τριών πρώτων δειγμάτων της παραπάνω σχέσης είναι ίσες με  $\{2, 2, 1, \dots\}$ , όπως μας κατέδειξε η μακρά διαίρεση! ☺

### 16.10.3 Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα

Ο τρίτος, και πιο δημοφιλής, τρόπος να βρεί κανείς τον αντίστροφο μετ. Z ενός σήματος είναι μέσω του αναπτύγματος σε μερικά κλάσματα (partial fraction expansion - PFE). Η ιδέα της μεθόδου συνίσταται στη διάσπαση μιας σύνθετης ρητής συνάρτησης σε απλούστερες, των οποίων ο αντίστροφος μετασχ. Z υπολογίζεται εύκολα εξετάζοντας τους Πίνακες 16.2 και 16.1.

Αρχικά, πρέπει να σημειωθεί ότι η PFE εφαρμόζεται *μόνον* όταν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι αυστηρά μικρότερος του αντίστοιχου του παρονομαστή. Αν δεν ισχύει αυτό, τότε πρέπει να κάνουμε πρώτα διαίρεση πολυωνύμων αριθμητή και παρονομαστή, ώστε να καταλήξουμε σε περίπτωση που μπορούμε να εφαρμόσουμε PFE.

Η γενική μορφή ενός μετασχ. Z είναι

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (16.262)$$

Αποδεικνύεται ότι

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N A_k \frac{1}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^L C_m \frac{1}{(1 - d_i z^{-1})^m} \quad (16.263)$$

όπου

$$A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z) \Big|_{z=d_k} \quad (16.264)$$

$$C_m = \frac{1}{(L-m)!(-d_i)^{L-m}} \left\{ \frac{d^{L-m}}{d(z^{-1})^{L-m}} [(1 - d_i z^{-1})^L X(z)] \right\} \Big|_{z=d_i} \quad (16.265)$$

και τα  $B_r$  προκύπτουν από διαίρεση των πολυωνύμων  $P(z), Q(z)$ , στην περίπτωση που ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου ή ίσου βαθμού του παρονομαστή. Όταν αυτό δεν ισχύει, τότε  $B_r = 0, \forall r$ . Όμοια, τα  $C_m$  είναι μηδενικά όταν όλες οι ρίζες είναι απλές. Αν υπάρχει πολλαπλή ρίζα τάξης  $s$ , τότε  $C_m \neq 0, m = 1, \dots, s$ .

Ας δούμε τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 16.32:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2} \quad (16.266)$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος από του παρονομαστή, οπότε στη Σχέση (16.263) δε θα υπάρχουν οι όροι με συντελεστές  $B_r$ . Επίσης, οι δυο ρίζες του παρονομαστή είναι απλές,

οπότε δεν υπάρχουν και οι όροι με συντελεστές  $C_m$ . Τελικά

$$X(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.267)$$

με

$$A_1 = (1 - \frac{1}{4}z^{-1})X(z) \Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{4}} = -1 \quad (16.268)$$

$$A_2 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = 2 \quad (16.269)$$

Έτσι, θα είναι

$$X(z) = -\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + 2\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.270)$$

Επειδή  $|z| > \frac{1}{2}$ , το σήμα στο χρόνο θα είναι δεξιόπλευρο. Επίσης, το πεδίο σύγκλισης αυτό προκύπτει ως η τομή των επιμέρους πεδίων σύγκλισης  $|z| > \frac{1}{4}$  και  $|z| > \frac{1}{2}$  των αντίστοιχων όρων της Σχέσης (16.270). Ελέγχοντας τον Πίνακα 16.2, καταλήγουμε στο σήμα

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (16.271)$$

■

Επιβεβαιώστε ότι αν το πεδίο σύγκλισης του μετασχ.  $Z$   $X(z)$  ήταν  $|z| < \frac{1}{4}$ , τότε το σήμα στο χρόνο θα ήταν

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \quad (16.272)$$

ενώ αν το πεδίο σύγκλισης ήταν  $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$ , τότε το σήμα στο χρόνο θα ήταν

$$x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \quad (16.273)$$

### Παράδειγμα 16.33:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ.  $Z$  του

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}, \quad |z| < \frac{1}{2} \quad (16.274)$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι αριθμητής και παρονομαστής έχουν τον ίδιο βαθμό, άρα πρέπει να τους διαιρέσουμε πριν εφαρμόσουμε το ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Θα είναι

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 2 - \frac{1 - 5z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (16.275)$$

και παραγοντοποιώντας

$$X(z) = 2 - \frac{1 - 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} \quad (16.276)$$

Παρατηρήστε τον όρο  $B_0 = 2$ , και ότι δεν υπάρχουν πολλαπλές ρίζες. Αναπτύσσοντας τη ρητή συνάρτηση που προέκυψε, έχουμε

$$X(z) = 2 - \frac{1 - 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} = 2 - \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}} \quad (16.277)$$

με

$$A_1 = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})X(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -9 \quad (16.278)$$

$$A_2 = (1 - z^{-1})X(z) \Big|_{z=1} = 8 \quad (16.279)$$

Άρα

$$X(z) = 2 - 9 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + 8 \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (16.280)$$

Επειδή το πεδίο σύγκλισης είναι  $|z| < \frac{1}{2}$ , το σήμα στο χρόνο θα είναι αριστερόπλευρο. Επίσης, τα επιμέρους πεδία σύγκλισης των όρων του αθροίσματος της Σχέσης (16.280) θα είναι  $|z| < \frac{1}{2}$  και  $|z| < 1$ , αντίστοιχα. Παρατηρώντας τα στοιχεία του Πίνακα 16.2, καταλήγουμε στο σήμα

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n] \quad (16.281)$$

■

Μπορείτε να δείξετε (Άσκηση XXXX) ότι όλα τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα

$$\{|z| > 1\} \quad (16.282)$$

$$\{|z| < \frac{1}{2}\} \quad (16.283)$$

$$\{\frac{1}{2} < |z| < 1\} \quad (16.284)$$

και τα αντίστοιχα σήματα στο χρόνο είναι τα

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n] \quad (16.285)$$

$$x[n] = 2\delta[n] + 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 8u[-n-1] \quad (16.286)$$

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 8u[-n-1] \quad (16.287)$$

### Παράδειγμα 16.34:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z του

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 (1 - z^{-1})}, \quad |z| > 1 \quad (16.288)$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι ο βαθμός του πολωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος από αυτόν του παρονομαστή. Όμως βλέπουμε ότι στον παρονομαστή υπάρχει πολλαπλή ρίζα, το  $z = \frac{1}{2}$ . Άρα θα έχουμε μη μηδενικούς όρους  $C_m$ ,  $m = 1, 2$  από τη Σχέση (16.263). Θα είναι

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 (1 - z^{-1})} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{C_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{C_2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad (16.289)$$

με

$$A_1 = (1 - z^{-1})X(z) \Big|_{z=1} = 4 \quad (16.290)$$

$$C_2 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 X(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -1 \quad (16.291)$$

$$C_1 = \frac{1}{(2-1)! \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1}} \left\{ \frac{d^{2-1}}{d(z^{-1})^{2-1}} \left[ \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 X(z) \right] \right\} \Big|_{z=\frac{1}{2}} \quad (16.292)$$

$$= -2 \left( \frac{d}{dz^{-1}} \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -2 \frac{1}{(1 - z^{-1})^2} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -2 \quad (16.293)$$

Οπότε

$$X(z) = \frac{4}{1 - z^{-1}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad (16.294)$$

Συμβουλευόμενοι τους Πίνακες 16.1, 16.2, και ότι το πεδίο σύγκλισης είναι το  $|z| > 1$ , το σήμα στο χρόνο είναι

$$x[n] = 4u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] \quad (16.295)$$

<sup>5</sup> Δείτε την ανάλυση του συστήματος  $y[n] = x[n - n_0]$  στο κεφάλαιο περί Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου. Το σύστημα αυτό, που απλά καθυστερεί την είσοδο κατά  $n_0$  δείγματα, είχε γραμμική φάση  $-\omega n_0$ .