

## Κεφάλαιο 15

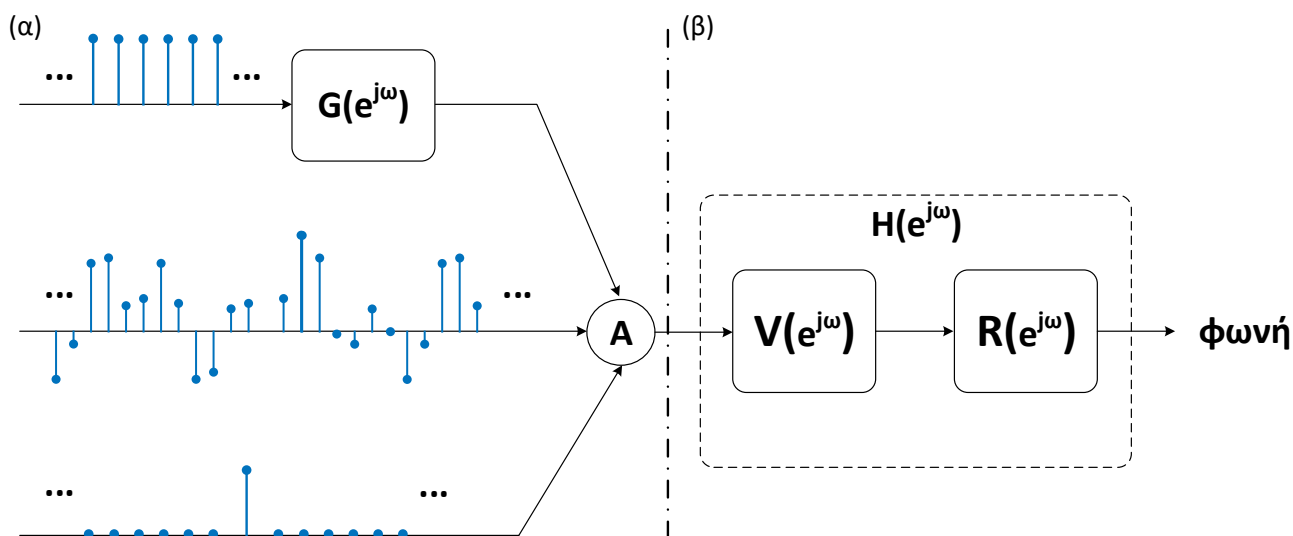
# Ανάλυση Σημάτων και Συστημάτων στο Χώρο της Συχνότητας

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε την αναπαράσταση συστημάτων διακριτού χρόνου, που - όπως και στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου - είναι ουσιαστικά οι “εξαγωγείς πληροφορίας” μας, καθώς ένα σύστημα δεν (θα έπρεπε να) κάνει τίποτε περισσότερο από το να εξάγει χρήσιμη πληροφορία από ένα σήμα που δέχεται στην είσοδό του.

### 15.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Πολλές εφαρμογές της Επεξεργασίας Σήματος κινούνται γύρω από το σήμα της ανθρώπινης φωνής: σκεφτείτε απλά πόσες εφαρμογές βλέπετε γύρω σας οι οποίες σχετίζονται με τον έναν ή τον άλλο τρόπο με το σήμα της φωνής - στα smartphones σας, ευφυείς προσωπικοί βοηθοί παρέχουν εφαρμογές αναγνώρισης ομιλίας ή σύνθεσης ομιλίας, όπως η Cortana της Microsoft ή ο Google Assistant της Google. Πολλά videogames χρησιμοποιούν αλγόριθμους τροποποίησης φυσικής φωνής για να παράξουν ομιλία για φανταστικούς ψηφιακούς χαρακτήρες. Υψηλής τεχνολογίας ακουστικά μετασχηματίζουν το σήμα της φωνής ώστε να είναι αντιληπτό από άτομα με προβλήματα ακοής. Εξελιγμένοι αλγόριθμοι τροποποιούν το σήμα της φωνής ώστε να είναι περισσότερο αντιληπτό σε περιβάλλον θορύβου, ενώ άλλοι εξάγουν ειδικά χαρακτηριστικά από το σήμα της φωνής τα οποία πιθανώς σχετίζονται με συγκεκριμένες παθολογίες της φώνησης.

Όλες οι παραπάνω εφαρμογές έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: αποτελούν μικρά ή μεγάλα συστήματα που δέχονται ένα σήμα ως είσοδο (το σήμα της φωνής) και παράγουν μια χρήσιμη πληροφορία στην έξοδό τους. Ένα πολύ απλό (και αρκετά παλιό) σύστημα που μπορεί κανείς να συνθέσει ανθρώπινη φωνή φαίνεται στο Σχήμα 15.1. Το σύστημα αυτό βασίζεται στην ερευνητική εργασία του G. Fant και ονομάζεται *μοντέλο πηγής - φίλτρου* -



Σχήμα 15.1: Μοντέλο Πηγής - Φίλτρου (Source-Filter Model: (α) πηγή και (β) φίλτρο.

*source-filter model*. Σύμφωνα με τον Fant, το σύστημα παραγωγής ανθρώπινης φωνής μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής: οι φωνητικές μας χορδές, που δεν είναι τίποτε περισσότερο από δυο μάζες που έρχονται σε επαφή και απομακρύνονται πολλές φορές σε ένα δευτερόλεπτο, παράγουν λόγω της κίνησής τους σήματα ταχύτητας ροής αέρα συγκεκριμένων χαρακτηριστικών, ανάλογα με το είδος του φωνήματος που θέλουμε να εκφέρουμε. Η ροή αέρα αυτή προέρχεται από τους πνεύμονές μας και τα χαρακτηριστικά της διαμορφώνονται σε πρώτη φάση από τις φωνητικές χορδές. Αν οι τελευταίες ανοιγοκλείνουν με σχεδόν σταθερό, περιοδικό τρόπο τότε το σήμα που παράγεται είναι σχεδόν περιοδικό και αποτελείται από παλμούς μιας κάποιας συγκεκριμένης μορφής. Αν πάλι θέλουμε να εκφέρουμε κάποιο σύμφωνο, τότε οι φωνητικές μας χορδές δεν ανοιγοκλείνουν πλέον περιοδικά (βρίσκονται σε τάση ή είναι χαλαρές ώστε να διέρχεται σχεδόν ελεύθερη η ροή αέρα από τους πνεύμονες) και το σήμα ταχύτητας ροής αέρα που παράγεται από αυτές έχει ακανόνιστη, “θορυβώδη” μορφή. Αν πάλι θέλουμε να εκφέρουμε κάποιο κλειστό φώνημα, όπως το /p/ ή το /k/, τότε καταλαβαίνετε ότι οι φωνητικές χορδές δεν ταλαντώνονται αλλά η ροή του αέρα που παράγεται παρεμποδίζεται για κάποιο διάστημα από κάποιο όργανο του φωνητικού συστήματος (γλώσσα, χείλη) και στη συνέχεια αφήνεται απότομα. Όλα τα παραπάνω λοιπόν περιγράφουν πιθανές εισόδους στο σύστημα της φωνητικής οδού, το οποίο αποτελείται από το φάρυγγα, τη στοματική, και τη ρινική κοιλότητα. Στο Σχήμα 15.1(α) βλέπετε σήματα διακριτού χρόνου που μοντελοποιούν τις τρεις πιθανές εισόδους που περιγράψαμε, με την ίδια σειρά, και αποτελούν αυτό που ο Fant ονομάζει πηγή - για προφανείς λόγους. Για την παραγωγή φωνηέντων, η είσοδος αποτελείται από περιοδικές συναρτήσεις Δέλτα οι οποίες περνούν μέσα από ένα πρώτο σύστημα  $G(e^{j\omega})$  που μοντελοποιεί το άνοιγμα και το κλείσιμο των φωνητικών χορδών, δίνοντας στο περιοδικό σήμα ένα κατάλληλο σχήμα που αντιστοιχεί στην ταχύτητα ροής αέρα μέσα από τις φωνητικές χορδές. Για σύμφωνο, η είσοδος αποτελείται από ένα “ακανόνιστο” σήμα, χωρίς καμιά περιοδικότητα. Τέλος, για κλειστούς ήχους, το σήμα εισόδου αποτελείται από μια και μόνο συνάρτηση Δέλτα που αντιπροσωπεύει την ακαριαία διέγερση του συστήματος μετά την απελευθέρωση της ροής αέρα.

Στο Σχήμα 15.1(β) βλέπετε αυτό που ονομάζεται φίλτρο στο μοντέλο του Fant, και μοντελοποιεί - όπως αναφέρθηκε - τη φωνητική οδό, δηλ. τη διαδρομή από τις φωνητικές χορδές ως τα χείλη. Το φίλτρο αυτό αναλαμβάνει να “χρωματίσει” το σήμα εισόδου ανάλογα με το φώνημα που προσπαθούμε να εκφέρουμε. Αυτός ο “χρωματισμός” δεν είναι τίποτε άλλο παρά ενίσχυση ή (μερική) καταστολή κάποιων συχνοτήτων του σήματος εισόδου, δηλ. του σήματος της πηγής. Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά που δίνουμε στη φωνητική μας οδό (θέση γλώσσας, άνοιγμα στόματος, θέση χειλιών, κλπ.), το σήμα εισόδου διαμορφώνεται, δηλ. μεταβάλλει τα χαρακτηριστικά του, και τελικά παίρνει την επιθυμητή, ακουστικά, μορφή που θέλουμε. Το σύστημα  $V(e^{j\omega})$  μοντελοποιεί τη φωνητική οδό πλην της επίδρασης των χειλιών, η οποία μοντελοποιείται από το σύστημα  $R(e^{j\omega})$ . Παρά τη φαινομενική πολυπλοκότητά τους, τέτοια συστήματα είναι σχετικά απλά και τα θεμέλιά τους αποτελούνται από τις βασικές έννοιες που θα γνωρίσουμε σύντομα.

Από τη φωνολογική μελέτη των γλωσσών που ομιλούνται στον κόσμο, γνωρίζουμε - κατά μέσο όρο - τα χαρακτηριστικά των έμφωνων και των άφωνων ήχων. Μπορούμε λοιπόν να κατασκευάσουμε συστήματα με συχνοτικές αποκρίσεις που ταιριάζουν στα φωνήματα που θέλουμε να εκφέρουμε. Αντίστοιχα μπορούμε να παράξουμε όλων των ειδών τις εισόδους ώστε να διεγείρουμε το σύστημα και να λάβουμε εν τέλει ένα σήμα που να πλησιάζει τα ακουστικά χαρακτηριστικά του λόγου. Μάλιστα οι πρώτοι ψηφιακοί συνθέτες φωνής βασίζονταν ακριβώς σε αυτές τις ιδέες!

Όμως ποιές είναι αυτές οι εκφράσεις των παραπάνω συστημάτων συναρτήσει αυτής της περίεργης μεταβλητής  $e^{j\omega}$ ; Ας ξεκινήσουμε λοιπόν από αυτό!

## 15.2 Συστήματα στο Χώρο της Συχνότητας

Ένα από τα πλεονεκτήματα της αναπαράστασης σε συχνότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι μας δίνουν μια άλλη οπτική για τη συμπεριφορά του συστήματος, βασισμένη στο χώρο της συχνότητας.

Εως τώρα έχουμε συζητήσει μερικά από τα θεμέλια σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Μιλήσαμε ιδιαίτερα για ΓΧΑ συστήματα, τα οποία όταν δέχονται είσοδο σε μορφή αθροίσματος συναρτήσεων Δέλτα, όπου η καθιερωμένη έχει ένα συγκεκριμένο πλάτος, τότε η έξοδος δίνεται σε μορφή αθροίσματος της χροστικής τους απόκρισης με κάποια βάρη. Πιο τυπικά, ένα σήμα  $x[n]$  αναπαρίσταται εν γένει ως:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (15.1)$$

Για παράδειγμα, το σήμα

$$x[n] = 2\delta[n] - 4\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-4] \quad (15.2)$$

είναι ένα σήμα με τρεις συναρτήσεις δέλτα, με τιμές 2, -4,  $\frac{1}{2}$ , και αυτές βρίσκονται στις θέσεις  $n=0$ ,  $n=1$ ,  $n=4$ .

Ας δούμε τι συμβαίνει στα συστήματα, όταν αυτά εξετάζονται από την οπτική της συχνότητας. Θα εξετάσουμε

μόνο γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα (ΓΧΑ), όπου η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν υφίσταται, δηλ. περιγράφονται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Όμως είχαμε συζητήσει αρκετά και για μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής  $e^{j\omega n}$ . Αυτά τα σήματα παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στα ΓΧΑ συστήματα. Το γιατί θα το δούμε αμέσως τώρα.

### 15.2.1 Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Τα ΓΧΑ συστήματα, όπως έχουμε πει, δεν είναι τίποτα άλλο από σήματα και αυτά και περιγράφονται με δυο τρόπους:

- Με μια εξίσωση διαφορών, που σχετίζει την είσοδο με την έξοδο, όπως για παράδειγμα

$$y[n] = 2x[n-1] - x[n-2] + x[n-3], \quad (15.3)$$

- Με την κρουστική απόκρισή τους,  $h[n]$ , π.χ.

$$h[n] = 2\delta[n-3] - 3\delta[n-4] + 0.6\delta[n-5]. \quad (15.4)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος,  $y[n]$ , συνδέεται με την είσοδο αυτού,  $x[n]$ , και με την κρουστική απόκριση  $h[n]$  του συστήματος, με την πράξη της συνέλιξης:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (15.5)$$

αφού δε λάμβανουμε υπόψη μας την απόκριση μηδενικής εισόδου (αφού το σύστημα είναι ΓΧΑ). Ας δούμε λοιπόν γιατί είναι τόσο χρήσιμη η έκφραση ενός σήματος ως συνάρτηση των μιγαδικών εκθετικών  $e^{j\omega n}$ . Ο λόγος είναι ότι αυτά τα μιγαδικά εκθετικά αποτελούν *ιδιοσυναρτήσεις* των ΓΧΑ συστημάτων. Ας τα πάρουμε όμως ένα-ένα. Αρχικά, τι είναι η ιδιοσυνάρτηση;

*Ιδιοσυνάρτηση* ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ένα σήμα που όταν εφαρμοστεί ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα, περνάει αυτούσιο στην έξοδο, με μόνη αλλαγή στο - πιθανώς μιγαδικό - πλάτος του. Πιο τυπικά, αν  $x[n]$  είναι η είσοδος στο σύστημα και αποτελεί ιδιοσυνάρτησή του, η έξοδος θα είναι της μορφής  $y[n] = \lambda x[n]$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{C}$  μια *ιδιοτιμή* του συστήματος. Ας το δούμε λίγο πιο λεπτομερώς.

Σήματα της μορφής

$$x[n] = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (15.6)$$

όπου  $\omega$  είναι σταθερά, αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος. Ας το δείξουμε:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (15.7)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (15.8)$$

Άρα, η ιδιοτιμή (eigenvalue), που συμβολίζουμε με  $H(e^{j\omega})$ , είναι η

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \quad (15.9)$$

Επειδή πρόκειται για εν γένει μιγαδική συνάρτηση και εξαρτάται από τη συχνότητα  $\omega$  του εκθετικού, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα του πραγματικού και φανταστικού μέρους της ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \quad (15.10)$$

ή με όρους μέτρου-φάσης ως

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)} \quad (15.11)$$

όπου

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} \quad (15.12)$$

και

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \quad (15.13)$$

Συχνά, η φάση συμβολίζεται και ως  $\angle H(e^{j\omega})$ . Θα χρησιμοποιούμε εναλλάξ αυτούς τους συμβολισμούς.

### 15.2.2 Απόκριση Σε Συχνότητα

Η συνάρτηση  $H(e^{j\omega})$  είναι πολύ χρήσιμη και σημαντική για τα ΓΧΑ συστήματα, και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα - frequency response** ή **φασματική απόκριση**<sup>1</sup>. Το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα ονομάζεται συχνά **απόκριση πλάτους - magnitude response**, ενώ η συνάρτηση φάση ως **απόκριση φάσης - phase response**.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης αυτής είναι ότι αν η χροστική απόκριση  $h[n]$  είναι πραγματική, τότε η  $H(e^{j\omega})$  είναι **συζυγής συμμετρική** συνάρτηση της συχνότητας:

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) \quad (15.14)$$

Επίσης, η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι το πραγματικό μέρος της συνάρτησης  $H(e^{j\omega})$  ενός πραγματικού σήματος  $h[n]$  είναι άρτιο, και το φανταστικό είναι περιττό, δηλ.

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega}) \quad (15.15)$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega}) \quad (15.16)$$

Ως εκ τούτου, το μέτρο της είναι άρτια συνάρτηση ως προς  $\omega$  και η φάση είναι περιττή συνάρτηση ως προς  $\omega$ , δηλ.

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})| \quad (15.17)$$

$$\phi(\omega) = -\phi(-\omega) \quad (15.18)$$

Η απόκριση σε συχνότητα ορίζει το πως αλλάζει ένα μιγαδικό εκθετικό (στο μιγαδικό πλάτος του, όπως είδαμε) όταν περνάει από ένα ΓΧΑ σύστημα. Επίσης, είναι πολύ χρήσιμη στην ανάλυση ενός σήματος εισόδου ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Για παράδειγμα, η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος στην είσοδο

$$x[n] = \sum_{k=1}^N a_k e^{j\omega_k n} \quad (15.19)$$

θα είναι

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n} \quad (15.20)$$

όπου  $H(e^{j\omega_k})$  είναι η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος στη συχνότητα  $\omega_k$ .

Γενικότερα, λόγω της γραμμικότητας του συστήματος, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

#### Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος - I

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k e^{j(\omega_k n + \theta_k)}$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A_k H(e^{j\omega_k}) e^{j(\omega_k n + \theta_k)}$$

όπου

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$$

<sup>1</sup> Δεν πρέπει να σας εκπλήσσει! :-)

η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί - σε ένα παράδειγμα - αν στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος παρουσιαστεί ένα ημίτονο συχνότητας  $\omega_0$ . Θυμηθείτε ότι η σχέση του Euler αναλύει ένα ημίτονο σε μιγαδικά εκθετικά σήματα, τα οποία είδαμε ότι αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος.

### Παράδειγμα 15.1:

Έστω ένα ημίτονο της μορφής

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (15.21)$$

Βρείτε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος με αυτό το ημίτονο στην είσοδό του.

Λύση:

Ξέρουμε ότι

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 n} e^{j\phi} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\phi} \quad (15.22)$$

Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό, η έξοδος για την παραπάνω είσοδο ισούται με το άθροισμα των εξόδων για είσοδο κάθε ένα από τα παραπάνω μιγαδικά εκθετικά. Άρα

$$y[n] = \frac{A}{2} H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} e^{j\phi} + \frac{A}{2} H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\omega_0 n} e^{-j\phi} \quad (15.23)$$

Στην ειδική - και πολύ συνήθης - περίπτωση που το ΓΧΑ σύστημα είναι *πραγματικό*, είπαμε ότι ισχύει

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) \quad (15.24)$$

και με χρήση της μορφής μέτρου-φάσης, η παραπάνω έξοδος θα γίνει

$$y[n] = \frac{A}{2} H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n} e^{j\phi} + \frac{A}{2} H^*(e^{j\omega_0}) e^{-j\omega_0 n} e^{-j\phi} \quad (15.25)$$

$$= \frac{A}{2} |H(e^{j\omega_0})| e^{j\angle H(e^{j\omega_0})} e^{j\omega_0 n} e^{j\phi} + \frac{A}{2} |H(e^{j\omega_0})| e^{-j\angle H(e^{j\omega_0})} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\phi} \quad (15.26)$$

$$= \frac{A}{2} |H(e^{j\omega_0})| \left( e^{j\angle H(e^{j\omega_0})} e^{j\omega_0 n} e^{j\phi} + e^{-j\angle H(e^{j\omega_0})} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\phi} \right) \quad (15.27)$$

$$= \frac{A}{2} |H(e^{j\omega_0})| 2 \cos(\omega_0 n + \phi + \angle H(e^{j\omega_0})) \quad (15.28)$$

$$= A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \angle H(e^{j\omega_0})) \quad (15.29)$$

Άρα μπορούμε να πούμε ότι:

### Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος - II

Αν η είσοδος ενός πραγματικού ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k n + \theta_k)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A_k |H(e^{j\omega_k})| \cos(\omega_k n + \theta_k + \phi(\omega_k))$$

όπου

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$$

η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

Παρατηρήστε ότι

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} = H(e^{j\omega}) \quad (15.30)$$

γιατί  $e^{j2\pi n} = 1$ , για κάθε  $n$ . Γενικότερα,

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \quad r \in \mathbb{Z} \quad (15.31)$$

Με άλλα λόγια, η απόκριση σε συχνότητα  $H(e^{j\omega})$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ . Εδώ λοιπόν είναι ευκαιρία να επαναλάβουμε τη συζήτηση που είχαμε κάνει όταν μελετούσαμε τα μιγαδικά εκθετικά  $e^{j\omega_0 n}$  και τη συμπεριφορά τους στο χώρο της συχνότητας, για να αιτιολογήσουμε και την περιοδικότητα της  $H(e^{j\omega})$ . Είχαμε δει ότι λόγω της  $2\pi$ -περιοδικότητας στη συχνότητα ενός μιγαδικού εκθετικού  $e^{j\omega_0 n}$ , όσο αυξάνουμε τη συχνότητα  $\omega_0$  από το  $\omega_0 = 0$  ως το  $\omega_0 = \pi$ , τόσο οι ταλαντώσεις του σήματος γίνονται όλο και πιο γρήγορες. Όμως, όταν αυξήσουμε το  $\omega_0$  από  $\omega_0 = \pi$  ως  $\omega_0 = 2\pi$ , τότε οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο αργές! Το ίδιο μοτίβο επαναλαμβάνεται και μετά το  $\omega_0 = 2\pi$ , ξεκινώντας από γρήγορες ταλαντώσεις γύρω από το  $2\pi$ , φτάνοντας σε πιο αργές γύρω από το  $3\pi$ , και ξανά σε πιο γρήγορες γύρω από το  $\omega_0 = 4\pi$ . Αντίστοιχα, στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$ , οι γρήγορες ταλαντώσεις γίνονται γύρω από τις συχνότητες  $\omega_0 = \pm\pi$ , ενώ οι πιο αργές (προφανώς) γύρω από τη συχνότητα  $\omega_0 = 0$ .

Αφού λοιπόν η απόκριση σε συχνότητα  $H(e^{j\omega})$  είναι ένα άθροισμα από μιγαδικά εκθετικά σήματα (περιοδικά στη συχνότητα, όπως είπαμε), περιμένει κανείς να είναι κι αυτή περιοδική στο χώρο της συχνότητας με περίοδο  $2\pi$ . Ένας άλλος τρόπος να εξαχθεί αυτό το συμπέρασμα είναι ότι αφού τα σήματα  $e^{j\omega_0 n}$  και  $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$ , για  $-\infty < n < +\infty$ , είναι ακριβώς τα ίδια, τότε ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτά τα δυο σήματα. Άρα θα πρέπει να είναι κι αυτό περιοδικό στη συχνότητα, αφού επιβάλλεται οι τιμές της φασματικής απόκρισης  $H(e^{j\omega_0})$  και  $H(e^{j(\omega_0+2\pi)})$  να είναι ίδιες.

Για τους παραπάνω λόγους, αρκεί να “βλέπουμε” μια φασματική απόκριση  $H(e^{j\omega})$  σε ένα διάστημα διάρκειας  $2\pi$ . Προτιμούμε το διάστημα  $-\pi < \omega \leq \pi$  ως “παράθυρο” στο χώρο της συχνότητας. Έτσι, οι “υψηλές” συχνότητες βρίσκονται γύρω από τις συχνότητες  $\omega_0 = \pm\pi$ , ενώ οι “χαμηλές” γύρω από τη συχνότητα  $\omega_0 = 0$ .

Ας δούμε μερικά παραδείγματα συστημάτων και υπολογισμού απόκρισης σε συχνότητα.

### Παράδειγμα 15.2:

Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών ως

$$y[n] = x[n - n_d] \quad (15.32)$$

που δεν είναι τίποτε περισσότερο από ένα σύστημα που καθυστερεί την είσοδό του κατά  $n_d$  δείγματα. Έστω η είσοδος  $x[n] = e^{j\omega n}$ , βρείτε την έξοδο  $y[n]$ .

Λύση:

Η έξοδος θα είναι

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n} \quad (15.33)$$

Άρα η απόκριση σε συχνότητα είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad (15.34)$$

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της απόκρισης σε συχνότητα είναι

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d) \quad (15.35)$$

και

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d) \quad (15.36)$$

αντίστοιχα. Το μέτρο και η φάση της είναι

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad (15.37)$$

και

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d \quad (15.38)$$

αντίστοιχα. Η τελευταία έκφραση προκύπτει από τη Σχέση (15.34), αφού είναι ήδη γραμμένη σε πολική μορφή<sup>2</sup>. Παρατηρήστε ότι η καθυστέρηση  $n_d$  μεταφράζεται ως γραμμική φάση  $-\omega n_d$  στην απόκριση σε συχνότητα του συστήματος! Πολύ σημαντική παρατήρηση!

### Παράδειγμα 15.3:

Έστω η κρουστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (15.39)$$

η οποία περιγράφει ένα σύστημα εξομάλυνσης (moving-average). Ας θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό, κι έτσι  $M_1 = 0$ , για περισσότερη απλοποίηση. Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα.

Λύση:

Η απόκριση σε συχνότητα θα είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n} \quad (15.40)$$

Κάνοντας πράξεις, έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2 + 1} \left( \frac{1 - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \right) \quad (15.41)$$

$$= \frac{1}{M_2 + 1} \frac{e^{-j\omega(M_2+1)/2} (e^{j\omega(M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_2+1)/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \quad (15.42)$$

$$= \frac{1}{M_2 + 1} \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M_2/2} \quad (15.43)$$

Ας δούμε τώρα αυτό το σύστημα λίγο πιο λεπτομερώς. Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε τη συμπεριφορά της φασματικής απόκρισης συναρτήσει του  $\omega$ . Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής μηδενίζεται όταν

$$\sin(\omega(M_2 + 1)/2) = 0 \iff \frac{\omega(M_2 + 1)}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \iff \omega = \frac{2k\pi}{M_2 + 1}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (15.44)$$

και ο παρονομαστής όταν

$$\sin(\omega/2) = 0 \iff \omega = 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (15.45)$$

Παρατηρούμε ότι όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής, μηδενίζεται και ο αριθμητής (στα πολλαπλάσια του  $2\pi$ ). Άρα τι συμβαίνει στα πολλαπλάσια του  $2\pi$ ; Υπάρχει κάποια απροσδιοριστία. Όμως ξέρουμε ότι

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda\omega)}{\sin(\omega)} = \lambda \quad (15.46)$$

και άρα στα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή (και ταυτόχρονα του αριθμητή), η απόκριση σε συχνότητα έχει τιμή

$$H(e^{j0}) = \frac{1}{M_2 + 1} M_2 + 1 = 1 \implies |H(e^{j0})| = 1 \quad (15.47)$$

Αν γράψουμε λοιπόν τη φασματική απόκριση σε πολική μορφή (απόκριση πλάτους - απόκριση φάσης), θα έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2 + 1} \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M_2/2} \quad (15.48)$$

<sup>2</sup>Επιβεβαιώστε ότι η σχέση

$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

$$= \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| e^{j\phi_r(\omega)} e^{-j\omega M_2/2} \quad (15.49)$$

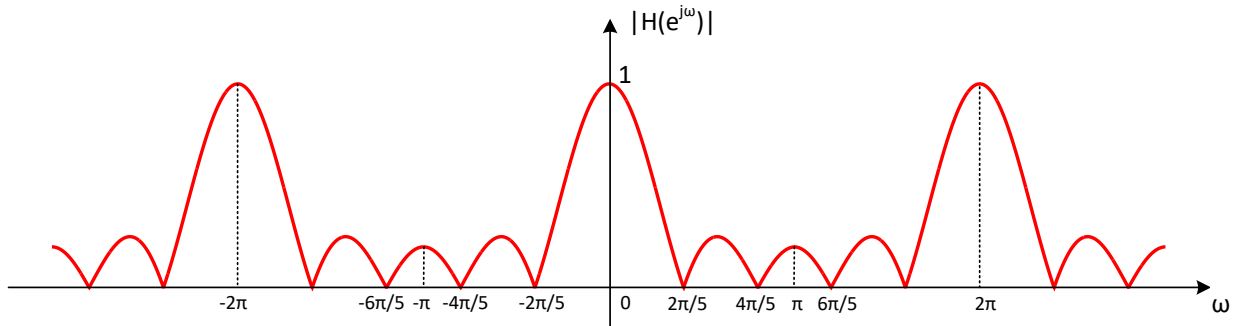
$$= \left( \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \right) \left( e^{j\phi_r(\omega)} e^{-j\omega M_2/2} \right) \quad (15.50)$$

$$= \left( \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \right) \left( e^{j(\phi_r(\omega) - \omega M_2/2)} \right) \quad (15.51)$$

με  $\phi_r(\omega)$  την απόκριση φάσης του όρου που αποτελείται από το ημίτονο. Είναι εμφανές ότι η απόκριση πλάτους είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad (15.52)$$

και για  $M_2 = 4$  φαίνεται στο Σχήμα 15.2. Επειδή το σήμα  $h[n]$  είναι πραγματικό, υπάρχει άρτια συμμετρία στην



Σχήμα 15.2: Απόκριση πλάτους  $|H(e^{j\omega})|$  του σήματος εξομάλυνσης  $h[n]$  για  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 4$ .

απόκριση πλάτους. Εξετάζοντας την τελευταία στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$  παρατηρούμε ότι έχει χαμηλές τιμές για  $|\omega| > 2\pi/5$ , και υψηλές τιμές για  $|\omega| < 2\pi/5$ . Αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται κάθε  $2\pi$ . Ας το κρατήσουμε.

Όσον αφορά την απόκριση φάσης, αυτή δίνεται από τη σχέση

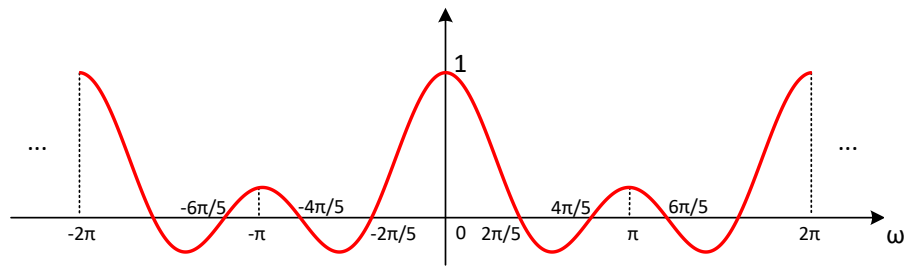
$$\phi(\omega) = \phi_r(\omega) - \frac{\omega M_2}{2} \quad (15.53)$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση έχει μια σταθερή φάση  $-\omega M_2/2$ , αλλά πρέπει σε αυτή να δούμε αν υπάρχει φάση  $\phi_r(\omega)$  από το ημίτονο των ημιτόνων. Με άλλα λόγια, πρέπει να ελέγξουμε αν αυτό το ημίτονο γίνεται αρνητικό, για κάποιο διάστημα συχνότητας  $\omega$ . Όποτε (και αν) αυτό συμβαίνει, το αρνητικό πρόσημο του ημιτόνου μετατρέπεται σε φάση  $\pi$ , δηλ.  $\phi_r(\omega) = \pi$ , σύμφωνα με τη σχέση του Euler

$$e^{j\pi} = -1 \quad (15.54)$$

και αυτή η φάση προστίθεται στην ήδη υπάρχουσα φάση  $-\omega M_2/2$ . Έτσι είμαστε βέβαιοι/ες ότι το ημίτονο ημιτόνων είναι πάντα θετικό, όπως ορίζει η πολική μορφή της Σχέσης (15.43). Με άλλα λόγια, αν το ημίτονο ημιτόνων είναι θετικό για κάποιο διάστημα συχνότητας, εκεί η φάση παραμένει ως έχει, αφού  $\phi_r(\omega) = 0$ . Ας το δούμε λοιπόν. Ο λόγος των δυο ημιτόνων φαίνεται στο Σχήμα 15.3. Ας δούμε ξανά τι συμβαίνει σε ένα διάστημα διάρκειας  $2\pi$ , έστω στο  $[0, 2\pi)$ , αυτή τη φορά για το ημίτονο των δυο ημιτόνων. Ο παρονομαστής  $\sin(\omega/2)$  είναι πάντα θετικός στο διάστημα αυτό, εκτός από τη συχνότητα  $\omega = 0$ , στην οποία μηδενίζεται. Την περίπτωση αυτή την έχουμε ελέγξει ωρίτερα, καθώς σε αυτή τη συχνότητα μηδενίζεται και ο αριθμητής. Ας ελέγξουμε τώρα το πρόσημο του αριθμητή. Ας θέσουμε ξανά  $M_2 = 4$  για περισσότερη απλότητα. Σύμφωνα με τα σημεία μηδενισμού που βρήκαμε ωρίτερα, ο αριθμητής αλλάζει πρόσημο κάθε  $\frac{2\pi}{M_2+1} = \frac{2\pi}{5}$  rad/sample, ξεκινώντας στο  $[0, \frac{2\pi}{5})$  με θετικές τιμές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.3. Ο αριθμητής είναι αρνητικός στα διαστήματα  $(\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5})$  και  $(\frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5})$ , το αρνητικό πρόσημο του οποίου μπορεί να γραφεί ως φάση  $\phi_r(\omega) = \pi$  όταν  $\omega > 0$ . Στα ενδιαμέσα διαστήματα, ο αριθμητής (και άρα το ημίτονο) είναι θετικός, οπότε δεν αλλάζει κάτι στη φάση. Αντίθετα, και για τη διατήρηση της περιττής συμμετρίας της απόκρισης φάσης, θα πρέπει  $\phi_r(\omega) = -\pi$  όταν  $\omega < 0$  και ο λόγος των ημιτόνων είναι αρνητικός.



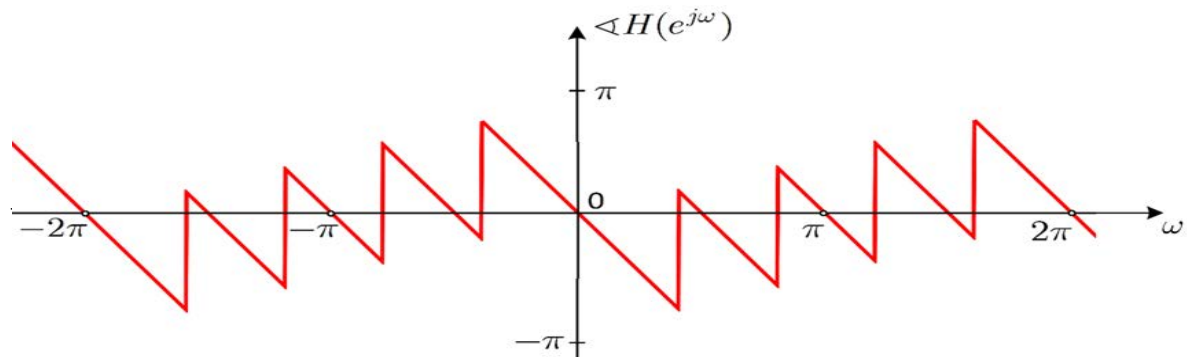


Σχήμα 15.3: Λόγος ημιτόνων στην απόκριση συχνότητας  $H(e^{j\omega})$  του σήματος εξομάλυνσης  $h[n]$  για  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 4$ .

Άρα τελικά η απόκριση φάσης στο διάστημα  $[0, 2\pi)$  μπορεί να γραφεί ως

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega, & 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{5} \\ -2\omega + \pi, & \frac{2\pi}{5} < \omega < \frac{4\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{4\pi}{5} < \omega < \frac{6\pi}{5} \\ -2\omega + \pi, & \frac{6\pi}{5} < \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{8\pi}{5} < \omega < 2\pi \end{cases} \quad (15.55)$$

Επειδή το σήμα  $h[n]$  είναι πραγματικό, θα υπάρχει περιττή συμμετρία στην απόκριση φάσης, και άρα η μορφή της θα είναι όπως στο Σχήμα 15.4.



Σχήμα 15.4: Απόκριση φάσης  $\angle H(e^{j\omega})$  του σήματος εξομάλυνσης  $h[n]$  για  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 4$ .

Έχοντας λοιπόν αυτήν την ανάλυση σε αποκρίσεις πλάτους και φάσης, μπορούμε να καταλάβουμε τι (περίπου) επίπτωση θα έχει το παραπάνω σύστημα σε ένα, παραδείγματος χάριν, ημίτονο συχνότητας  $\omega_0$  που θα εμφανιστεί στην είσοδό του. Ας το δούμε με αριθμητικό παράδειγμα, αλλά κοιτώντας μόνο τα Σχήματα 15.2, 15.4.

Έστω ότι το ημίτονο έχει συχνότητα  $\omega_0 = \pi/5$ , μέτρο  $A$  και αρχική φάση  $\theta$ , είναι δηλαδή της μορφής

$$x[n] = A \cos(\pi n/5 + \theta) \quad (15.56)$$

Ξέρουμε από προηγούμενη ανάλυση ότι η έξοδος του συστήματος θα είναι κι αυτή ημιτονοειδούς μορφής, με πιθανώς τροποποιημένο πλάτος και φάση. Κοιτάζοντας το πλάτος της συχνότητας  $\omega_0 = \pi/5$  στην απόκριση πλάτους του Σχήματος 15.2, βλέπουμε ότι στην έξοδο το πλάτος θα μειωθεί περίπου στο μισό, ενώ βλέποντας τη φάση της συχνότητας  $\omega_0 = \pi/5$  στην απόκριση φάσης του Σχήματος 15.4, βλέπουμε ότι στην έξοδο η φάση θα είναι ίση με  $(\theta - 2\pi/5)$ . Άρα μια καλή προσέγγιση της εξόδου του συστήματος για την παραπάνω είσοδο, θα είναι

$$y[n] \approx \frac{A}{2} \cos(\pi n/5 + \theta - 2\pi/5) \quad (15.57)$$

Όμοια, αν η συχνότητα της εισόδου είναι  $\omega_0 = \pi/2$ , τότε το πλάτος του ημιτόνου στην έξοδο θα μειωθεί

σημαντικά (περίπου στο 1/3 του), όπως μπορούμε να δούμε από την απόκριση πλάτους στη συχνότητα  $\omega_0 = \pi/2$ , ενώ η φάση που θα προστεθεί στην αρχική φάση  $\theta$  είναι μηδέν, γιατί “πέφτουμε” στο διάστημα  $[2\pi/5, 4\pi/5)$ , όπου η φάση είναι  $-2\omega + \pi$ , και άρα για  $\omega_0 = \pi/2$  έχουμε φάση συστήματος ίση με μηδέν. Άρα η φάση της εισόδου παραμένει αμετάβλητη! Άρα μια καλή προσέγγιση της εξόδου του συστήματος για την παραπάνω είσοδο, θα είναι

$$y[n] \approx \frac{A}{3} \cos(\pi n/2 + \theta) \quad (15.58)$$

Φυσικά οι παραπάνω προσεγγίσεις μπορούν να γίνουν ισότητες αν χρησιμοποιήσουμε τις μαθηματικές μορφές των αποκρίσεων αντί των γραφημάτων τους.

Τέλος, παρατηρήστε ότι αν  $\omega_0 = 2\pi/5$ , τότε το πλάτος του σήματος εξόδου θα μηδενιστεί, αφού  $|H(e^{j2\pi/5})| = 0$ !

Πέρα από συγκεκριμένες εισόδους, μπορούμε να πούμε ότι το παραπάνω σύστημα έχει χαρακτηριστικά χαμηλοπερατού φίλτρου, μια και κρατά σχετικά ανέπαφα τα πλάτη που βρίσκονται σε χαμηλές συχνότητες (γύρω από το  $\omega = 0$ ), ενώ αντίθετα αδυνατίζει σημαντικά τα πλάτη μεγαλύτερων συχνοτήτων. Γι’ αυτό άλλωστε και το χαρακτηρίσαμε ως σύστημα εξομάλυνσης στην αρχή της μελέτης μας: μειώνει/εξομαλύνει τις μεγάλες μεταβολές στο σήμα εισόδου.

### 15.2.3 Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ σύστημα

Ως τώρα είδαμε ότι μιγαδικά εκθετικά της μορφής  $e^{j\omega n}$ ,  $-\infty < n < \infty$  παράγουν εξόδους της μορφής  $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$  σε ΓΧΑ συστήματα, αποτελούν δηλαδή ιδιοσυναρτήσεις των ΓΧΑ συστημάτων.

Τέτοιες μορφές εισόδων, μη μηδενικές για κάθε  $n$ , μπορεί να σας φαίνονται μη πρακτικά μοντέλα σημάτων. Όμως, όπως θα δούμε τώρα, μοντέλα τέτοιας μορφής είναι κρίσιμα για την μαθηματική αναπαράσταση ενός μεγάλου εύρους σημάτων, ακόμα και αυτών που υπάρχουν μόνο σε πεπερασμένο διάστημα. Όμως πράγματι θα μάθουμε περισσότερα για τη συμπεριφορά ΓΧΑ συστημάτων αν θεωρήσουμε ως εισόδο τους πιο πρακτικά σήματα, όπως το

$$x[n] = e^{j\omega n} u[n] \quad (15.59)$$

δηλαδή μιγαδικά εκθετικά που εφαρμόζονται ξαφνικά σε μια τυχαία χρονική στιγμή, που για λόγους ευκολίας εδώ θεωρούμε ότι είναι η  $n = 0$ . Με χρήση του αθροίσματος της συνέλιξης, θα έχουμε ότι η έξοδος είναι της μορφής

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left( \sum_{k=0}^n h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases} \quad (15.60)$$

Αν θεωρήσουμε την έξοδο για  $n \geq 0$ , μπορούμε να γράψουμε ότι

$$y[n] = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} - \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \quad (15.61)$$

$$= H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} - \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \quad (15.62)$$

$$= y_{ss}[n] + y_t[n] \quad (15.63)$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι η έξοδος αποτελείται από δυο όρους. Ο πρώτος όρος,  $y_{ss}[n]$ , ονομάζεται **απόκριση σταθερής κατάστασης - steady state response**. Είναι ακριβώς ίδιος με την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος για ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα που ορίζεται για κάθε  $n$ . Ο δεύτερος όρος

$$y_t[n] = - \left( \sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \quad (15.64)$$

ονομάζεται **μεταβατική κατάσταση - transient response**, και μπορεί κανείς να τον δει ως το “πόσο απέχει” το αποτέλεσμα μας από το αποτέλεσμα της ιδιοτιμής που είδαμε νωρίτερα. Θα δείξουμε ότι για κάποιες περιπτώσεις η μεταβατική κατάσταση μπορεί να πλησιάζει το μηδέν.

Για να δούμε πότε συμβαίνει αυτό, ας αναζητήσουμε το μέγεθος του δεύτερου αυτού όρου. Το μέτρο του είναι

φραγμένο, ως

$$|y_t[n]| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| \quad (15.65)$$

Με βάση αυτό, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(α') Αν η κρουστική απόκριση  $h[n]$  είναι πεπερασμένης διάρκειας, έτσι ώστε  $h[n] \neq 0$ ,  $0 \leq n \leq M$ , και παντού αλλού μηδέν, τότε ο όρος  $y_t[n] = 0$ ,  $n > M - 1$ . Άρα τότε

$$y[n] = y_{ss}[n] = H(e^{j\omega n}) e^{j\omega n}, \quad n > M - 1 \quad (15.66)$$

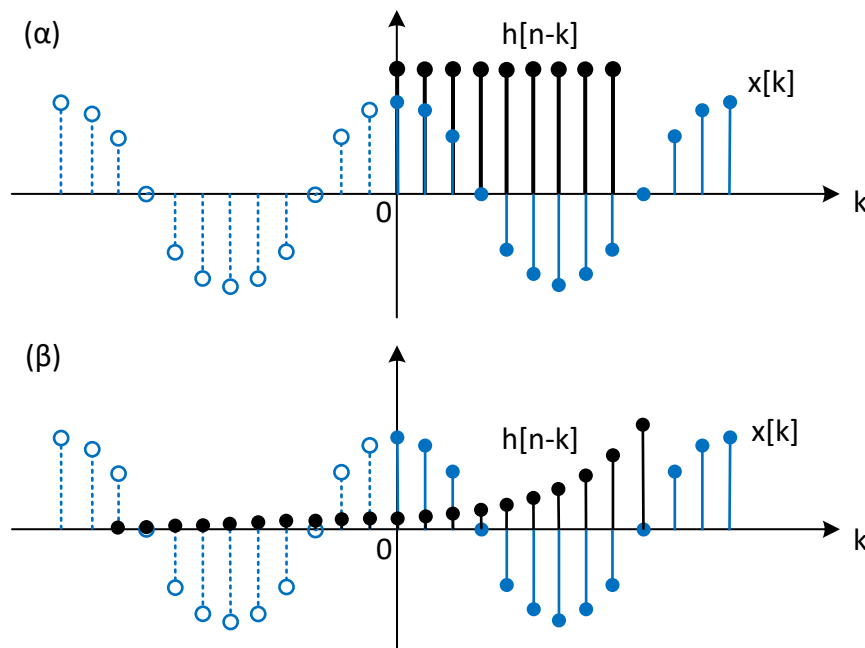
(β') Όταν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η μεταβατική απόκριση δεν εξαφανίζεται ακαριαία, αλλά αν οι τιμές της κρουστικής απόκρισης  $h[n]$  πλησιάζουν στο μηδέν όσο αυξάνει το  $n$ , τότε και το  $y_t[n]$  θα πλησιάζει στο μηδέν! Είδατε στη Σχέση (15.65) ότι η μεταβατική απόκριση είναι φραγμένη από το άθροισμα των απολύτων τιμών όλων των δειγμάτων της κρουστικής απόκρισης.

Αν λοιπόν το άθροισμα αυτό είναι φραγμένο, έτσι ώστε

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| < \infty \quad (15.67)$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές, όπως γνωρίζετε. Από τη Σχέση (15.65), συνεπάγεται ότι για ευσταθή συστήματα, η μεταβατική απόκριση πρέπει να φθίνει προς το μηδέν, όσο  $n \rightarrow \infty$ . Έτσι, μια ικανή συνθήκη για να φθίνει η μεταβατική απόκριση γρήγορα είναι το σύστημα να είναι ευσταθές.

Ας δούμε ένα οπτικό παράδειγμα. Το Σχήμα 15.5 δείχνει το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού εκθετικού ( $\Re\{e^{j\omega n}\} = \cos(\omega n)$ ) με συχνότητα  $\omega = 2\pi/10$ . Και στα δυο υπο-σχήματα, τα δείγματα με γεμάτο χρώμα δείχνουν τα δείγματα του σήματος  $\Re\{e^{j\omega n}\}u[n]$ , δηλ. ένα σήμα που εμφανίζεται ξαφνικά, ενώ τα δείγματα με άδειο χρώμα δείχνουν τα υπόλοιπα δείγματα του  $\Re\{e^{j\omega n}\}$ , που “λείπουν”. Τα δείγματα με μαύρο χρώμα δείχνουν τα δείγματα της κρουστικής απόκρισης του συστήματος  $h[n]$ , που έχει υποστεί ανάκλαση και μετατόπιση, όπως είχαμε δει στη συνέλιξη.



Σχήμα 15.5: Παράδειγμα ξαφνικής εισόδου σε ΓΧΑ σύστημα όταν (α) η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένη, (β) η κρουστική απόκριση είναι άπειρη.

Στην περίπτωση 15.5(α), τα δείγματα της κρουστικής απόκρισης είναι πεπερασμένα, και συγκεκριμένα 9 δείγματα, με  $n = 8$  στο  $h[n-k]$ , όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω. Είναι ξεκάθαρο εδώ ότι η έξοδος θα αποτελείται μόνο από το κομμάτι της μεταβατικής απόκρισης, για  $n \geq 8$ , ενώ στην περίπτωση 15.5(β), όπου η κρουστική απόκριση είναι άπειρης διάρκειας, είναι ξεκάθαρο ότι τα δείγματα που “λείπουν” από το  $\Re\{e^{j\omega n}\}u[n]$ , έχουν όλο και λιγότερη

επίδραση-συνεισφορά στην έξοδο όσο το  $n$  αυξάνει, λόγω της φθίνουσας μορφής της κρουστικής απόκρισης.

Κλείνοντας, η συνθήκη

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad (15.68)$$

είναι ικανή και αναγκαία για την εξάλειψη της συνιστώσας της μεταβατικής απόκρισης της εξόδου. Θυμηθείτε ότι η ίδια συνθήκη είναι ικανή και αναγκαία για την ύπαρξη της απόκρισης σε συχνότητα, αλλά και για την ευστάθεια του συστήματος. Όπως και στο συνεχή χρόνο, μπορείτε να φανταστείτε ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα που υπάρχει για κάθε  $n$  να ξεκινάει από το  $n = -\infty$ . Η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης των μιγαδικών εκθετικών σημάτων εξαρτάται από την ευστάθεια του συστήματος, κι έτσι για πεπερασμένο  $n$ , η μεταβατική απόκριση θα πρέπει να έχει μηδενιστεί, ώστε να βλέπουμε μόνο τη απόκριση σταθερής κατάστασης  $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$  για κάθε πεπερασμένο  $n$ .

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

#### Παράδειγμα 15.4:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (15.69)$$

και στο οποίο εμφανίζεται η είσοδος  $x[n] = \cos(\pi n)u[n]$ . Υπολογίστε την απόκριση σταθερής κατάστασης  $y_{ss}[n]$ .

Λύση:

Θα είναι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \cos(\pi k)u[k] \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-k} u[n-k] \quad (15.70)$$

$$= \sum_{k=0}^n \cos(\pi k) \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(-\frac{1}{4}\right)^{-k} \quad (15.71)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^n (4)^k = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{1-4^{n+1}}{1-4}, \quad n \geq 0 \quad (15.72)$$

$$= -\frac{1}{3} \left[ \left(-\frac{1}{4}\right)^n - 4(-1)^n \right] u[n] \quad (15.73)$$

Όταν ο χρόνος  $n$  πάρει μεγάλες τιμές, τότε θα έχει επικρατήσει η απόκριση σταθερής κατάστασης, και άρα

$$y_{ss}[n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} y[n] = \frac{4}{3} (-1)^n u[n] \quad (15.74)$$

## 15.3 Ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Θα ήταν ενδιαφέρον λοιπόν, μετά από τόση συζήτηση να δούμε πως μοιάζει ένα σήμα όχι στο χρόνο, αλλά στη συχνότητα. Το βασικότερο εργαλείο για αυτή τη δουλειά είναι ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT). Στη φιλοσοφία όλων των μετασχηματισμών που έχουμε δει ως τώρα, είναι κι αυτός μια μαθηματική σχέση που μας “περνάει” από το πεδίο του (διακριτού) χρόνου  $n$  στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ . Ο μετασχ. Fourier<sup>3</sup> ορίζεται ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (15.75)$$

και ο αντίστροφός του (δηλ. το μαθηματικό εργαλείο που μας μεταφέρει από το χώρο της συχνότητας στο χώρο του χρόνου) ορίζεται ως:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega. \quad (15.76)$$

<sup>3</sup>Όπου δεν υπάρχει θέμα σαφήνειας, η φράση διακριτού χρόνου θα παραλείπεται.

Δείτε ότι ο μετασχ. Fourier είναι περιοδικό σήμα ως προς  $\omega$ <sup>4</sup>, δηλ.

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)}) \quad (15.77)$$

Προσέξτε ότι στο μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου, μια τέτοια περιοδικότητα δεν υπήρχε<sup>5</sup>.

Μας είναι βολικό να ενδιαφερόμαστε για το φάσμα του μετασχ. Fourier στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , σε μια περίοδο δηλαδή του μετασχηματισμού. Θεωρούμε ότι εκτός αυτού του διαστήματος, το σήμα επαναλαμβάνεται περιοδικά. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε το σήμα στο χρόνο από τον μετασχ. Fourier του, μας αρκεί μια περίοδος (διάρκειας  $2\pi$ ) του φάσματός του, όπως υποδηλώνει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (15.76). Επίσης, προσέξτε ότι η Σχέση (15.76) μας αναπαριστά ένα σήμα στο χρόνο  $x[n]$  ως υπέρθεση απειροστά μικρής συχνότητας μιγαδικών εκθετικών σημάτων διακριτού χρόνου της μορφής

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (15.78)$$

με τη μεταβλητή  $\omega$  να ορίζεται σε ένα διάστημα διάρκειας  $2\pi$ , και το  $X(e^{j\omega})$  να δηλώνει το “βάρος - συντελεστή” καθενός μιγαδικού εκθετικού. Με άλλα λόγια:

### Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

1. Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου  $X(e^{j\omega})$  μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες  $d\omega$ , οι οποίες παίρνουν *συνεχείς τιμές* στο  $(-\pi, \pi]$ , και “υπάρχουν” μέσα στο σήμα  $x[n]$ . Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση  $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$ .
2. Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση  $X(e^{j\omega})$ , δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να *συνθέσει* το σήμα στο χρόνο  $x[n]$ , ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών όλων των πιθανών συχνοτήτων  $d\omega$  του διαστήματος  $(-\pi, \pi]$ , με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή  $X(e^{j\omega})$ , κανονικοποιημένο με συντελεστή  $1/2\pi$ .

Ο μετασχ. Fourier είναι εν γένει μιγαδικό σήμα. Άρα μπορεί να χωριστεί σε πραγματικό,  $\Re\{X(e^{j\omega})\}$ , και φανταστικό,  $\Im\{X(e^{j\omega})\}$ , μέρος, όπως επίσης και να γραφεί σε πολική μορφή:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})} \quad (15.79)$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{\Re\{X(e^{j\omega})\}^2 + \Im\{X(e^{j\omega})\}^2} = \sqrt{X_R(e^{j\omega})^2 + X_I(e^{j\omega})^2} \quad (15.80)$$

και

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{\Im\{X(e^{j\omega})\}}{\Re\{X(e^{j\omega})\}} \quad (15.81)$$

Το μέτρο,  $|X(e^{j\omega})|$ , του μετασχ. Fourier, καθώς και η γραφική του παράσταση, συχνά ονομάζεται *φάσμα πλάτους - magnitude spectrum*, ενώ η φάση,  $\angle X(e^{j\omega})$ , του μετασχηματισμού ονομάζεται *φάσμα φάσης - phase spectrum*, κατά πλήρη αντιστοιχία με όλες τις φασματικές αναπαραστάσεις που έχουμε δει ως τώρα.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα είναι ότι αν το σήμα στο χρόνο  $x[n]$  είναι πραγματικό, τότε ο μετασχ. Fourier  $X(e^{j\omega})$  είναι *συζυγής συμμετρική* συνάρτηση της συχνότητας:

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) \quad (15.82)$$

Επίσης, η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι το πραγματικό μέρος της συνάρτησης  $X(e^{j\omega})$  ενός πραγματικού σήματος  $x[n]$  είναι άρτιο, και το φανταστικό είναι περιττό, δηλ.

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) \quad (15.83)$$

<sup>4</sup>Θυμηθείτε ότι ο μετασχ. Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου μπορεί να προέρχεται από το φάσμα ενός δειγματοληπτημένου σήματος, που όπως γνωρίζετε, είναι περιοδικό με περίοδο  $f_s$ . Χμ... και πώς από το  $f_s = \frac{1}{T_s}$  ξαφνικά εδώ έχουμε περιοδικότητα ανά  $2\pi$ ; Γιατί απ' ενός, ισχύει  $\omega_s = 2\pi f_s = 2\pi/T_s$ , αλλά φυσικά δεν προέρχονται όλα τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία αντίστοιχων σημάτων συνεχούς χρόνου. Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να οριστεί κατ' ευθείαν στο διακριτό χρόνο, χωρίς να υποθέσουμε οτιδήποτε για κάποια δειγματοληψία του, και άρα να θέσουμε  $T_s = 1$ .

<sup>5</sup>Προφανώς, γιατί  $X(f) \neq X(f+2\pi)$ , γιατί φυσικά  $e^{j\omega t} \neq e^{j(\omega+2\pi)t} = e^{j\omega t} e^{j2\pi t}$

$$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega}) \quad (15.84)$$

Ως εκ τούτου, το μέτρο της είναι άρτια συνάρτηση ως προς  $\omega$  και η φάση είναι περιττή συνάρτηση ως προς  $\omega$ , δηλ.

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad (15.85)$$

$$\phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \quad (15.86)$$

Μάλιστα, οι παραπάνω σχέσεις μας βοηθούν να αναπτύξουμε μια πολύ πιο διαισθητική σχέση για το μετασχ. Fourier ως εξής:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (15.87)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega \quad (15.88)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega \quad (15.89)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{-j\omega})| e^{j\phi_x(e^{-j\omega})} e^{-j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega \quad (15.90)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{-j\phi_x(e^{j\omega})} e^{-j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega \quad (15.91)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (|X(e^{j\omega})| e^{-j\phi_x(e^{j\omega})} e^{-j\omega n} + |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n}) d\omega \quad (15.92)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2|X(e^{j\omega})| \cos(\omega n + \phi_x(e^{j\omega})) d\omega \quad (15.93)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ξεκάθαρα ότι ένα πραγματικό σήμα μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα ημιτόνων διακριτού χρόνου, με συχνότητες που παίρνουν κάθε τιμή στο διάστημα  $[0, \pi]$ , με πλάτη  $2|X(e^{j\omega})|$  και φάσεις  $\phi_x(e^{j\omega})$ , για  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

### 15.3.1 Ύπαρξη του Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

Για να υπάρχει ο μετασχ. Fourier, θα πρέπει να συγκλίνει το άθροισμα που υπάρχει στον ορισμό του, δηλ.

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \iff \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n] e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| < \infty \quad (15.94)$$

Όμως, ξέρουμε ότι  $|e^{-j\omega n}| = 1$ , άρα αρκεί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad (15.95)$$

δηλ. το σήμα πρέπει να είναι απολύτως αθροίσιμο. Η παραπάνω συνθήκη εγγυάται ταυτόχρονα και την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος. Αυτή η συνθήκη όμως είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία. Για παράδειγμα, το σήμα

$$x[n] = \frac{\sin(n)}{n} \quad (15.96)$$

δεν ικανοποιεί τη Σχέση (15.95), αλλά υπάρχει ο μετασχ. Fourier του. Έτσι, πολλά σήματα δεν είναι απολύτως αθροίσιμα, αλλά είναι αθροίσιμα με την τετραγωνική έννοια, δηλ.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (15.97)$$

Τέτοια σήματα μπορούν να παρασταθούν με τον μετασχ. Fourier, αν είμαστε πρόθυμοι να “χαλαρώσουμε” λίγο τη συνθήκη της ομοιόμορφης σύγκλισης :-). Συγκεκριμένα, για τη μέση τετραγωνική σύγκλιση, ισχύει ότι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (15.98)$$

και

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n} \quad (15.99)$$

τότε

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0 \quad (15.100)$$

Με άλλα λόγια, το σφάλμα  $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$  μπορεί να μη συγκλίνει στο μηδέν για κάθε  $\omega$  όσο το  $M \rightarrow \infty$ , αλλά η συνολική ενέργεια του σφάλματος τείνει στο μηδέν.

### 15.3.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Στις περιπτώσεις που μας ζητείται να υπολογίσουμε τον μετασχ. Fourier με τον ορισμό, πολύ χρήσιμες θα μας φανούν οι Σχέσεις του Πίνακα 15.5. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

#### Παράδειγμα 15.5:

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x[n] = a^n u[n] \quad (15.101)$$

με  $a$  πραγματικός αριθμός με  $|a| < 1$ .

#### Λύση:

Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]e^{-j\omega n} \quad (15.102)$$

Επειδή η  $u[n]$ , η γνωστή βηματική συνάρτηση, είναι μη μηδενική και ίση με 1 για  $n \geq 0$ , μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (15.103)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι ο μετασχ. Fourier. Όπως φαίνεται, είναι μια μιγαδική συνάρτηση του  $\omega$ . Δυστυχώς, δε γίνεται να σχεδιαστεί αυτή η συνάρτηση στο χαρτί. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να σχεδιάσουμε το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος της, ξεχωριστά, ή ακόμα και το μέτρο ή τη φάση της συνάρτησης.

Το μέτρο λοιπόν του μετασχ. Fourier θα είναι

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| \frac{1}{1 - a \cos(\omega) + ja \sin(\omega)} \right| \quad (15.104)$$

$$= \frac{1}{|1 - a \cos(\omega) + ja \sin(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos(\omega))^2 + (a \sin(\omega))^2}} \quad (15.105)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(\omega)}} \quad (15.106)$$

ενώ για τη φάση του μετασχ. Fourier θα πρέπει να γράψουμε τον μετασχ. Fourier σε μορφή μέτρου-φάσης, πολλαπλασιάζοντας με το συζυγή του παρονομαστή:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1 - ae^{j\omega}}{|1 - ae^{-j\omega}|^2} = \frac{1 - a \cos(\omega) - ja \sin(\omega)}{|1 - ae^{-j\omega}|^2} \quad (15.107)$$

$$= \frac{1 - a \cos(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} - j \frac{a \sin(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} \quad (15.108)$$

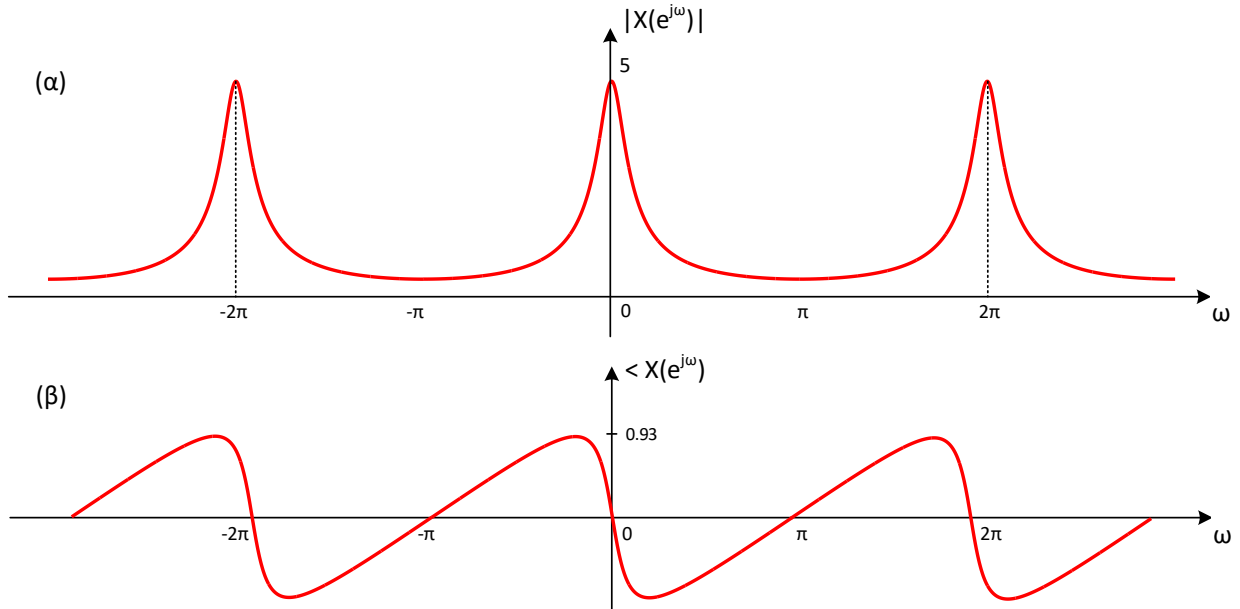
$$= \Re\{X(e^{j\omega})\} + j\Im\{X(e^{j\omega})\} \quad (15.109)$$

Άρα τελικά,

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{-\alpha \sin(\omega)}{1 - \alpha \cos(\omega)} = -\tan^{-1} \frac{\alpha \sin(\omega)}{1 - \alpha \cos(\omega)} \quad (15.110)$$

επειδή η συνάρτηση  $\tan^{-1}(\cdot)$  είναι περιττή.

Έτσι, το σήμα στο διακριτό χρόνο, το φάσμα πλάτους, και το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα (15.6). Παρατηρήστε ότι το φάσμα πλάτους είναι άρτιο, ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττό, όπως αναμενόταν, αφού το  $x[n]$



Σχήμα 15.6: Μετασχ. Fourier σήματος  $x[n] = a^n u[n]$ : (α) Φάσμα πλάτους, (β) Φάσμα φάσης, για  $a = 0.8$ .

είναι πραγματικό. Επίσης, παρατηρήστε ότι τα φάσματα είναι περιοδικά με περίοδο  $2\pi$ , όπως επίσης αναμενόταν. ■

### Παράδειγμα 15.6:

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x[n] = -a^n u[-n - 1] \quad (15.111)$$

με  $a$  πραγματικός αριθμός με  $|a| > 1$ .

#### Λύση:

Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n - 1] e^{-j\omega n} \quad (15.112)$$

Εφόσον

$$u[-n - 1] = \begin{cases} 1, & n \leq -1 \\ 0, & \text{άλλού} \end{cases} \quad (15.113)$$

έχουμε

$$X(e^{j\omega}) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{-j\omega})^n = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{-j\omega})^n \quad (15.114)$$



$$= - \sum_{k=-\infty}^{-1} (a^{-1} e^{j\omega})^k = - \sum_{k=1}^{+\infty} (a^{-1} e^{j\omega})^k \quad (15.115)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1} e^{j\omega})^k \quad (15.116)$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις σχέσεις του Πίνακα ;;. Άρα θα έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1} e^{j\omega})^k = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} \quad (15.117)$$

$$= \frac{1 - a^{-1} e^{j\omega}}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} - \frac{1}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} = - \frac{a^{-1} e^{j\omega}}{1 - a^{-1} e^{j\omega}} \quad (15.118)$$

για  $|a^{-1} e^{j\omega}| < 1 \iff |a| > 1$ . Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με  $ae^{-j\omega}$  έχουμε

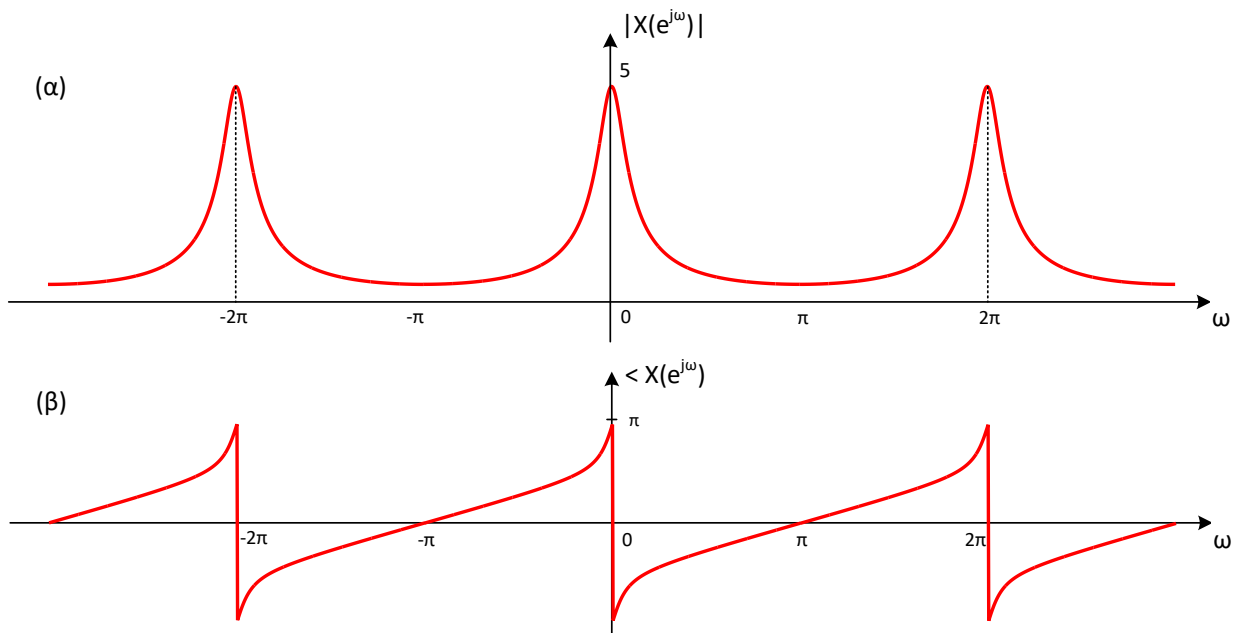
$$X(e^{j\omega}) = - \frac{ae^{-j\omega} a^{-1} e^{j\omega}}{ae^{-j\omega} - a^{-1} e^{j\omega} ae^{-j\omega}} = - \frac{1}{ae^{-j\omega} - 1} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (15.119)$$

Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης για το παραπάνω σήμα δίνονται από τις σχέσεις

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}} \quad (15.120)$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = - \tan^{-1} \frac{a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)} \quad (15.121)$$

Τα παραπάνω φαίνονται στο Σχήμα 15.7, για την τιμή  $a = 1.2$ . Παρατηρήστε ότι οι μαθηματικές μορφές των



Σχήμα 15.7: Μετασχ. Fourier σήματος  $x[n] = -a^n u[-n-1]$ : (α) Φάσμα πλάτους, (β) Φάσμα φάσης, για  $a = 1.2$ .

φασμάτων πλάτους και φάσης είναι όμοιες με αυτές του Σχήματος 15.6. Προφανώς δεν περιγράφουν ίδιες συναρτήσεις, αφού στο προηγούμενο παράδειγμα η τιμή του  $a$  ήταν  $|a| < 1$  ενώ σε αυτό είναι  $|a| > 1$ .

■

**Παράδειγμα 15.7:**

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x[n] = \delta[n] \quad (15.122)$$

**Λύση:**

Ας βρούμε και τον μετασχ. Fourier της πολύ σημαντικής συνάρτησης αυτής. Είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} \quad (15.123)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση δέλτα  $\delta[n]$  ορίζεται μόνο στη θέση  $n = 0$  κι έχει πλάτος 1. Παντού αλλού είναι μηδέν. Άρα το παραπάνω άθροισμα θα γίνει:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} = 1e^{-j\omega 0} = 1 \quad (15.124)$$

Θυμηθείτε ότι και στο συνεχή χρόνο, είχαμε

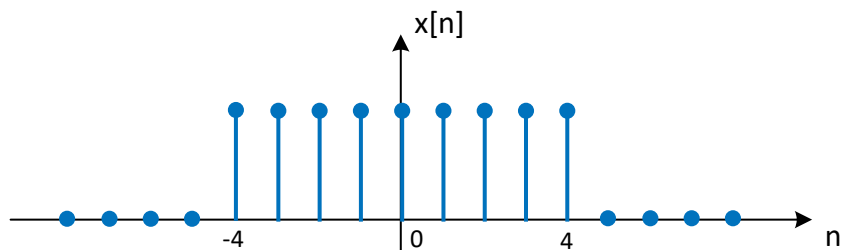
$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (15.125)$$

μόνο που τότε χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα συνεχούς χρόνου, ενώ εδώ τα πράγματα ήταν πιο απλά. Άρα ο μετασχ. Fourier της συνάρτησης δέλτα  $\delta[n]$  είναι απλά η μονάδα. Αυτό τι σημαίνει; Ότι ένα σήμα που αποτελείται μόνο από μια συνάρτηση δέλτα στη θέση  $n = 0$  έχει μετασχηματισμό Fourier μονάδα, δηλ. όλες οι συχνότητες  $\omega$  έχουν πλάτος 1. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που περιέχει όλες τις συχνότητες με ίση “δύναμη”, αφού όλες έχουν μοναδιαίο πλάτος, και μηδενική φάση.

Εναλλακτικά, μπορείτε να διαβάσετε αυτό το αποτέλεσμα ως εξής: για να συνθέσουμε το σήμα  $x[n] = \delta[n]$  στο χρόνο, χρειαζόμαστε όλες τις (άπειρες το πλήθος) συχνότητες  $\omega$  με το ίδιο “βάρος” η καθεμία, τη μονάδα! Ενδιαφέρον!<sup>6</sup> ©

**Παράδειγμα 15.8:**

Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα 15.8,



Σχήμα 15.8: Τετραγωνικός παλμός διάρκειας 9 δειγμάτων.

το οποίο είναι ο τετραγωνικός παλμός διάρκειας  $M = 9$  δειγμάτων.

**Λύση:**

Ας υποθέσουμε ότι ο παλμός είναι διάρκειας  $M$  δειγμάτων, για περισσότερη γενικότητα. Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} 1e^{j\omega n} \quad (15.126)$$

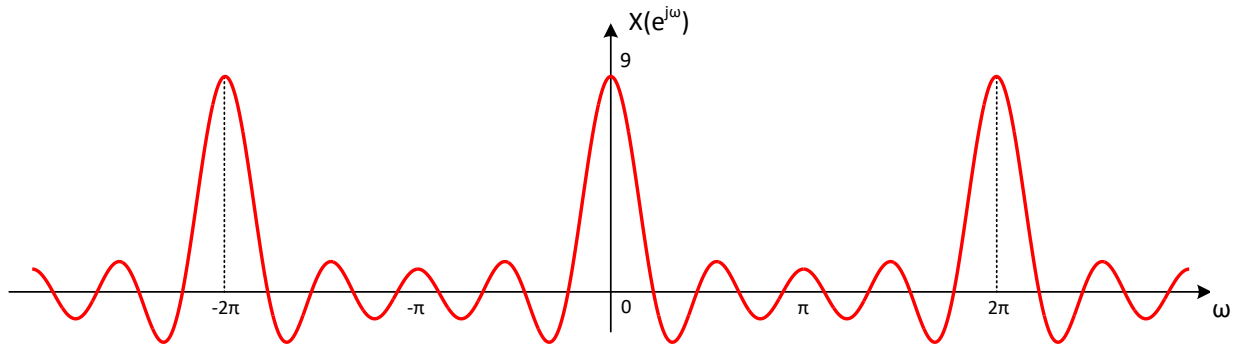
$$= \frac{e^{-j\frac{M+1}{2}\omega} - e^{-j\frac{M-1}{2}\omega}}{e^{-j\omega} - 1} \quad (15.127)$$

<sup>6</sup>Το ίδιο φυσικά συνέβαινε και στο συνεχή χρόνο...

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{-j\omega/2}(e^{-jM\omega/2} - e^{jM\omega/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{-j\omega/2} - e^{j\omega/2})} \end{aligned} \quad (15.128)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{M\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (15.129)$$

Το φάσμα του σήματος φαίνεται στο Σχήμα 15.9. Προσέξτε, εδώ φαίνεται το φάσμα του σήματος (ο ίδιος ο



Σχήμα 15.9: Φάσμα τετραγωνικού παλμού διάρκειας 9 δειγμάτων.

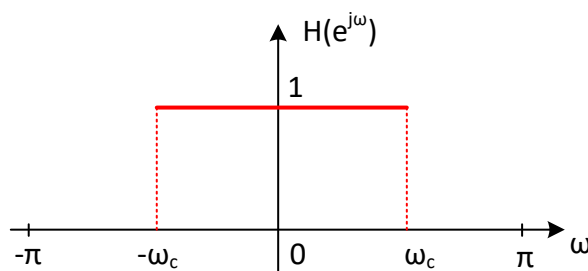
μετασχ. Fourier δηλαδή), που είναι πραγματικό για κάθε  $\omega$ . Το σήμα αυτό ονομάζεται σήμα κυλιόμενης μέσης τιμής (moving average). Το μέτρο της φασματικής απόκρισης είναι

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| \quad (15.130)$$

Βρείτε εσείς τα σημεία μηδενισμού αριθμητή και παρονομαστή, και υπολογίστε το φάσμα φάσης!<sup>7</sup> ☺

### Παράδειγμα 15.9:

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου, που φαίνεται στο Σχήμα 15.10.



Σχήμα 15.10: Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.

### Λύση:

Μας ζητείται ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου, δηλ. το σήμα στο χρόνο από το οποίο προέρχεται αυτό το φίλτρο. Εφαρμόζοντας τον ορισμό, θα έχουμε

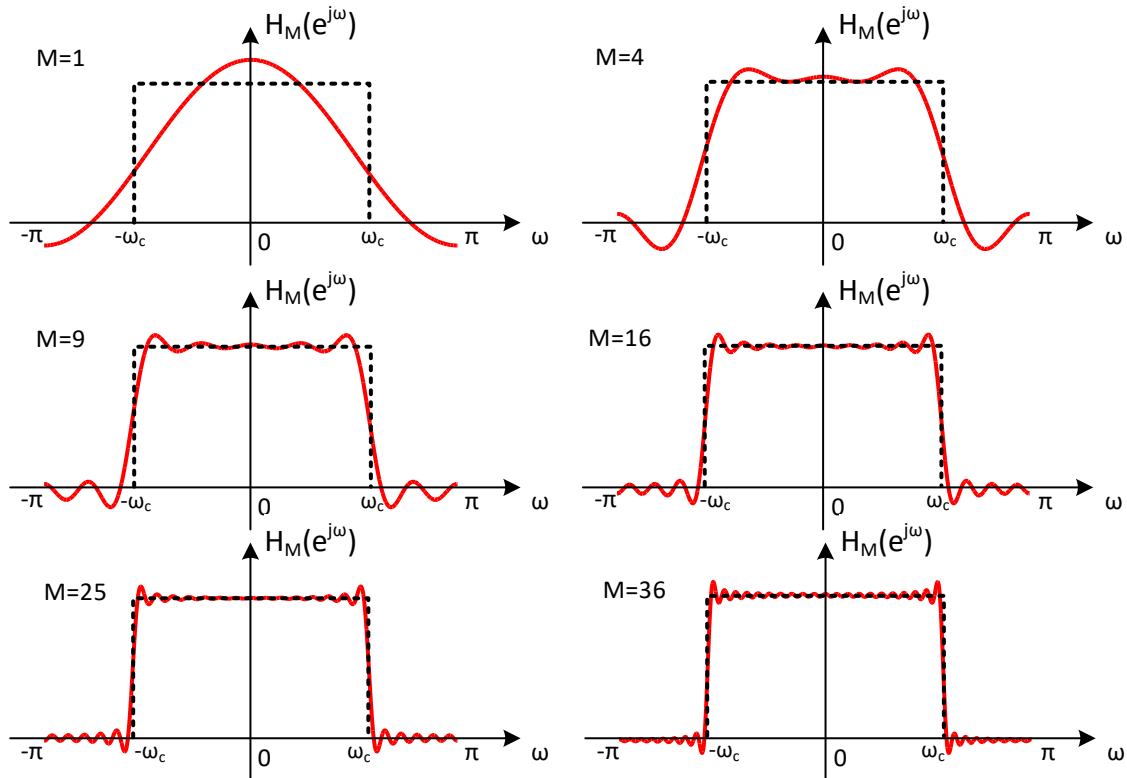
$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n} d\omega \quad (15.131)$$

<sup>7</sup>Θα πρέπει να βρείτε ότι η φάση είναι 0 ή  $\pm\pi$ .

$$= \frac{1}{2\pi} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) \frac{1}{jn} = \frac{1}{2j\pi n} 2j \sin(\omega_c n) \quad (15.132)$$

$$= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad (15.133)$$

Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση ενός τέτοιου φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας, άρα μη πραγματοποιήσιμη! Ακόμα κι αν ήταν όμως πραγματοποιήσιμη, παρατηρήστε ότι δεν είναι αιτιατή (έχει τιμές για  $n < 0$ )! Η μη-αιτιατότητα βέβαια μπορεί να αφθεί εύκολα με μια μετατόπιση, αλλά η άπειρη διάρκεια παραμένει ό,τι και να κάνουμε. Με άλλα λόγια, το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο είναι μη πραγματοποιήσιμο!<sup>8</sup> Ο λόγος για αυτή τη μη πραγματοποιησιμότητα του φίλτρου είναι οι ασυνέχειες του φίλτρου στις συχνότητες  $\omega = \pm\omega_c$ . Αυτό που



Σχήμα 15.11: Προσεγγίσεις ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου για διάφορες τιμές του  $M$ .

μπορούμε να κάνουμε στην πράξη είναι να φτιάξουμε μερικά δείγματα της κρουστικής απόκρισης του  $h_{lp}$ . Αυτά τα δείγματα όμως, όταν τα μετασχηματίσουμε κατά Fourier, δε θα μας δώσουν το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο αλλά μια προσέγγισή του. Το πόσο καλή θα είναι αυτή η προσέγγιση, εξαρτάται από τό πόσα δείγματα της κρουστικής απόκρισης θα δημιουργήσουμε. Δείτε το Σχήμα 15.11, όπου δημιουργούμε  $2M + 1$  δείγματα της κρουστικής απόκρισης για διάφορες τιμές του  $M$ . Παρατηρήστε ότι όσο αυξάνουμε το  $M$ , τόσο πιο κοντά πλησιάζουμε στο ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο. ■

### Παράδειγμα 15.10:

Βρείτε τον μετασχ. Fourier του σήματος

$$x[n] = 1, \quad \forall n \quad (15.134)$$

Λύση:

Το παραπάνω σήμα είναι εμφανώς μη απολύτως αθροίσιμο, όπως και μη αθροίσιμο με την μέση τετραγωνική έννοια. Οπότε ο ορισμός αποτυγχάνει. Θα δείξουμε όμως ότι ο μετασχ. Fourier αυτού του σήματος είναι

$$x[n] = 1 \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r) \quad (15.135)$$

<sup>8</sup>Γι' αυτό λέγεται και ιδανικό  $\odot$ ...

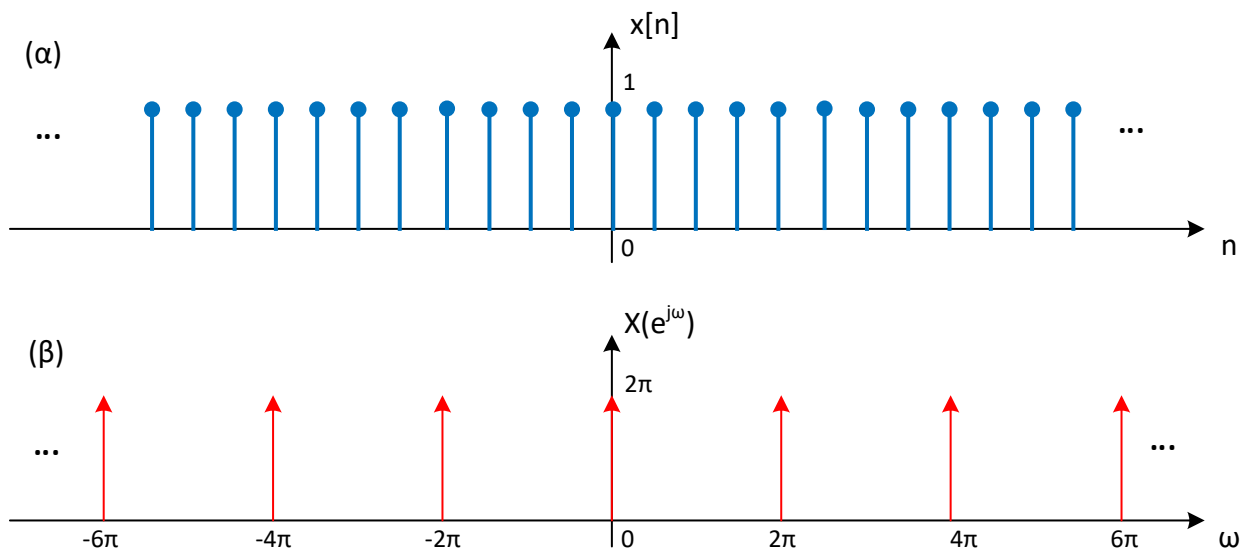
Ας εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier. Δεδομένου ότι αυτός ορίζεται στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$ , το παραπάνω άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ανάγεται σε μόνο μια συνάρτηση Δέλτα, την  $\delta(\omega)$ , αφού μόνο αυτή ανήκει στο παραπάνω διάστημα. Τότε θα είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega = e^{j\omega n} \Big|_{\omega=0} = 1 \quad (15.136)$$

για κάθε  $n$ , λόγω της ιδιότητας της συνάρτησης Δέλτα μιας συνεχούς μεταβλητής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega)f(\omega)d\omega = f(0) \quad (15.137)$$

Το σήμα  $x[n] = 1$  και ο μετασχ. Fourier του φαίνονται στο Σχήμα 15.12. Από το αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε



Σχήμα 15.12: (α) σήμα  $x[n] = 1, \forall n$  και (β) ο μετασχ. Fourier του.

ότι για να συνθέσει κανείς ένα σήμα που δεν αλλάζει ποτέ στο πεδίο του χρόνου, όπως το  $x[n] = 1, \forall n$ , τότε χρειάζεται μόνο μια συχνότητα, τη μηδενική - μην ξεχνάτε ότι για τη σύνθεση του σήματος χρειαζόμαστε μια περίοδο διάρκειας  $2\pi$  στη συχνότητα, η οποία συνήθως είναι το διάστημα  $[-\pi, \pi)$  - με πλάτος  $2\pi$  και μηδενική φάση. Διαισθητικά, είναι λογικό, αφού δεν υπάρχει καμιά μεταβολή του σήματος στο χρόνο ώστε να υπάρξουν και άλλες συχνότητες. ■

### Παράδειγμα 15.11:

Βρείτε τον μετασχ. Fourier του σήματος

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}, \forall n \quad (15.138)$$

με  $\omega \in (-\pi, \pi]$ .

Λύση:

Το παραπάνω σήμα είναι μη απολύτως άθροισμο, όπως και μη άθροισμο με την μέση τετραγωνική έννοια. Οπότε ο ορισμός αποτυγχάνει ξανά. Θα δείξουμε όμως ότι ο μετασχ. Fourier αυτού του σήματος είναι

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r), \quad r \in \mathbb{Z} \quad (15.139)$$

Ας εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier. Δεδομένου ότι αυτός ορίζεται στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$ , το παραπάνω άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ανάγεται σε μόνο μια συνάρτηση Δέλτα, την  $\delta(\omega - \omega_0)$ , αφού μόνο αυτή

ανήκει στο παραπάνω διάστημα. Τότε θα είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega n}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega n}d\omega = e^{j\omega_0 n} \quad (15.140)$$

για κάθε  $n$ , λόγω της ιδιότητας της συνάρτησης Δέλτα μιας συνεχούς μεταβλητής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0)f(\omega)d\omega = f(\omega_0) \quad (15.141)$$

Από το αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε ότι για να συνθέσει κανείς ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας  $\omega_0$  στο πεδίο του χρόνου, τότε χρειάζεται μόνο μια συχνότητα, την  $\omega_0$ , με πλάτος  $2\pi$  και μηδενική φάση. Το σήμα στο χρόνο μεταβάλλεται με συγκεκριμένη συχνότητα, οπότε είναι λογικό να μη χρειάζονται άλλες συχνότητες για τη σύνθεσή του. Το παραπάνω σήμα όμως ήταν μιγαδικό, ας δούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση ενός πραγματικού σήματος συγκεκριμένης συχνότητας. ■

### Παράδειγμα 15.12:

Βρείτε τον μετασχ. Fourier του σήματος

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi), \quad \forall n \quad (15.142)$$

με  $\omega \in (-\pi, \pi]$ .

Λύση:

Δουλεύοντας με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, έχουμε

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \quad (15.143)$$

Οπότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (15.144)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \right) e^{-j\omega n} \quad (15.145)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\omega n} \quad (15.146)$$

$$= \frac{A}{2} e^{j\phi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\omega n} \quad (15.147)$$

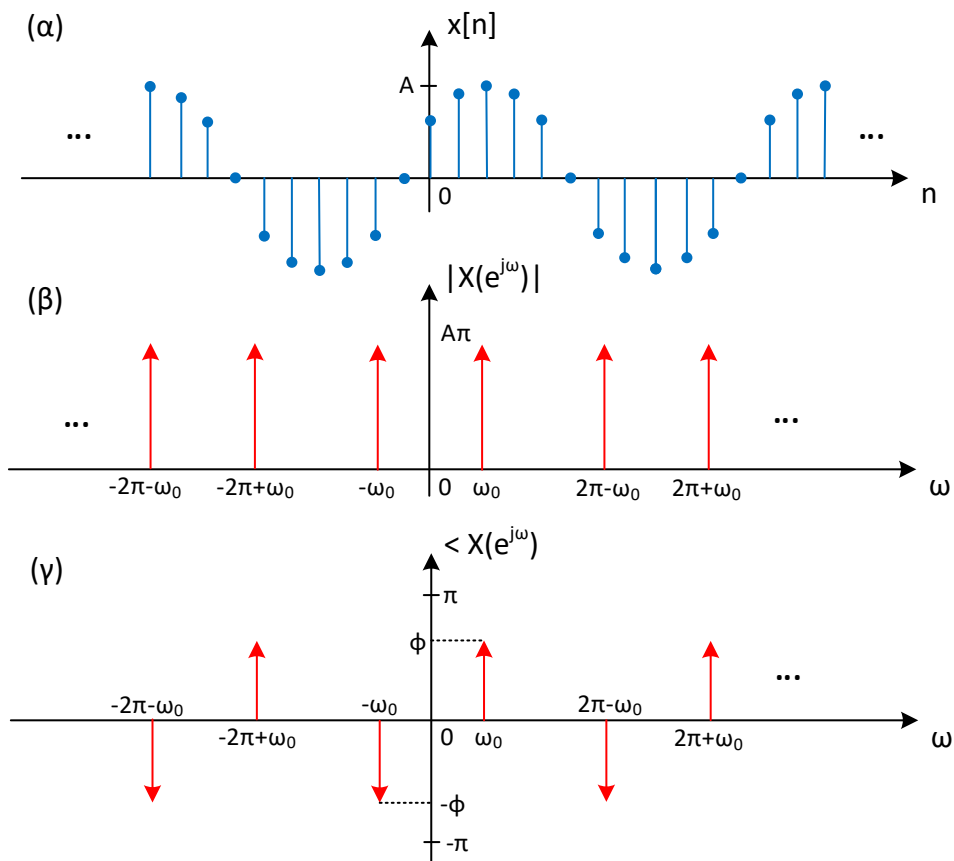
Οι παραπάνω δυο όροι του αθροίσματος είναι οι μετασχ. Fourier των  $e^{j\omega_0 n}$  και  $e^{-j\omega_0 n}$ , τους οποίους βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Άρα

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A\pi \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) \quad (15.148)$$

$$= A\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left( e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) \right) \quad (15.149)$$

Το σήμα  $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$  και ο μετασχ. Fourier του φαίνονται στο Σχήμα 15.13. Από το αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε ότι για να συνθέσει κανείς ένα πραγματικό σήμα συχνότητας  $\omega_0$  στο πεδίο του χρόνου, τότε χρειάζεται μόνο δυο συχνότητες, την  $\omega_0$  και την  $-\omega_0$  - αν θεωρήσουμε ως “παράθυρό” μας στη συχνότητα το διάστημα  $[-\pi, \pi)$  - οι οποίες αντιστοιχούν στα δυο συζυγή μιγαδικά εκθετικά που αποτελούν ένα συνημίτονο. Τα πλάτη τους ισούνται με  $A\pi$  και η φάση τους είναι  $\pm\phi$ .

Μπορείτε εσείς να βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος  $x[n] = A \sin(\omega_0 n)$ ;



Σχήμα 15.13: (α) σήμα  $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$  και (β) ο μετασχ. Fourier του.

**Παράδειγμα 15.13:**

Βρείτε τον μετασχ. Fourier του σήματος

$$x[n] = u[n] \tag{15.150}$$

Λύση:

Αν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό, θα έχουμε

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-j\omega n} \tag{15.151}$$

Αυτό το άθροισμα δεν συγκλίνει, αφού  $|e^{j\omega n}| = 1$ , και όχι μικρότερο της μονάδας. Χρειαζόμαστε έναν εναλλακτικό τρόπο. Παρατηρήστε ότι η βηματική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως

$$u[n] = \frac{1}{2} \text{sgn}[n] + \frac{1}{2} = u_1[n] + u_2[n] \tag{15.152}$$

με

$$\text{sgn}[n] = \begin{cases} 1/2, & n \geq 0 \\ -1/2, & n < 0 \end{cases} \tag{15.153}$$

Γνωρίζουμε από προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$u_2[n] = \frac{1}{2} \longleftrightarrow U_2(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi r) \quad (15.154)$$

Αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του σήματος  $u_1[n] = \frac{1}{2}\text{sgn}[n]$ . Έστω  $U_1(e^{j\omega}) = F\{u_1[n]\}$ . Παρατηρήστε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\delta[n] = u_1[n] - u_1[n-1] \quad (15.155)$$

Παίρνοντας το μετασχ. Fourier και στα δυο μέλη, έχουμε

$$F\{\delta[n]\} = F\{u_1[n] - u_1[n-1]\} \quad (15.156)$$

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u_1[n] - u_1[n-1])e^{-j\omega n} \quad (15.157)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_1[n]e^{-j\omega n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_1[n-1]e^{-j\omega n} \quad (15.158)$$

$$= U_1(e^{j\omega}) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_1[k]e^{-j\omega(k+1)} \quad (15.159)$$

$$= U_1(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_1[k]e^{-j\omega k} \quad (15.160)$$

$$= U_1(e^{j\omega}) - e^{-j\omega}U_1(e^{j\omega}) \quad (15.161)$$

$$U_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \quad (15.162)$$

Άρα τελικά, από τις Σχέσεις (15.162,15.154) έχουμε:

$$u[n] \longleftrightarrow U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi r) \quad (15.163)$$

■

Εδώ χρησιμοποιήσαμε έμμεσα δυο σημαντικές ιδιότητες, αυτή της γραμμικότητας και αυτή της χρονικής μετατόπισης, τις οποίες θα αποδείξουμε ρητά στη συνέχεια.

## 15.4 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες σχετικά με τον μετασχ. Fourier αναφέρονται στον Πίνακα 15.1.

### 15.4.1 Αποδείξεις και Παραδείγματα

Ακολουθούν οι αποδείξεις των ιδιοτήτων του παραπάνω Πίνακα, καθεμιά μαζί με ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

#### 15.4.1.1 Γραμμικότητα

Ο μετασχ. Fourier του αθροίσματος  $z[n] = Ax[n] + By[n]$  δίνεται ως

$$Z(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (Ax[n] + By[n])e^{-j\omega n} \quad (15.164)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Ax[n]e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} By[n]e^{-j\omega n} \quad (15.165)$$

$$= A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} + B \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} \quad (15.166)$$



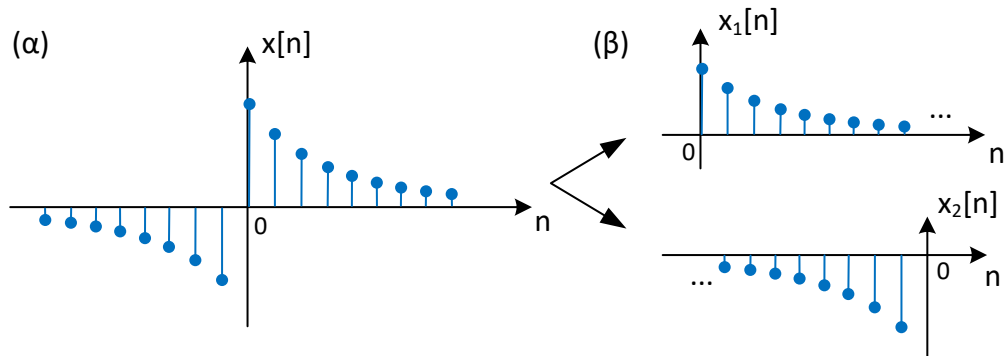
Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου		
Ιδιότητα	Σήμα	Μετασχ. Fourier
Γραμμικότητα	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στη συχνότητα	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ , ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
Συζυγία στο χρόνο	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Παραγωγή στη συχνότητα	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$k$ -οστή παραγωγή στη συχνότητα	$(-jn)^k x[n]$	$\frac{d^k X(e^{j\omega})}{d\omega^k}$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
Γινόμενο στο χρόνο	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
Διαφορά στο χρόνο	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Άθροισμα στο χρόνο	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{j\omega}} X(e^{j\omega})$
Συζυγής συμμετρία	$x[n]$ πραγματικό	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}), \\ \Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\}, \\ \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\}, \\  X(e^{j\omega})  =  X(e^{-j\omega}) , \\ \phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \end{cases}$
Άρτιο σήμα	$x[n] = x[-n]$ , πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Re$ και άρτιο
Περιττό σήμα	$x[n] = -x[-n]$ , πραγματικό	$X(e^{j\omega}) \in \Im$ και περιττό
Άρτιο μέρος	$x_e[n] = \text{Ev}\{x[n]\}$ , πραγματικό	$\Re\{X(e^{j\omega})\}$
Περιττό μέρος	$x_o[n] = \text{Od}\{x[n]\}$ , πραγματικό	$j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Θεώρημα Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

Πίνακας 15.1: Χρήσιμες Ιδιότητες Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου.

$$= AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega}) \quad (15.167)$$

### Παράδειγμα 15.14:

Έστω το σήμα  $x[n]$  που φαίνεται στο Σχήμα 15.14(α).



Σχήμα 15.14: Εφαρμογή της Γραμμικότητας.

Βρείτε το μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου του σήματος αυτού.

Λύση:

Μπορεί κανείς να γράψει το  $x[n]$  ως άθροισμα δυο γνωστών σημάτων  $x_1[n], x_2[n]$ , τα οποία φαίνονται στο Σχήμα 15.14(β) ως

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \quad (15.168)$$

Τα  $x_1[n], x_2[n]$  είναι τα γνωστά μας σήματα

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad (15.169)$$

$$x_2[n] = -b^n u[-n-1] \quad (15.170)$$

με  $0 < |a| < 1$  και  $|b| > 1$ . Οπότε το  $x[n]$  είναι

$$x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1] \quad (15.171)$$

και ο μετασχ. Fourier του είναι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - be^{-j\omega}} = \frac{2 - (a+b)e^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})} \quad (15.172)$$

#### 15.4.1.2 Χρονική Μετατόπιση

Ο μετασχ. Fourier του σήματος  $y[n] = x[n - n_0]$  δίνεται ως

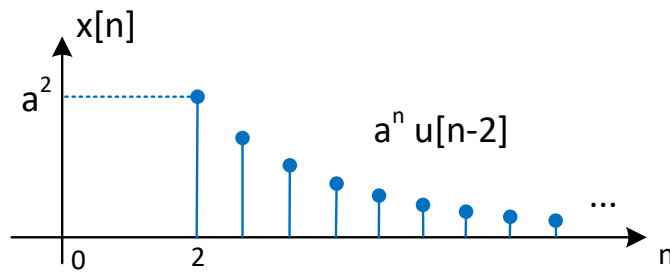
$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n - n_0] e^{-j\omega n} = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[u] e^{-j\omega(u+n_0)} \quad (15.173)$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[u] e^{-j\omega u} e^{-j\omega n_0} = e^{-j\omega n_0} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[u] e^{-j\omega u} \quad (15.174)$$

$$= X(e^{j\omega}) e^{-j\omega n_0} \quad (15.175)$$

### Παράδειγμα 15.15:

Έστω το σήμα  $x[n] = a^n u[n - 2]$ ,  $|a| < 1$  που φαίνεται στο Σχήμα 6.11(α).



Σχήμα 15.15: Εφαρμογή της Χρονικής Μετατόπισης.

Βρείτε το μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου του παραπάνω σήματος.

Λύση:

Το σήμα αυτό μοιάζει με το γνωστό μας  $a^n u[n]$ , του οποίου γνωρίζουμε το μετασχ. Fourier. Μπορεί κανείς να γράψει το  $x[n]$  ως

$$x[n] = a^n u[n-2] = a^{-2} a^2 a^n u[n-2] = a^2 a^{n-2} u[n-2] \quad (15.176)$$

Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, θα είναι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{a^2}{1 - ae^{-j\omega}} e^{-j2\omega} \quad (15.177)$$

### 15.4.1.3 Μετατόπιση στη συχνότητα

Ο μετασχ. Fourier ενός σήματος  $x[n]$  είναι  $X(e^{j\omega})$ . Έστω ότι μετατοπίζουμε το φάσμα κατά  $\omega = \pm\omega_0$ , με  $\omega_0 > 0$ , δηλ. έχουμε το  $X(e^{j(\omega \pm \omega_0)})$ . Το σήμα στο χρόνο  $y[n]$  που αντιστοιχεί σε αυτό το φάσμα είναι

$$y[n] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{j(\omega \pm \omega_0)}) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{ju}) e^{j(u \mp \omega_0)n} du \quad (15.178)$$

$$= e^{\mp j\omega_0 n} \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{ju}) e^{jun} du = e^{\mp j\omega_0 n} x[n] \quad (15.179)$$

### Παράδειγμα 15.16:

Έστω ο μετασχ. Fourier ενός σήματος ως

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (15.180)$$

Βρείτε το σήμα στο χρόνο που αντιστοιχεί στο σήμα  $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$ .

Λύση:

Ο μετασχ. Fourier  $X(e^{j\omega})$  δηλώνει ένα χαμηλοπερατό φίλτρο, που έχει αντίστροφο μετασχ. Fourier

$$x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad (15.181)$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί ως

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega - \pi| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega - \pi| < \pi \end{cases} \quad (15.182)$$

ο οποίος αναπαριστά ένα υπερπαρατό φίλτρο. Από την ιδιότητα της μετατόπισης στη συχνότητα έχουμε

$$y[n] = e^{j\omega_0 n} x[n] = e^{j\pi n} \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = (-1)^n \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad (15.183)$$

#### 15.4.1.4 Συζυγές σήμα στο χρόνο

Για ένα μιγαδικό σήμα  $x[n]$  με μετασχ. Fourier  $X(e^{j\omega})$ , το συζυγές σήμα  $y[n] = x^*[n]$  έχει μετασχ. Fourier

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n] e^{-j\omega n} = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{j\omega n} \right)^* = X^*(e^{-j\omega}) \quad (15.184)$$

#### Παράδειγμα 15.17:

Δείξτε ότι αν

$$X(e^{j\omega}) = 2e^{-j\pi/2} e^{j\omega} + 2e^{j\pi/2} e^{-j\omega} \quad (15.185)$$

τότε για το παραπάνω σήμα ισχύει

$$x[n] = x^*[-n] \quad (15.186)$$

δηλ. το σήμα στο χρόνο είναι συζυγές συμμετρικό.

Λύση:

Σύμφωνα με την ιδιότητα, θα είναι

$$X^*(e^{-j\omega}) = 2e^{j\pi/2} e^{j\omega} + 2e^{-j\pi/2} e^{-j\omega} \longleftrightarrow x^*[n] = 2e^{j\pi/2} \delta[n+1] + 2e^{-j\pi/2} \delta[n-1] \quad (15.187)$$

Βρίσκοντας το  $x^*[-n]$ ,

$$x^*[-n] = 2e^{j\pi/2} \delta[-n+1] + 2e^{-j\pi/2} \delta[-n-1] \quad (15.188)$$

το οποίο αποτελείται από συναρτήσεις Δέλτα στις θέσεις  $n = \pm 1$  με μιγαδικά πλάτη  $e^{\pm\pi/2}$  αντίστοιχα, όπως και το  $x[n]$ . Άρα το σήμα είναι πράγματι συζυγές συμμετρικό.

#### 15.4.1.5 Αντιστροφή στο χρόνο

Το σήμα  $y[n] = x[-n]$  έχει μετασχ. Fourier

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n] e^{-j\omega n} = \sum_{u=+\infty}^{-\infty} x[u] e^{j\omega u} = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[u] e^{j\omega u} = X(e^{-j\omega}) \quad (15.189)$$

#### Παράδειγμα 15.18:

Στο Παράδειγμα 15.30 δείξαμε ότι

$$x[n] = a^n u[n], \quad 0 < a < 1 \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (15.190)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του

$$y[n] = x[-n] = a^{-n} u[-n], \quad 0 < a < 1 \quad (15.191)$$

Λύση:

Είναι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j(-\omega)}} = \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} \quad (15.192)$$

το οποίο καλείται ο αναγνώστης να επιβεβαιώσει με χρήση του ορισμού (Άσκηση XXXX).

## 15.4.1.6 Στάθμιση στο χρόνο

Ας θεωρήσουμε το σήμα  $y[n] = x[kn]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Ο μετασχ. Fourier του είναι

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[kn]e^{-j\omega n} = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[u]e^{-j\omega \frac{u}{k}} = X(e^{j\frac{\omega}{k}}) \quad (15.193)$$

**Παράδειγμα 15.19:**

Ας θεωρήσουμε το γνωστό μας σήμα

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \quad (15.194)$$

το οποίο έχει μετασχ. Fourier

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (15.195)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος  $x[n/2]$ .

Λύση:

Σύμφωνα με την ιδιότητα, το σήμα

$$y[n] = x[n/2] = \begin{cases} a^{n/2} u[n], & n \text{ άρτιος} \\ 0, & n \text{ περιττός} \end{cases} \quad (15.196)$$

πρέπει να έχει μετασχ. Fourier

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\omega}} \quad (15.197)$$

Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί με τον ορισμό, αφού

$$F\{x[n/2]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n/2]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0, \text{ άρτιος}}^{+\infty} a^{n/2} e^{-j\omega n} \quad (15.198)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^{(2n)/2} e^{-j\omega 2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j2\omega n} \quad (15.199)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j2\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j2\omega}} \quad (15.200)$$

Τα παραπάνω απεικονίζονται στο Σχήμα 15.16.

Παρατηρήστε ότι η κλιμάκωση ενός σήματος κατά παράγοντα  $k > 1$  προκαλεί επέκταση του σήματος στη συχνότητα, ενώ όταν  $0 < k < 1$ , το φάσμα του σήματος συμπιέζεται.

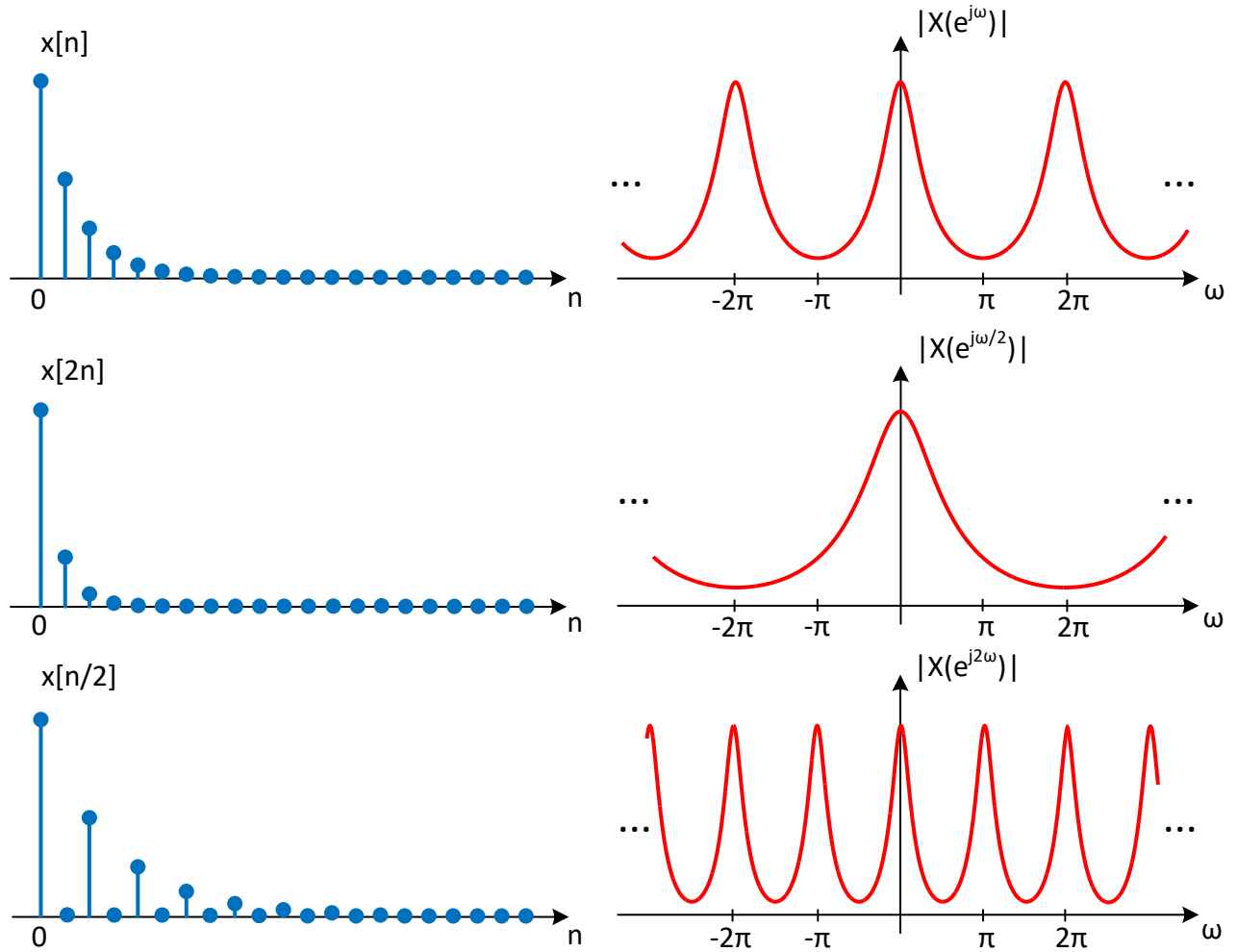
## 15.4.1.7 Συνέλιξη στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier της συνέλιξης δυο σημάτων στο χρόνο είναι

$$F\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] * y[n])e^{-j\omega n} \quad (15.201)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] \right) e^{-j\omega n} \quad (15.202)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n-k] e^{-j\omega n} \right) \quad (15.203)$$



Σχήμα 15.16: Εφαρμογή της Χρονικής Κλιμάκωσης: σήματα χρόνου και συχνότητας.

$$= Y(e^{j\omega}) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (15.204)$$

$$= X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) \quad (15.205)$$

όπου στη Σχέση (15.203) έγινε χρήση της ιδιότητας της χρονικής μετατόπισης.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ σημαντικό. Μας πληροφορεί ότι η πράξη της συνέλιξης στο χρόνο μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο της συχνότητας. Γνωρίζουμε ήδη ότι η συνέλιξη αποτελεί σημαντικότερη πράξη στο χώρο των συστημάτων. Αργότερα θα δούμε πως λειτουργεί αυτή η ιδιότητα στο χώρο της συχνότητας των συστημάτων.

#### Παράδειγμα 15.20:

Υπολογίστε τη συνέλιξη  $c[n]$  των σημάτων

$$x[n] = a^n u[n] \quad (15.206)$$

$$y[n] = b^n u[n] \quad (15.207)$$

με  $|a|, |b| < 1$ .

Λύση:

Σύμφωνα με την ιδιότητα, έχουμε

$$C(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \frac{1}{1 - be^{-j\omega}} \quad (15.208)$$

$$= \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})} = \frac{A}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - be^{-j\omega}} \quad (15.209)$$

με

$$A = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})} (1 - ae^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=1/a} = \frac{1}{1 - be^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=1/a} = \frac{a}{a - b} \quad (15.210)$$

$$B = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - be^{-j\omega})} (1 - be^{-j\omega}) \Big|_{e^{-j\omega}=1/b} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=1/b} = -\frac{b}{a - b} \quad (15.211)$$

από την τεχνική της Ανάπτυξης σε Μερικά Κλάσματα. Οπότε

$$C(e^{j\omega}) = \frac{\frac{a}{a-b}}{1 - ae^{-j\omega}} - \frac{\frac{b}{a-b}}{1 - be^{-j\omega}} \quad (15.212)$$

και από τα ζεύγη του Πίνακα 15.2, έχουμε ότι

$$c[n] = \frac{a}{a-b} a^n u[n] - \frac{b}{a-b} b^n u[n] \quad (15.213)$$

Ας επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμα με τον ορισμό της συνέλιξης.

$$c[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] b^{n-k} u[n-k] \quad (15.214)$$

$$= b^n \sum_{k=0}^n a^k b^{-k} = b^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{b}\right)^k \quad (15.215)$$

$$= b^n \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1 - \frac{a}{b}} = \frac{b^n - \frac{a}{b} a^n}{1 - \frac{a}{b}} \quad (15.216)$$

$$= \frac{b}{b-a} b^n - \frac{a}{b-a} a^n, \quad n \geq 0 \quad (15.217)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τη Σχέση (15.213).

#### 15.4.1.8 Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

Ο μετασχ. Fourier του γινομένου δυο σημάτων στο χρόνο είναι

$$F\{x[n]y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y[n]e^{-j\omega n} \quad (15.218)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{ju})e^{jun} du \right) y[n]e^{-j\omega n} \quad (15.219)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{ju}) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j(\omega-u)n} \right) du \quad (15.220)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(e^{ju})Y(e^{j(\omega-u)}) du \quad (15.221)$$

$$= \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) \quad (15.222)$$

Άρα το γινόμενο δυο σημάτων στο χρόνο μετατρέπεται σε συνέλιξη στο χώρο της συχνότητας.

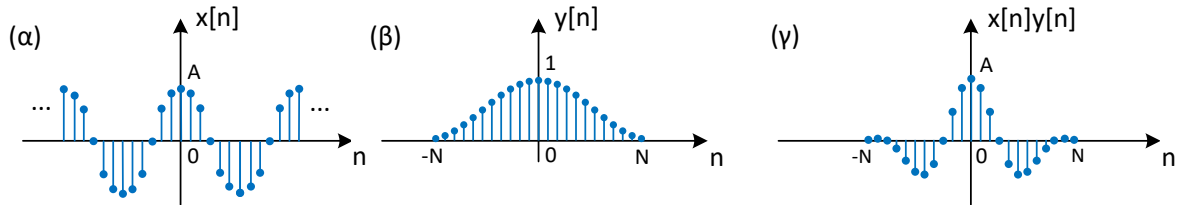
## Παράδειγμα 15.21:

Ας θεωρήσουμε δυο απλά σήματα, τα

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n) \quad (15.223)$$

$$y[n] = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n < N \quad (15.224)$$

Το σήμα  $y[n]$  είναι πολύ δημοφιλές και ονομάζεται παράθυρο *Hamming*<sup>a</sup>. Θα το χρησιμοποιήσουμε για να τμηματοποιήσουμε ένα άπειρης διάρκειας σήμα, όπως ένα ημίτονο. Τα σήματα αυτά, καθώς και το γινόμενο  $x[n]y[n]$  φαίνονται στο Σχήμα 15.17.



Σχήμα 15.17: Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α)  $x[n]$ , (β)  $y[n]$ , (γ)  $x[n]y[n]$ .

Βρείτε το μετασχ. Fourier του γινομένου τους.

<sup>a</sup>Ονομάστηκε από τον Richard W. Hamming, που το πρότεινε.

Λύση:

Παρατηρήστε ότι το γινόμενο ενός σήματος με το τετραγωνικό παλμό διακριτού χρόνου “κόβει” ένα τμήμα του σήματος που αντιστοιχεί στη διάρκεια του παλμού. Αναζητούμε πλέον το μετασχ. Fourier του σήματος  $z[n] = x[n]y[n]$ . Η ιδιότητα του γινομένου στο χρόνο δηλώνει ότι ο μετασχ. Fourier ενός γινομένου σημάτων ισούται με τη συνέλιξη των μετασχ. Fourier τους επί μια σταθερά  $1/(2\pi)$ . Γνωρίζουμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = A\pi\delta(\omega - \omega_0) + A\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (15.225)$$

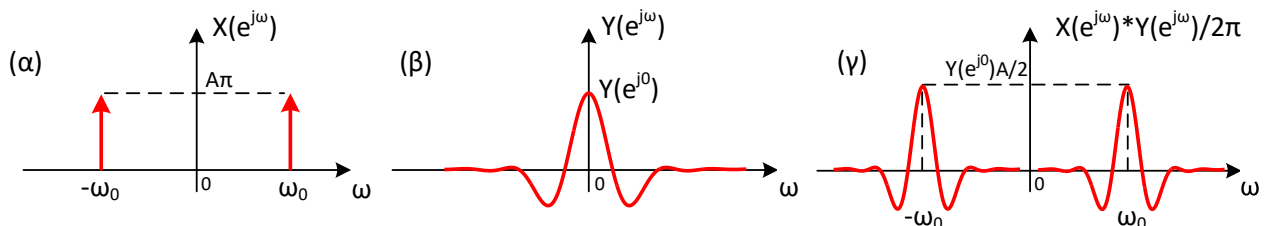
ενώ για το μετασχ. Fourier του παραθύρου Hamming θα κρατήσουμε το συμβολισμό  $Y(e^{j\omega})$ , καθώς η ακριβής μορφή του μετασχηματισμού δεν είναι κρίσιμη στο παράδειγμα αυτό (μπορείτε να την υπολογίσετε στην Άσκηση XXXX). Το  $X(e^{j\omega})$  αποτελείται από συναρτήσεις Δέλτα, και η ιδιότητα

$$X(e^{j\omega}) * \delta(\omega - \omega_0) = X(e^{j(\omega - \omega_0)}) \quad (15.226)$$

μας είναι πολύ χρήσιμη. Άρα τελικά

$$Z(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{2} Y(e^{j(\omega - \omega_0)}) + \frac{A}{2} Y(e^{j(\omega + \omega_0)}) \quad (15.227)$$

Τα σήματα αυτά απεικονίζονται στο Σχήμα 15.18. Θα θέλαμε οι συνιστώσες που προκύπτουν στο φάσμα της



Σχήμα 15.18: Εφαρμογή του Γινομένου στο Χρόνο: σήματα (α)  $X(e^{j\omega})$ , (β)  $Y(e^{j\omega})$ , (γ)  $\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$ .

συνέλιξης να έχουν το ίδιο πλάτος με τις συνιστώσες του σήματος  $X(e^{j\omega})$ . Για να ισχύσει αυτό πρέπει

$$Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 1 \quad (15.228)$$



Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αντιστρόφου μετασχ. Fourier, η παραπάνω σχέση ισοδυναμεί με

$$Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n} \Big|_{\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] = 1 \quad (15.229)$$

Άρα για να έχουμε σωστή εκτίμηση των συνιστωσών του σήματος  $x[n]$  μετά από μια παραθυροποίηση, πρέπει να φροντίσουμε ώστε να ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] = 1 \quad (15.230)$$

Επιπλέον παρατηρούμε τα εξής φαινόμενα:

- Οι φασματικές γραμμές του  $X(e^{j\omega})$  έχουν μηδενικό εύρος - βρίσκονται ακριβώς στις συχνότητες  $\omega = \pm\omega_0$ . Όμως για το παραθυροποιημένο σήμα, στο φάσμα  $Z(e^{j\omega})$  οι γραμμές αυτές έχουν “αντικατασταθεί” από ευρύτερους λοβούς που δίνουν πλάτη και σε συχνότητες γειτονικές αλλά ανύπαρκτες στο αρχικό σήμα. Η ύπαρξη των λοβών οφείλεται στο μετασχ. Fourier του παραθύρου και το εύρος τους καθορίζεται από τη διάρκεια του παραθύρου στο χρόνο. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **φασματική εξάπλωση - spectral spreading**. Στην Παράγραφο ;; θα δούμε τι σημασία έχει αυτό το φαινόμενο στην πράξη.
- Πέραν της φασματικής εξάπλωσης, παρατηρήστε ότι μετά τους πρώτους μηδενισμούς εκατέρωθεν των συχνοτήτων  $\omega = \pm\omega_0$ , υπάρχουν οι λεγόμενοι **πλευρικοί λοβοί - sidelobes** οι οποίοι συνίστανται από χαμηλότερου πλάτους ταλαντώσεις. Προσέξτε ότι το αρχικό σήμα έχει παντού μηδενικό φάσμα πλὴν των συχνοτήτων  $\pm\omega_0$ . Αντίθετα, το παραθυροποιημένο σήμα έχει δεν έχει περιοχή συχνοτήτων μηδενικού πλάτους! Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται **φασματική διαρροή - spectral leakage**.

Θα μιλήσουμε περισσότερο για αυτά τα φαινόμενα σε ξεχωριστή παράγραφο λίγο αργότερα.

#### 15.4.1.9 Παραγωγήιση στη συχνότητα

Παραγωγίζοντας το μετασχ. Fourier  $X(e^{j\omega})$  του σήματος  $x[n]$  έχουμε

$$\frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) = \frac{d}{d\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega n} \quad (15.231)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (-jn) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-jn x[n]) e^{-j\omega n} \quad (15.232)$$

$$= -jF\{nx[n]\} \quad (15.233)$$

$$F\{nx[n]\} = j \frac{d}{d\omega} X(\omega) \quad (15.234)$$

#### Παράδειγμα 15.22:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y[n] = na^n u[n], \quad 0 < a < 1 \quad (15.235)$$

Λύση:

Θα ήταν χρονοβόρο να λύσει κανείς το ολοκλήρωμα του μετασχηματισμού αναλυτικά. Με χρήση της ιδιότητας της παραγωγίσης στη συχνότητα, έχουμε

$$y[n] = na^n u[n] = nx[n] \quad (15.236)$$

με  $x[n] = a^n u[n]$ . Άρα

$$Y(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega} X(e^{j\omega}) = j \frac{d}{d\omega} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{ae^{-j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})^2} \quad (15.237)$$

15.4.1.10  $k$ -οστή παραγωγή στη συχνότητα

Παραγωγίζοντας  $k$  φορές το μετασχηματισμό Fourier  $X(e^{j\omega})$ , καταλήγουμε στη σχέση

$$F\{(-jn)^k x[n]\} = \frac{d^k}{d\omega^k} X(\omega) \quad (15.238)$$

**Παράδειγμα 15.23:**

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του σήματος

$$X(e^{j\omega}) = \frac{3}{\pi^2} \omega^2, \quad -\pi \leq \omega < \pi \quad (15.239)$$

Λύση:

Παραγωγίζοντας δυο φορές το δοσμένο μετασχηματισμό, έχουμε

$$\frac{d^2}{d\omega^2} X(e^{j\omega}) = \frac{6}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^2} \delta(\omega - \pi) - \frac{12}{\pi^2} \delta(\omega + \pi) \quad (15.240)$$

Επίσης

$$\frac{d^2}{d\omega^2} X(e^{j\omega}) \longleftrightarrow (-jn)^2 x[n] = -n^2 x[n] \quad (15.241)$$

και

$$F^{-1}\left\{\frac{d^2}{d\omega^2} X(e^{j\omega})\right\} = \frac{6}{\pi^2} \delta[n] - \frac{12}{\pi^2} e^{-j\pi n} - \frac{12}{\pi^2} e^{j\pi n} = \frac{6}{\pi^2} \delta[n] - \frac{24}{\pi^2} \cos(\pi n) = \frac{6}{\pi^2} \delta[n] - \frac{24}{\pi^2} (-1)^n \quad (15.242)$$

Οπότε

$$x[n] = \frac{6}{-\pi^2 n^2} \delta[n] + \frac{24}{\pi^2 n^2} (-1)^n = \frac{24}{\pi^2 n^2} (-1)^n - \frac{6}{\pi^2 n^2} \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{24}{\pi^2 n^2} (-1)^n, & n \neq 0 \end{cases} \quad (15.243)$$

εφ'οσον

$$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{3}{\pi^2} \frac{\omega^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 \quad (15.244)$$

## 15.4.1.11 Διαφορά στο χρόνο

Το σήμα  $y[n] = x[n] - x[n-1]$  έχει μετασχ. Fourier

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n] - x[n-1]) e^{-j\omega n} \quad (15.245)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n-1] e^{-j\omega n} \quad (15.246)$$

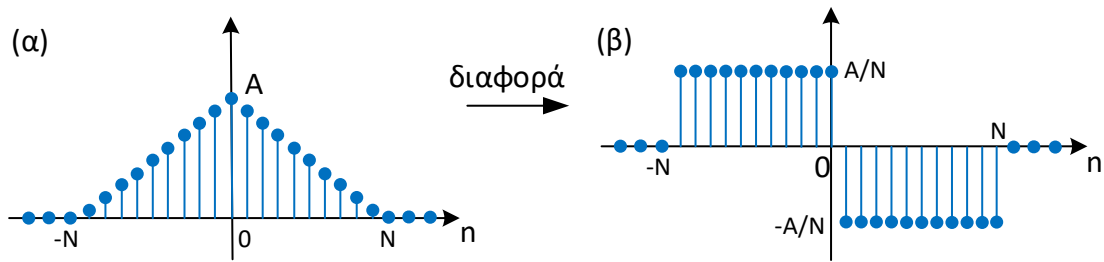
$$= X(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) \quad (15.247)$$

$$= X(e^{j\omega})(1 - e^{-j\omega}) \quad (15.248)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της μετατόπισης.

**Παράδειγμα 15.24:**

Το Σχήμα 15.19 δείχνει το σήμα τριγωνικού παλμού διακριτού χρόνου, καθώς και τη διαφορά στο χρόνο των διαδοχικών δειγμάτων του.



Σχήμα 15.19: Εφαρμογή της Διαφοράς στο Χρόνο: (α) σήμα τριγωνικού παλμού, (β) διαφορά στο χρόνο του σήματος τριγωνικού παλμού.

Αν  $N$  περιττός αριθμός, βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος τριγωνικού παλμού,  $X(e^{j\omega})$ .

Λύση:

Η διαφορά στο χρόνο του τριγωνικού παλμού  $x[n]$  του παραπάνω σχήματος μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα  $y[n]$  των δυο τετραγωνικών παραθύρων. Γνωρίζουμε από προηγούμενο παράδειγμα και από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης ότι

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{j\frac{N-1}{2}\omega} - \frac{A \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\frac{N+1}{2}\omega} \quad (15.249)$$

$$= \frac{A \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega/2} 2j \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \quad (15.250)$$

$$= (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega}) \quad (15.251)$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \frac{A \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\omega/2} 2j \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \quad (15.252)$$

$$= \frac{2j}{1 - e^{-j\omega}} e^{-j\omega/2} \frac{A \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \quad (15.253)$$

$$= \frac{2j}{2j \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \frac{A \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \quad (15.254)$$

$$= \frac{A \sin^2\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (15.255)$$

#### 15.4.1.12 Άθροισμα στο χρόνο

Το σήμα  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$  μπορεί να γραφεί ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] u[n-k] = x[n] * u[n] \quad (15.256)$$

όπου  $u[n]$  η γνωστή μας βηματική συνάρτηση. Με χρήση της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο, έχουμε

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})U(e^{j\omega}) \quad (15.257)$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι

$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2\pi k) \quad (15.258)$$

οπότε

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})U(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\left(\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2\pi k)\right) \quad (15.259)$$

$$= X(e^{j\omega})\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2\pi k) \quad (15.260)$$

### Παράδειγμα 15.25:

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad (15.261)$$

με  $x[n] = a^n u[n]$ ,  $0 < a < 1$ .

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (15.262)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα, θα είναι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2\pi k) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \frac{1}{1 - a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2\pi k) \quad (15.263)$$

#### 15.4.1.13 Συζυγής συμμετρία

Αν το  $x[n]$  είναι πραγματικό σήμα, δηλ. ισχύει ότι  $x[n] = x^*[n]$ , τότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]e^{-j\omega n} \quad (15.264)$$

$$= \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\omega n} \right)^* = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\omega n} \right)^* \quad (15.265)$$

$$= X^*(e^{-j\omega}) \quad (15.266)$$

Από την παραπάνω σχέση, εξάγουμε ότι

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (15.267)$$

$$\Re\{X(e^{j\omega})\} + j\Im\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\} - j\Im\{X(e^{-j\omega})\} \quad (15.268)$$

$$\Re\{X(e^{j\omega})\} = \Re\{X(e^{-j\omega})\} \text{ και } \Im\{X(e^{j\omega})\} = -\Im\{X(e^{-j\omega})\} \quad (15.269)$$

Επίσης, η πολική μορφή της Σχέσης (15.267) δίνει

$$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \quad (15.270)$$

$$|X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})} = |X(e^{-j\omega})|e^{-j\phi_x(e^{-j\omega})} \quad (15.271)$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \text{ και } \phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \quad (15.272)$$

Άρα, για πραγματικά σήματα, το φάσμα πλάτους είναι άρτια συνάρτηση του  $\omega$  ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττή συνάρτηση του  $\omega$ .

**Παράδειγμα 15.26:**

Ελέγξτε αν το σήμα με μετασχ. Fourier

$$X(e^{j\omega}) = j \frac{2\pi}{e^{j\omega}} \quad (15.273)$$

είναι πραγματικό ή όχι.

Λύση:  
Ισχύει ότι

$$X^*(e^{-j\omega}) = \left(j \frac{2\pi}{e^{-j\omega}}\right)^* = (j2\pi e^{j\omega})^* = -j2\pi e^{-j\omega} = -j \frac{2\pi}{e^{j\omega}} = -X(e^{j\omega}) \quad (15.274)$$

άρα το σήμα στο χρόνο δεν είναι πραγματικό. Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι το μέτρο και η φάση του σήματος δεν έχουν τις συμμετρίες που αναφέρονται παραπάνω.

**15.4.1.14 Άρτιο σήμα**

Αν το σήμα είναι άρτιο, ισχύει  $x[n] = x[-n]$ , και τότε το φανταστικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$I(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sin(\omega n) \quad (15.275)$$

θα είναι άθροισμα περιττού σήματος, ως άθροισμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$I(e^{j\omega}) = 0 \quad (15.276)$$

Οπότε

$$X(e^{j\omega}) = R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cos(\omega n) = x[0] + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x[n] \cos(\omega n) \quad (15.277)$$

με την αλλαγή των άκρων του αθροίσματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το άθροισμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα  $[-a, a]$  μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του αθροίσματος στο διάστημα  $[0, a]$ .

**Παράδειγμα 15.27:**

Ένα συμμετρικό γύρω από το μηδέν τετραγωνικό παράθυρο που δίνεται ως

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (15.278)$$

είναι ένα άρτιο σήμα. Βρείτε το μετασχ. Fourier του.

Λύση:

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier του ως

$$X(e^{j\omega}) = F\{u[n+M] - u[n-M-1]\} = x[0] + \sum_{n=-M}^M 1e^{-j\omega n} \quad (15.279)$$

$$= x[0] + 2 \sum_{n=1}^M \cos(\omega n) = 1 + 2 \sum_{n=1}^M \cos(\omega n) \quad (15.280)$$

$$= 1 + 2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \sin(\theta/2)} \right) = 1 - 1 + 2 \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \sin(\theta/2)} \quad (15.281)$$

$$= \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin(\theta/2)} \quad (15.282)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τον κλασικό ορισμό του μετασχηματισμού.

#### 15.4.1.15 Περιττό σήμα

Αν το σήμα είναι περιττό, ισχύει  $x[n] = -x[-n]$ , και τότε το πραγματικό μέρος του μετασχ. Fourier είναι

$$R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cos(\omega n) \quad (15.283)$$

θα είναι άθροισμα περιττού σήματος, ως άθροισμα γινομένου άρτιας επί περιττής συνάρτησης. Άρα θα ισούται με μηδέν, δηλ.

$$R(e^{j\omega}) = 0 \quad (15.284)$$

Οπότε

$$X(e^{j\omega}) = jI(e^{j\omega}) = -j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \sin(\omega n) = -j2 \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] \sin(\omega n) \quad (15.285)$$

με την αλλαγή των άκρων του αθροίσματος να οφείλεται στο ότι το γινόμενο δυο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση, και το άθροισμα αυτής σε συμμετρικό διάστημα  $[-a, a]$  μπορεί να γραφεί ως το διπλάσιο του αθροίσματος στο διάστημα  $[0, a]$ .

#### Παράδειγμα 15.28:

#### 15.4.1.16 Άρτιο μέρος

Το άρτιο μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_e[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \quad (15.286)$$

και άρα

$$F\{x_e[n]\} = \frac{1}{2}F\{x[n]\} + \frac{1}{2}F\{x[-n]\} = \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}X(e^{-j\omega}) \quad (15.287)$$

$$= \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}X^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}2\Re\{X(e^{j\omega})\} \quad (15.288)$$

$$= \Re\{X(e^{j\omega})\} \quad (15.289)$$

#### Παράδειγμα 15.29:

Το άρτιο μέρος ενός σήματος  $x[n]$  δίνεται ως

$$x_e[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1 \quad (15.290)$$

Βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος  $x[n]$ ,  $X(e^{j\omega})$ .

Λύση:

Το σήμα  $x_e[n]$  μπορεί να γραφεί ως

$$a^{|n|} = a^n u[n] + a^{-n} u[-n - 1] = a^n u[n] + a^{-n} u[-n] - \delta[n] \quad (15.291)$$

$$= a^n u[n] - \frac{1}{2}\delta[n] + a^{-n} u[-n] - \frac{1}{2}\delta[-n] \quad (15.292)$$

$$= \frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}x[-n] \quad (15.293)$$

Η παραπάνω διάσπαση φαίνεται στο Σχήμα ;;. Άρα το σήμα  $x[n]$  θα είναι της μορφής

$$x[n] = 2a^n u[n] - \delta[n] \quad (15.294)$$

το οποίο έχει μετασχ. Fourier ως

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 + ae^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (15.295)$$

#### 15.4.1.17 Περιττό μέρος

Το περιττό μέρος ενός πραγματικού σήματος μπορεί να γραφεί ως

$$x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \quad (15.296)$$

και άρα

$$F\{x_o[n]\} = \frac{1}{2}F\{x[n]\} - \frac{1}{2}F\{x[-n]\} = \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}X(e^{-j\omega}) \quad (15.297)$$

$$= \frac{1}{2}X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}X^*(e^{j\omega}) = j\frac{1}{2}2\Im\{X(e^{j\omega})\} \quad (15.298)$$

$$= j\Im\{X(e^{j\omega})\} \quad (15.299)$$

#### Παράδειγμα 15.30:

Για ένα σήμα γνωρίζετε ότι

- $x[0] = -1$
- $x[n] = 0, n > 0$
- $\Im\{X(e^{j\omega})\} = \sin(\omega) - \sin(2\omega)$

Βρείτε για ποιο σήμα πρόκειται.

Λύση:

Από τα δεδομένα, το σήμα μας έχει μόνο τιμές για  $n \leq 0$ . Επίσης,

$$j\Im\{X(e^{j\omega})\} \longleftrightarrow x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \quad (15.300)$$

$$j \sin(\omega) - j \sin(2\omega) \longleftrightarrow \frac{x[n] - x[-n]}{2} \quad (15.301)$$

$$\frac{1}{2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega} - e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(\delta[n+1] - \delta[n-1] - \delta[n+2] + \delta[n-2]) \quad (15.302)$$

Άρα

$$x_o[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1] - \delta[n+2] + \delta[n-2] = x[n] - x[-n] \quad (15.303)$$

Επειδή όμως  $x[n] = 0, n > 0$ , από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$x[n] = \delta[n+1] - \delta[n+2] + x[0]\delta[n] \quad (15.304)$$

αφού το σήμα στη θέση  $n = 0$  δεν υπολογίζεται από τη σχέση της περιττότητας (αφαιρείται με τον εαυτό του). Από εκφώνηση  $x[0] = -1$ , οπότε

$$x[n] = -\delta[n] + \delta[n+1] - \delta[n+2] \quad (15.305)$$

#### 15.4.1.18 Θεώρημα του Parseval

Ξεκινώντας από το δεξί μέλος και για ένα εν γένει μιγαδικό σήμα  $x[n]$ , έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j\omega m} \right)^* \quad (15.306)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x^*[m]e^{j\omega m} \right) \quad (15.307)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n]x^*[m] \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)} d\omega \right) \quad (15.308)$$

Όμως

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega(n-m)} d\omega = \delta[n-m] \quad (15.309)$$

οπότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n]x^*[m]\delta[n-m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad (15.310)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να αποδείξει με όμοιο τρόπο τη γενικότερη σχέση του Parseval, η οποία είναι η

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega \quad (15.311)$$

### Παράδειγμα 15.31:

Για ένα σήμα γνωρίζετε ότι

- $x[0] < 0$
- $x[n] = 0, n < 0$
- $\Im\{X(e^{j\omega})\} = \sin(\omega) + \sin(2\omega)$
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 4$

Βρείτε για ποιο σήμα πρόκειται.

Λύση:

Από τα δεδομένα, το σήμα μας έχει μόνο τιμές για  $n \geq 0$ . Επίσης,

$$j\Im\{X(e^{j\omega})\} \leftrightarrow x_o[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \quad (15.312)$$

$$j \sin(\omega) + j \sin(2\omega) \leftrightarrow \frac{x[n] - x[-n]}{2} \quad (15.313)$$

$$\frac{1}{2}(e^{j\omega} - e^{-j\omega} + e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}) \leftrightarrow \frac{1}{2}(\delta[n+1] - \delta[n-1] + \delta[n+2] - \delta[n-2]) \quad (15.314)$$

Άρα

$$x_o[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1] + \delta[n+2] - \delta[n-2] = x[n] - x[-n] \quad (15.315)$$

Επειδή όμως  $x[n] = 0, n < 0$ , από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι

$$x[n] = x[0]\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-2] \quad (15.316)$$

αφού το σήμα στη θέση  $n = 0$  δεν υπολογίζεται από τη σχέση της περιττότητας. Επιπλέον

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 4 \quad (15.317)$$

$$x^2[0] + (-1)^2 + (-1)^2 = 4 \quad (15.318)$$

$$x^2[0] + 2 = 4 \quad (15.319)$$

$$x^2[0] = 2 \quad (15.320)$$

Από τα δεδομένα, γνωρίζουμε ότι το  $x[0]$  είναι αρνητικό. Άρα  $x[0] = -\sqrt{2}$ . Τελικά το σήμα που ζητείται είναι το

$$x[n] = -\sqrt{2}\delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-2] \quad (15.321)$$



## 15.5 Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

Στον Πίνακα (15.2), θα βρείτε μερικά χρήσιμα ζευγάρια μετασχ. Fourier που χρησιμοποιούνται συχνά. Τα παρακάτω ορίζονται για  $\omega \in \mathfrak{R}$ . Για μετασχηματισμούς σε μια περίοδο, δηλ. στο  $(-\pi, \pi]$ , θέτουμε  $k = 0$  στους παρακάτω τύπους όπου χρειάζεται.

Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\sum_{k=0}^{N_0-1} D_k e^{jk\omega_0 n}$	$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N_0-1} D_k \delta(\omega - k\omega_0 + 2\pi r)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n u[n],  a  < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n - 1],  a  > 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi k)$
$(n + 1)a^n u[n],  a  < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$a^{ n },  a  < 1,$	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}$
$\frac{r^n \sin(\omega_c(n + 1))}{\sin(\omega_c)} u[n],  r  < 1$	$\frac{1}{1 - 2r \cos(\omega_c) e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, &  \omega  < \omega_c \\ 0, & \omega_c <  \omega  \leq \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλοιού} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega_c(M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

Πίνακας 15.2: Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου.

## 15.6 ΓΧΑ Συστήματα

Ας μελετήσουμε τώρα την τροπή που παίρνουν τα πράγματα όταν εξετάζουμε ένα ΓΧΑ σύστημα από τη σκοπιά της συχνότητας. Είδαμε νωρίτερα ότι στα συστήματα, παίζει μεγάλο ρόλο η έννοια της απόκρισης σε συχνότητα  $H(e^{j\omega})$ , η οποία υπενθυμίζουμε ότι ορίζεται ως

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \quad (15.322)$$

και αποτέλεσε το “συντελεστή” μεταβολής του μιγαδικού πλάτους του σήματος εισόδου  $x[n] = e^{j\omega n}$  όταν αυτό περνά μέσα από ένα ΓΧΑ σύστημα και εμφανίζεται στην έξοδο, δηλ.

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (15.323)$$

Επίσης, μεγάλη σημασία στα ΓΧΑ συστήματα έχει η έννοια της κρουστικής απόκρισης  $h[n]$ , η οποία περιγράφει το σύστημα από τη σκοπιά του χρόνου. Αν προσπαθήσουμε να βρούμε το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης, θα έχουμε

$$F\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n} \quad (15.324)$$

Μα η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από την απόκριση σε συχνότητα  $H(e^{j\omega})$ . Άρα τελικά, **η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος!**

Επίσης, για οποιαδήποτε σήματα, η σχέση που συνδέει την είσοδο,  $x[n]$ , με την έξοδο,  $y[n]$ , ενός ΓΧΑ συστήματος,  $h[n]$ , εκφράζεται μέσω της πράξης της συνέλιξης:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (15.325)$$

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι η *συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα*, και το αντίστροφο (Πίνακας 15.1). Άρα η ίδια Σχέση (15.325) που περιγράφει το σύστημα μπορεί να γραφεί και ως:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (15.326)$$

Σε αυτό το σημείο, αν αναλύσουμε σε μορφή πολική μορφή την παραπάνω σχέση, βλέπουμε ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (15.327)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}|H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (15.328)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}))} \quad (15.329)$$

και άρα

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})| \quad (15.330)$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}) \quad (15.331)$$

Υπενθυμίζουμε ότι το μέτρο  $|H(e^{j\omega})|$  λέγεται *απόκριση πλάτους* (magnitude response) ή *κέρδος* του συστήματος, και η συνάρτηση φάσης  $\angle H(e^{j\omega})$  λέγεται *απόκριση φάσης* (phase response) του συστήματος.

Προσέξτε ότι **η απόκριση πλάτους της εξόδου αποτελείται από το γινόμενο των αποκρίσεων πλάτους της εισόδου και του συστήματος, ενώ η απόκριση φάσης της εξόδου αποτελείται από το άθροισμα των αποκρίσεων φάσης της εισόδου και του συστήματος.**

Αυτές οι σχέσεις επιδρούν στην είσοδο του συστήματος και τη μεταβάλλουν, είτε με επιθυμητό τρόπο είτε με ανεπιθύμητο τρόπο. Όσον αφορά το τελευταίο, τότε οι αντίστοιχες σχέσεις αποκαλούνται *διαταραχές πλάτους και φάσης*, αντίστοιχα.

Ένα σύστημα  $h[n]$  με απόκριση σε συχνότητα  $H(e^{j\omega})$  μπορεί να υπολογιστεί πιο εύκολα – συνήθως ☺– στο χώρο των συχνοτήτων απ’ ότι στο χώρο του χρόνου. Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (15.332)$$

Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$ . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} \quad (15.333)$$

όπου  $N(e^{j\omega})$ ,  $D(e^{j\omega})$  ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα  $H(e^{j\omega})$ , με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα κλάσματα μέσα από τη γνωστή σας διαδικασία της “Αναπτυξης σε Μερικά Κλάσματα”. Εν συντομία, το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα μας πληροφορεί ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση, εν γένει, μπορεί να γραφεί

ως

$$H(e^{j\omega}) = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{1 - a_k e^{-j\omega}} + \sum_{l=1}^L \frac{B_l}{1 - b_l e^{-j\omega}} \quad (15.334)$$

με  $|a_k| < 1$  και  $|b_k| > 1$ , στην απλή περίπτωση που οι ρίζες του παρονομαστή  $D(e^{j\omega})$  είναι απλές. Σύμφωνα με τον πίνακα με τα ζεύγη Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου (Πίνακας 15.2), μπορούμε, έχοντας την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα, να βρούμε την  $h[n]$ , ως

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{1 - a_k e^{-j\omega}} + \sum_{l=1}^L \frac{B_l}{1 - b_l e^{-j\omega}} \longleftrightarrow h[n] = \sum_{k=1}^M A_k (a_k)^n u[n] - \sum_{l=1}^L B_l (b_l)^n u[-n - 1] \quad (15.335)$$

αφού  $|a_k| < 1$  και  $|b_k| > 1$ . Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και το σήμα εισόδου  $x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$ , αφού και το σήμα  $X(e^{j\omega})$  εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} \quad (15.336)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

### Παράδειγμα 15.32:

Έστω το σύστημα

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (15.337)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (15.338)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος  $y[n]$ .

Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον κλασικό τρόπο του αθροίσματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα (15.2), έχουμε ότι

$$y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \left(\frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \quad (15.339)$$

$$= \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \quad (15.340)$$

$$= \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{C}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{D}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \quad (15.341)$$

και στο πεδίο του χρόνου

$$y[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (B + D)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + C\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (15.342)$$

με

$$A = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = 6 \quad (15.343)$$

$$B = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=3} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=3} = -4 \quad (15.344)$$

$$C = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=4} = -3 \quad (15.345)$$

$$D = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=3} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=3} = 4 \quad (15.346)$$

(15.347)

Έτσι

$$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (15.348)$$

■

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο  $x[n]$ , αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

### Παράδειγμα 15.33:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 3e^{-j\omega}} \quad (15.349)$$

Στην είσοδό του, βρίσκεται ένα σήμα  $x[n]$ , το οποίο δίνει έξοδο

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1] \quad (15.350)$$

Βρείτε την είσοδο,  $x[n]$ .

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}} = \frac{-e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)} \quad (15.351)$$

Προφανώς ισχύει

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \iff X(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} = \frac{\frac{-e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)}}{\frac{1}{1 + 3e^{-j\omega}}} \quad (15.352)$$

$$= \frac{-(1 + 3e^{-j\omega})e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)} \quad (15.353)$$

$$= \left(\frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}}\right)e^{-j\omega} \quad (15.354)$$

με

$$A = \frac{-1 - 3e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{-1 - 3e^{-j\omega}}{1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{7}{2} \quad (15.355)$$

$$B = \frac{-1 - 3e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)} \Big|_{e^{-j\omega}=2/3} = \frac{-1 - 3e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=2/3} = -\frac{9}{2} \quad (15.356)$$

και άρα, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα (15.2), τελικά η είσοδος θα είναι

$$x[n] = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u[-(n-1)-1] \quad (15.357)$$

$$= \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u[-n] \quad (15.358)$$

## Παρατηρήσεις

1. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το σύστημα  $h[n]$  αν μας δίνεται η είσοδος και η έξοδος,  $x[n], y[n]$ , αντίστοιχα. Κάντε το σε όλα τα παραδείγματα!
2. Φυσικά για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το άθροισμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία και τριβή σε ασκήσεις. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι εμφανές με το μάτι κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαψευστείτε. ☺
3. Η ανάλυση σε μερικά κλάσματα εφαρμόζεται MONON όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη από αυτή του παρονομαστή, ειδικά πάλι πρέπει να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων. Στο Παράδειγμα 1, αυτό ήταν αληθές, αλλά όχι και στο Παράδειγμα 2. Είδατε όμως πως αποφύγαμε να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, θεωρώντας τον όρο  $e^{-j\omega}$  του αριθμητή ως καθυστέρηση.

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

## Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος για Απεριοδική Είσοδο

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος

$$h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})$$

είναι της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k (a_k)^n u[n] - \sum_{l=1}^M B_l (b_l)^n u[-n-1] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1 - a_k e^{-j\omega}} + \sum_{l=1}^M B_l \frac{1}{1 - b_l e^{-j\omega}}$$

με  $|a_k| < 1$  και  $|b_l| > 1$  τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος  $y[n]$ .

Τέλος, πολλά συστήματα εκφράζονται ως ένα απλό άθροισμα Διακριτών Συναρτήσεων Δέλτα<sup>9</sup>, όπως για παράδειγμα το

$$h[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1] \quad (15.359)$$

Αυτή η περίπτωση είναι η πιο εύκολη, καθώς μπορούμε να δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, αντί αυτό της συχνότητας<sup>10</sup>, εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα που λέει ότι

$$x[n] * \delta[n \pm n_0] = x[n \pm n_0] \quad (15.360)$$

Το παραπάνω σημαίνει ότι η συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται στη χρονική στιγμή  $n = \pm n_0$  επιστρέφει απλά το ίδιο το σήμα  $x[n]$  μετατοπισμένο στη θέση  $n = \mp n_0$ !

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

## Παράδειγμα 15.34:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$h[n] = 2\delta[n] - \delta[n-1] \quad (15.361)$$

Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x[n] = -2\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] \quad (15.362)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος,  $y[n]$ .

<sup>9</sup>Τα οποία λέγονται Finite Impulse Response - FIR, όπως έχουμε πει.

<sup>10</sup>Χωρίς να σημαίνει ότι αν πάτε στο χώρο της συχνότητας δε θα βγάλετε αποτέλεσμα ☺

Λύση:

Ας δούμε και τις δυο λύσεις (χρόνος και συχνότητα).

- Θα έχουμε

$$y[n] = x[n] * h[n] = -2\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] * (2\delta[n] - \delta[n-1]) \quad (15.363)$$

$$= -2\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] * 2\delta[n] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] * \delta[n-1] \quad (15.364)$$

$$= -4\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} u[-(n-1)-1] \quad (15.365)$$

$$= -4\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} u[-n] \quad (15.366)$$

- Μέσω συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και μέσω μετασχ. Fourier και ιδιοτήτων, θα είναι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{5}{4}e^{-j\omega}}(2 - e^{-j\omega}) \quad (15.367)$$

$$= \frac{4}{1 - \frac{5}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{5}{4}e^{-j\omega}}e^{-j\omega} \quad (15.368)$$

και επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου

$$y[n] = -4\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} u[-(n-1)-1] \quad (15.369)$$

$$= -4\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n-1] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} u[-n] \quad (15.370)$$

## 15.7 Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου και Εξισώσεις Διαφορών

Για να δούμε και μερικά παραδείγματα με εξισώσεις διαφορών, για να κλείσουμε τη συζήτηση γύρω από το μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου, και να δούμε πόσο πιο εύκολη γίνεται η δουλειά όταν περνάμε στο χώρο της συχνότητας.

Στη γενικότερη των περιπτώσεων, έχουμε μια εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (15.371)$$

Θεωρώντας ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει της εισόδου και της εξόδου, μπορούμε να τον βρούμε και στα δυο μέλη της εξίσωσης, και να λάβουμε

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(e^{j\omega})e^{-j\omega k} = \sum_{l=0}^M b_l X(e^{j\omega})e^{-j\omega l} \quad (15.372)$$

το οποίο μεταφράζεται ως

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l} \quad (15.373)$$

Διαιρώντας κατά μέλη με  $X(e^{j\omega})$  έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} = \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l} \quad (15.374)$$

ή αλλιώς

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (15.375)$$

Όμως είδαμε ωρύτερα ότι από το θεώρημα της συνέλιξης, το πρώτο μέλος μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (15.376)$$

και δείξαμε - και με παραδείγματα - ωρύτερα πώς μπορούμε από την απόκριση σε συχνότητα να βρούμε την χροστική απόκριση  $h[n]$ .

### 15.7.1 Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Σε όλη την παραπάνω συζήτηση, υποθέσαμε ότι τα  $Y(e^{j\omega}), X(e^{j\omega}), H(e^{j\omega})$  υπάρχουν, δηλ. ορίζονται οι μετασχ. Fourier τους. Σύμφωνα με το κριτήριο ύπαρξης του μετασχ. Fourier, για να μπορούμε να γράψουμε τα παραπάνω σύμβολα, θα πρέπει να ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < +\infty \quad (15.377)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]| < +\infty \quad (15.378)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad (15.379)$$

Η τελευταία σχέση μας υποδεικνύει ότι το σύστημα πρέπει να είναι **ευσταθές** για να μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση διαφορών στο χώρο της συχνότητας.

#### Ευστάθεια ΓΧΑ συστημάτων με όρους Μετασχ. Fourier

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνον αν η χροστική του απόκριση είναι απολύτως αθροίσιμη, δηλ.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad (15.380)$$

που είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για τη σύγκλιση του μετασχ. Fourier, δηλ. της απόκρισης σε συχνότητα. Άρα η ύπαρξη της απόκρισης σε συχνότητα  $H(e^{j\omega})$  μέσω του ορισμού του μετασχ. Fourier της χροστικής απόκρισης εγγυάται την ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 15.35:

Να προσδιοριστεί

(α') η χροστική απόκριση  $h[n]$

(β') η απόκριση πλάτους  $|H(e^{j\omega})|$  και

(γ') η απόκριση φάσης  $\angle H(e^{j\omega})$

του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad (15.381)$$

Λύση:

Η χροστική απόκριση  $h[n]$  του συστήματος θα βρεθεί θέτοντας  $x[n] = \delta[n]$  στην παραπάνω εξίσωση διαφορών, και δίνεται από τη σχέση

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \quad (15.382)$$

ενώ η απόκριση σε συχνότητα είναι

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} \quad (15.383)$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$H(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = 2e^{-j\omega} \left( \frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} \right) = 2e^{-j\omega} [\cos(\omega) + 1] \quad (15.384)$$

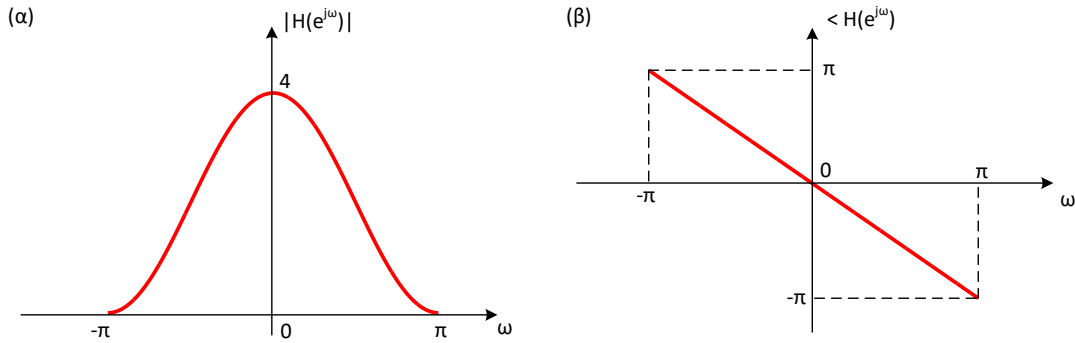
Επομένως, η απόκριση πλάτους και φάσης του συστήματος θα είναι

$$|H(e^{j\omega})| = 2[\cos(\omega) + 1] \quad (15.385)$$

και

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega \quad (15.386)$$

Η απόκριση πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 15.20.



Σχήμα 15.20: (α) Απόκριση πλάτους και (β) απόκριση φάσης.

■

### Παράδειγμα 15.36:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (15.387)$$

Λύση:

Θυμηθείτε τι κάναμε όταν αντιμετωπίζαμε τέτοιες καταστάσεις πριν μάθουμε για το μετασχ. Fourier. Θέτουμε  $x[n] = \delta[n]$ , οπότε  $y[n] = h[n]$ , και υποθέτουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες. Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] \quad (15.388)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και η ρίζα του είναι

$$\gamma - \frac{1}{2} = 0 \implies \gamma = 1/2 \quad (15.389)$$

Άρα η κρουστική απόκρισή του είναι

$$h[n] = c \left( \frac{1}{2} \right)^n u[n] \quad (15.390)$$

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε ότι

$$h[0] - \frac{1}{2}h[-1] = \delta[0] = 1 \quad (15.391)$$

και άρα

$$h[0] = c \left( \frac{1}{2} \right)^0 u[0] = A = 1 \quad (15.392)$$

Οπότε η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = \left( \frac{1}{2} \right)^n u[n] \quad (15.393)$$



Αν τώρα γράψουμε την εξίσωση διαφορών στο χώρο της συχνότητας, με χρήση ιδιοτήτων θα έχουμε

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) \quad (15.394)$$

Διαιρώντας με  $X(e^{j\omega})$  έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (15.395)$$

Από τον Πίνακα (15.2) βλέπουμε εύκολα ότι

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (15.396)$$

που είναι και το ζητούμενο. ■

### Παράδειγμα 15.37:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n-1] \quad (15.397)$$

Λύση:

Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n] \quad (15.398)$$

Θέτουμε  $x[n] = \delta[n]$ , και θεωρούμε ότι τότε  $y[n] = h_o[n]$ . Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$h_o[n] - \frac{3}{4}h_o[n-1] = \delta[n] \quad (15.399)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και η ρίζα του είναι

$$\gamma - \frac{3}{4} = 0 \implies \gamma = \frac{3}{4} \quad (15.400)$$

Άρα η κρουστική απόκρισή του είναι

$$h_o[n] = c\left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad n \geq 0 \quad (15.401)$$

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε ότι

$$h_o[0] - \frac{3}{4}h_o[-1] = \delta[0] = 1 \iff h_o[0] = 1 \quad (15.402)$$

και άρα

$$h_o[0] = c = 1 \quad (15.403)$$

Οπότε η κρουστική απόκριση του συστήματος της Σχέση (15.398) είναι

$$h_o[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] \quad (15.404)$$

Τελικά, η ζητούμενη κρουστική απόκριση του συστήματος της εκφώνησης είναι

$$h[n] = h_o[n-1] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (15.405)$$

Αν τώρα γράψουμε την εξίσωση διαφορών στο χώρο της συχνότητας, με χρήση ιδιοτήτων θα έχουμε

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n-1] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \quad (15.406)$$

Διαιρώντας με  $X(e^{j\omega})$  έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} \quad (15.407)$$

Από τους Πίνακες (15.2,15.1) βλέπουμε εύκολα ότι

$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (15.408)$$

■

### Παράδειγμα 15.38:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] \quad (15.409)$$

Λύση:

Ας δούμε το πεδίο του χρόνου πρώτα. Έστω η εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (15.410)$$

Θέτουμε  $x[n] = \delta[n]$ , οπότε  $y[n] = h_o[n]$ , και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν. Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$h_o[n] - \frac{1}{2}h_o[n-1] = \delta[n] \quad (15.411)$$

Η κρουστική απόκρισή του είναι (Παράδειγμα 15.14, προηγούμενος)

$$h_o[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (15.412)$$

Το σύστημα είναι ΓΧΑ, άρα η απόκρισή του στην είσοδο  $-\frac{1}{4}\delta[n-1]$  θα είναι

$$h_1[n] = -\frac{1}{4}h_o[n-1] = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (15.413)$$

Άρα, η κρουστική απόκριση  $h[n]$  του συστήματος είναι

$$h[n] = h_o[n] + h_1[n] = h_o[n] - \frac{1}{4}h_o[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (15.414)$$

Ας πάμε στο χώρο της συχνότητας τώρα. Έχουμε

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \quad (15.415)$$

και σχηματίζοντας το λόγο  $\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega})$ , θα έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} e^{-j\omega} \quad (15.416)$$

Από τους Πίνακες (15.2,15.1) έχουμε ότι

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (15.417)$$

■

**Παράδειγμα 15.39:**

Να προσδιοριστεί η απόκριση σε συχνότητα του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad (15.418)$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι οι χαρακτηριστική ρίζα είναι  $\gamma = 1/2$ , οπότε το σύστημα είναι ευσταθές και μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση σε συχνότητα. Έχουμε

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad (15.419)$$

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) \quad (15.420)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (15.421)$$

με την τελευταία σχέση να προκύπτει από το θεώρημα της συνέλιξης. ■

**Παράδειγμα 15.40:**

Χρησιμοποιώντας μετασχ. Fourier, προσδιορίστε την έξοδο  $y[n]$  του συστήματος με κρουστική απόκριση της μορφής

$$h[n] = 5\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (15.422)$$

όταν στην είσοδό του βρεθεί το σήμα

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (15.423)$$

Λύση:

Από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier γνωρίζουμε ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (15.424)$$

Οι μετασχ. Fourier της εισόδου και του συστήματος είναι

$$X(e^{j\omega}) = \frac{5}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (15.425)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \quad (15.426)$$

Άρα

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{5}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \quad (15.427)$$

$$= \frac{A}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \quad (15.428)$$

$$(15.429)$$

με

$$A = \frac{5}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right) \Big|_{e^{-j\omega}=-2} = 3 \quad (15.430)$$

$$B = \frac{5}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \left(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}\right) \Big|_{e^{-j\omega}=3} = 2 \quad (15.431)$$

$$(15.432)$$

Οπότε

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{3}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \quad (15.433)$$

το οποίο από γνωστά ζεύγη αντιστρέφεται ως

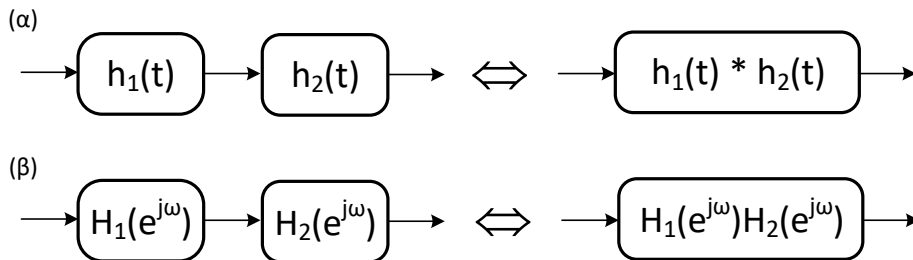
$$y[n] = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (15.434)$$

## 15.7.2 Διατάξεις Συστημάτων

### 15.7.2.1 Συστήματα σε Σειρά

Όταν έχουμε συστήματα σε σειρά, όπως στο Σχήμα 15.21(α), η έξοδος του συστήματος  $h_1[n]$  περνάει ως είσοδος στο σύστημα  $h_2[n]$ . Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ένα μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί τη *συνέλιξη* των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του χρόνου.

Όμως ξέρουμε πολύ καλά ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται γινόμενο στη συχνότητα. Έτσι, μπορούμε να

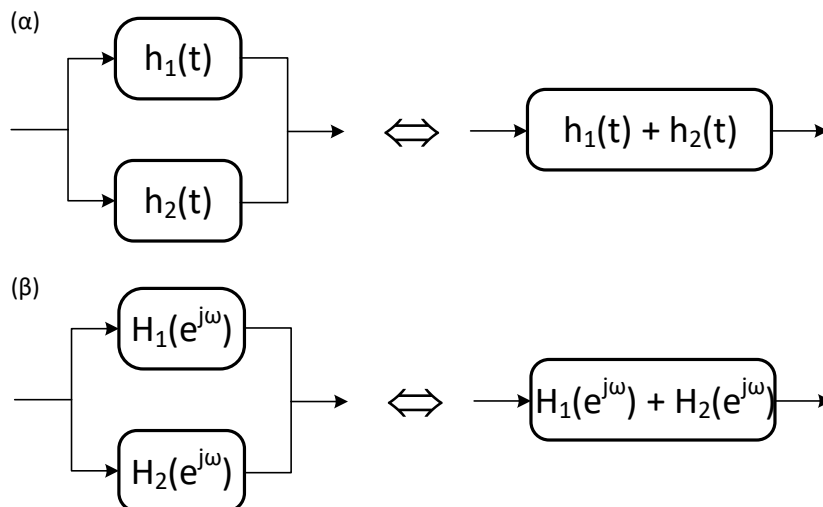


Σχήμα 15.21: Συστήματα σε Σειρά: (α) δυο συστήματα σε σειρά στο χώρο του χρόνου και το ισοδύναμο σύστημα, (β) δυο συστήματα σε σειρά στο χώρο του μετασχ. Fourier και το ισοδύναμο σύστημα.

θεωρήσουμε ότι δυο ή περισσότερα συστήματα σε σειρά στο χρόνο ισοούνται με ένα σύστημα στη συχνότητα, όπου περιγράφεται από το γινόμενο των μετασχηματισμών Fourier τους, όπως στο Σχήμα 15.21(β).

### 15.7.2.2 Συστήματα σε Παράλληλια

Σε περίπτωση παράλληλης σύνδεσης όπως στο Σχήμα 15.22(α), η αρχική είσοδος περνάει και στο σύστημα  $h_1[n]$  και στο σύστημα  $h_2[n]$ . Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι τα συστήματα αυτά αποτελούν ένα μεγαλύτερο σύστημα, το οποίο και αποτελεί το *άθροισμα* των επιμέρους συστημάτων στο πεδίο του διακριτού χρόνου. Περ-



Σχήμα 15.22: Συστήματα σε Παράλληλια: (α) δυο συστήματα σε παράλληλια στο χώρο του χρόνου και το ισοδύναμο σύστημα, (β) δυο συστήματα σε παράλληλια στο χώρο του μετασχ. Fourier και το ισοδύναμο σύστημα.

ώντας στο χώρο της συχνότητας, ξέρουμε πολύ καλά ότι οι μετασχηματισμοί που έχουμε ορίσει είναι γραμμικοί.

Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δυο ή περισσότερα συστήματα σε παράλληλη σύνδεση στο πεδίο του χρόνου ισοούνται με ένα σύστημα στη συχνότητα που περιγράφεται επίσης από το άθροισμα των μετασχηματισμών Fourier τους, όπως στο Σχήμα 15.41(β).

Φυσικά υπάρχουν πολλοί συνδυασμοί συστημάτων σε σειρά και παράλληλα, αλλά η βασική αρχή ανάλυσης ακολουθεί την παραπάνω διαδικασία.

#### Παράδειγμα 15.41:

Εστω δυο ΓΧΑ συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά, τα οποία έχουν αποκρίσεις συχνότητας ως

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (15.435)$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}} \quad (15.436)$$

Βρείτε την εξίσωση διαφορών που περιγράφει το συνολικό σύστημα.

Λύση:

Η σειρά σύνδεση οδηγεί σε άθροισμα των μετασχ. Fourier, άρα

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\omega}} = \frac{2 - e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{8}e^{-j3\omega}} \quad (15.437)$$

Μετατρέποντας κάθε μεταβλητή στο πεδίο του χρόνου μέσω της ιδιότητας της μετατόπισης, θα είναι

$$Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{8}Y(e^{j\omega})e^{-j3\omega} = 2X(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \quad (15.438)$$

και

$$y[n] + \frac{1}{8}y[n-3] = 2x[n] - x[n-1] \quad (15.439)$$

■

#### Παράδειγμα 15.42:

Εστω το ΓΧΑ σύστημα του παρακάτω σχήματος με κρουστικές αποκρίσεις

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (15.440)$$

$$h_2[n] = \delta[n-2] \quad (15.441)$$

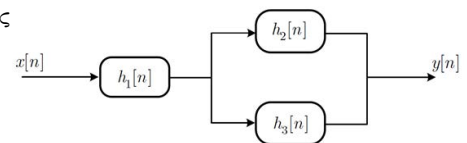
$$h_3[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (15.442)$$

Βρείτε

(α') την απόκριση σε συχνότητα  $H(e^{j\omega})$  του συνολικού συστήματος

(β') την κρουστική απόκριση  $h[n]$  του συνολικού συστήματος.

(γ') μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα.



Λύση:

(α') Το συνολικό σύστημα περιγράφεται ως

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) \quad (15.443)$$

και στο χώρο της συχνότητας θα είναι

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})(H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})) \quad (15.444)$$

το οποίο γράφεται

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})(H_2(e^{j\omega}) + H_3(e^{j\omega})) \quad (15.445)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \left( e^{-j2\omega} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right) \quad (15.446)$$

$$= \frac{e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \quad (15.447)$$

$$= \frac{e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad (15.448)$$

με

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = 2 \quad (15.449)$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=4} = -1 \quad (15.450)$$

Οπότε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad (15.451)$$

(β') Η χροστική απόκριση του συνολικού συστήματος δίνεται ως ο αντίστρ. μετασχ. Fourier της παραπάνω σχέσης, δηλ.

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (15.452)$$

(γ') Από τη Σχέση (15.446) έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-2j\omega} \left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right) + 1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)} \quad (15.453)$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + e^{-j2\omega} - \frac{1}{4}e^{-j3\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \quad (15.454)$$

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} + \frac{1}{8}Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega} = X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j2\omega} - \frac{1}{4}X(e^{j\omega})e^{-j3\omega} \quad (15.455)$$

και επιστρέφοντας στο πεδίο του χρόνου, έχουμε

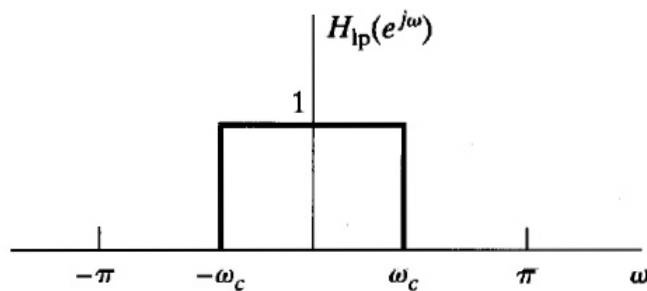
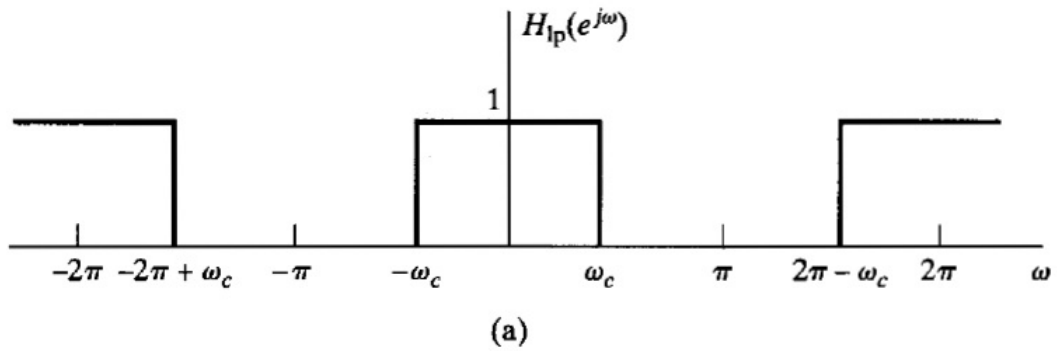
$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-2] - \frac{1}{4}x[n-3] \quad (15.456)$$

## 15.8 Ιδανικά Φίλτρα Επιλογής Συχνοτήτων

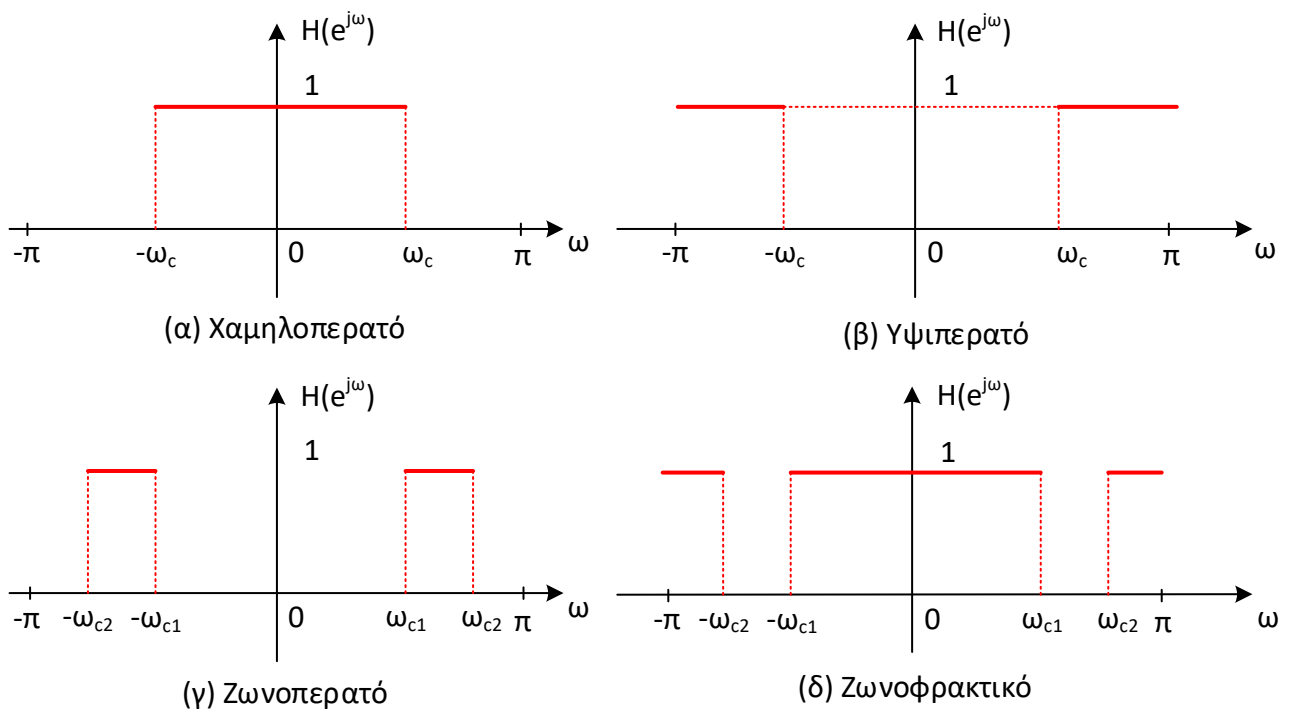
Μια σημαντική κατηγορία ΓΧΑ συστημάτων περιλαμβάνουν αυτά τα συστήματα για τα οποία η απόκριση σε συχνότητα είναι ίση με τη μονάδα σε ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων και μηδενική στις υπόλοιπες συχνότητες. Αυτά τα συστήματα ονομάζονται **ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνοτήτων** - *ideal frequency-selective filters*. Όπως και στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου (Κεφάλαιο 6), τα συστήματα αυτά ονομάζονται ιδανικά διότι είναι μη πραγματοποιήσιμα.

Η απόκριση σε συχνότητα ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου φαίνεται στο Σχήμα 15.23. Ο όρος “χαμηλοπερατό” προέρχεται από το γεγονός ότι το φίλτρο αυτό αφήνει κάποιες χαμηλές συχνότητες ανέπαφες, στο διάστημα  $[-\omega_c, \omega_c]$ , ενώ “κόβει” (μηδενίζει, καταστέλλει) τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από  $\omega_c$  και μικρότερες από  $-\omega_c$ . Να θυμάστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι περιοδική, γι' αυτό και υπάρχουν επαναλήψεις του σήματος που υπάρχει στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$  γύρω από τα πολλαπλάσια του  $2\pi$ . Λόγω ακριβώς αυτής της περιοδικότητας, η απόκριση σε συχνότητα ορίζεται πλήρως από τη συμπεριφορά της σε ένα διάστημα  $(-\pi, \pi]$ , οπότε μια πιο συνήθης μορφή της παρουσιάζεται στο Σχήμα 15.23b, όπου θεωρούμε ότι επαναλαμβάνεται ανά  $2\pi$ , χωρίς απαραίτητα να τη σχεδιάζουμε.

Τα ιδανικά υψιπερατά - *highpass*, ζωνοπερατά - *bandpass*, και ζωνοφρακτικά - *bandstop* φίλτρα φαίνονται στο Σχήμα (15.24). Για παράδειγμα, το ιδανικό υψιπερατό φίλτρο έχει απόκριση σε συχνότητα



Σχήμα 15.23: Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.



Σχήμα 15.24: Ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας.

$$h_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_c < |\omega| < \pi \\ 0, & |\omega| \leq \omega_c \end{cases} \quad (15.457)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί με χρήση του βαθυπερατού φίλτρου ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}) \quad (15.458)$$

Παίρνοντας αντίστροφο μετασχ. Fourier στην παραπάνω σχέση, έχουμε

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] \quad (15.459)$$

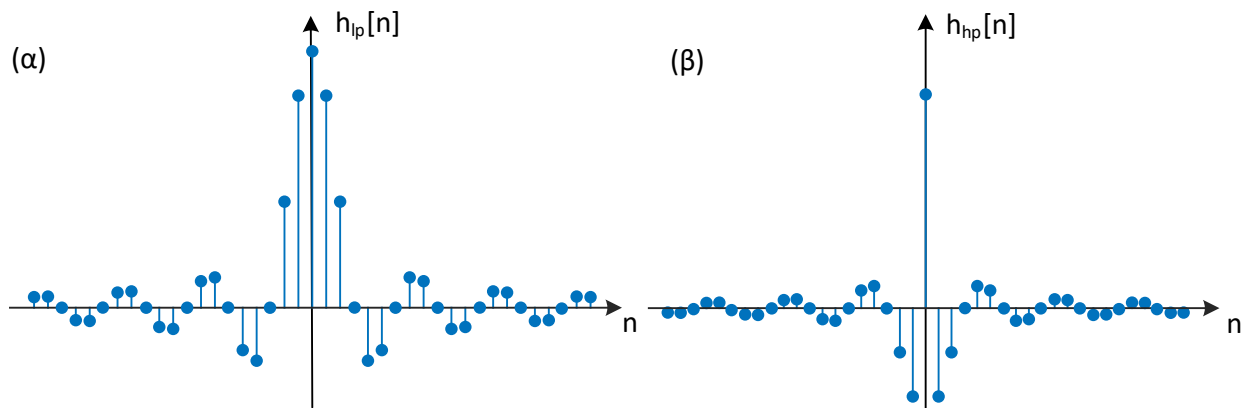
Σε ένα από τα παραδείγματά μας, δείξαμε ότι

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right) \quad (15.460)$$

Άρα

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right) \quad (15.461)$$

Μια εικόνα των δυο παραπάνω ιδανικών φίλτρων μπορείτε να δείτε στο Σχήμα 15.25. Εξασκηθείτε (Άσκηση XXXX)



Σχήμα 15.25: Κρουστική απόκριση (α) χαμηλοπερατού φίλτρου και (β) υψιπερατού φίλτρου.

βρίσκοντας τις κρουστικές αποκρίσεις του ζωνοπερατού και ζωνοφρακτικού ιδανικού φίλτρου, οι οποίες είναι (μαζί με τις δυο που βρήκαμε ήδη):

$$h_{lp}[n] = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \quad (15.462)$$

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} \quad (15.463)$$

$$h_{bp}[n] = \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin(\omega_{c2} n)}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin(\omega_{c1} n)}{\omega_{c1} n} \quad (15.464)$$

$$h_{bs}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_{c2}}{\pi} \frac{\sin(\omega_{c2} n)}{\omega_{c2} n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi} \frac{\sin(\omega_{c1} n)}{\omega_{c1} n} \quad (15.465)$$

Φυσικά τα παραπάνω φίλτρα μπορούν να οριστούν έχοντας γραμμική φάση, και μάλιστα χωρίς να είναι απαραίτητα μη αιτιατά, όπως στην περίπτωση που συζητάμε. Όμως τα συστήματα γραμμικής φάσης είναι πολύ σημαντικά και θα τα μελετήσουμε στη συνέχεια. Ας δούμε όμως μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 15.43:

Η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα δίνεται ως

$$x[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 8 \sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right) \quad (15.466)$$



Βρείτε την έξοδο του συστήματος,  $y[n]$ , αν η κρουστική του απόκριση είναι

$$h[n] = 4 \frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}{(n-1)\pi} \quad (15.467)$$

Λύση:

Γνωρίζουμε από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης ενός ΓΧΑ συστήματος ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος όταν στην είσοδό του βρεθεί ένα άθροισμα ημιτόνων με πλάτη  $A_k$ , συχνότητες  $\omega_k$ , και φάσεις  $\phi_k$ , δίνεται ως

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A_k |H(e^{j\omega_k})| \cos(\omega_k n + \phi_k + \angle H(e^{j\omega_k})) \quad (15.468)$$

με

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (15.469)$$

την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος, την οποία δε γνωρίζουμε - γνωρίζουμε όμως την κρουστική απόκριση. Έστω

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} \quad (15.470)$$

το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο συχνότητας απόκοπής  $\omega_c = \pi/2$ . Το σύστημα της εκφώνησης είναι μια καθυστερημένη έκδοση κατά  $n_0 = 1$  του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου, ενώ το πλάτος του δεν είναι μοναδιαίο αλλά ίσο με 4. Γνωρίζουμε ότι το φίλτρο αποκόπτει συχνότητες  $|\omega| > \frac{\pi}{2}$ , άρα η συνιστώσα της εισόδου με συχνότητα  $\omega = \frac{3\pi}{4}$  δε θα περάσει στην έξοδο. Για να βρούμε την ακριβή μορφή της εξόδου θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την απόκριση συχνότητας. Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης, έχουμε

$$h[n] = 4h_{lp}[n-1] = 4 \frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}{(n-1)\pi} \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = 4H_{lp}(e^{j\omega})e^{-j\omega} = \begin{cases} 4e^{-j\omega}, & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (15.471)$$

Οπότε η έξοδος θα είναι

$$y[n] = 2|H(e^{j\frac{3\pi}{4}})| \cos\left(\frac{\pi n}{4} + \angle H(e^{j\frac{3\pi}{4}})\right) = 8 \cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (15.472)$$

■

#### Παράδειγμα 15.44:

Η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα δίνεται ως

$$x[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) + 2 \sin\left(\frac{5\pi n}{8} + \frac{\pi}{12}\right) \quad (15.473)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος,  $y[n]$ , αν η κρουστική του απόκριση είναι

$$h[n] = 2 \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n} * e^{j\frac{\pi}{4}n} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{n} \quad (15.474)$$

Λύση:

Ας ξεκινήσουμε από την κρουστική απόκριση, η οποία αποτελείται από δυο όρους που συνελίσσονται μεταξύ τους. Ας τους μεταφέρουμε στο χώρο της συχνότητας.

$$H(e^{j\omega}) = F\left\{\frac{2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n}\right\} F\left\{e^{j\frac{\pi}{4}n} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{n}\right\} \quad (15.475)$$

$$= F\left\{\frac{2\pi \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}\right\} F\left\{e^{j\frac{\pi}{4}n}\right\} * F\left\{\frac{\pi \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}\right\} \quad (15.476)$$

$$= 2\pi H_{1lp}(e^{j\omega}) \left[ \delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) * \left(\pi H_{2lp}(e^{j\omega})\right) \right] \quad (15.477)$$

με

$$H_{1lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (15.478)$$

$$H_{2lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (15.479)$$

Το φίλτρο  $H_{2lp}(e^{j\omega})$  συνελίσσεται με τη συνάρτηση Δέλτα  $\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)$  και δίνει

$$\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) * \left(\pi H_{2lp}(e^{j\omega})\right) = \pi H_{2lp}(e^{j(\omega - \frac{\pi}{4})}) \quad (15.480)$$

Αυτό το μετατοπισμένο στη συχνότητα φίλτρο αναλύεται ως

$$H_{2lp}(e^{j(\omega - \frac{\pi}{4})}) = \begin{cases} 1, & \left|\omega - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (15.481)$$

Οπότε τελικά έχουμε δυο φίλτρα στη σειρά, ένα χαμηλοπερατό με συχνότητα αποκοπής  $\frac{\pi}{2}$  και ένα μη συμμετρικό φίλτρο με μοναδιαίο πλάτος στο διάστημα  $[0, \pi/2]$ . Το πρώτο φίλτρο θα αποκόψει τη συνιστώσα με συχνότητα  $\omega = \frac{5\pi}{8}$  της εισόδου, οπότε στο δεύτερο φίλτρο θα περάσει μόνο ένας όρος της μορφής

$$y_1[n] = 4\pi \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right) \quad (15.482)$$

Το δεύτερο φίλτρο δεν είναι άρτια συμμετρικό, οπότε δεν είναι πραγματικό σύστημα - η κρουστική του απόκριση θα είναι ένα μιγαδικό σήμα, και άρα η έξοδος θα είναι κι αυτή μιγαδικό σήμα. Ο μετασχ. Fourier της εισόδου του δεύτερου φίλτρου γράφεται ως

$$Y_1(e^{j\omega}) = 4\pi^2 \delta\left(\omega - \frac{\pi}{8}\right) + 4\pi^2 \delta\left(\omega + \frac{\pi}{8}\right) \quad (15.483)$$

όπου φαίνεται καθαρά ότι υπάρχουν δυο συνιστώσες, στις συχνότητες  $\omega = \pm \frac{\pi}{8}$ . Το δεύτερο φίλτρο είναι μη μηδενικό στο διάστημα  $[0, \pi/2]$ , οπότε μόνο η θετικής συχνότητας συνιστώσα θα περάσει στην τελική έξοδο. Άρα

$$Y(e^{j\omega}) = 4\pi^2 \delta\left(\omega - \frac{\pi}{8}\right) \quad (15.484)$$

και στο χώρο του χρόνου έχουμε

$$y[n] = 4\pi^2 e^{j\frac{\pi}{8}n} \quad (15.485)$$

## 15.9 Η Απόκριση σε Συχνότητα ΓΧΑ Συστημάτων

Ανακεφαλαιώνοντας εν τάχει τα προηγούμενα, γνωρίζουμε ότι, δεδομένου ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση  $h[n]$ , η είσοδος και η έξοδος σχετίζονται με τη σχέση της συνέλιξης

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (15.486)$$

Όπως έχουμε ήδη δει, η σχέση αυτή μεταφερόμενη στο πεδίο της συχνότητας συνεπάγεται ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (15.487)$$

όπου  $H(e^{j\omega})$  η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος. Αν αναλύσουμε σε πολική μορφή την απόκριση σε συχνότητα της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος, εκφρασμένη όπως στη Σχέση (17.188), βλέπουμε ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (15.488)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}|H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (15.489)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\angle H(e^{j\omega})+\angle X(e^{j\omega}))} \quad (15.490)$$

και άρα

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})| \quad (15.491)$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}) \quad (15.492)$$

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση πλάτους  $|H(e^{j\omega})|$  λέγεται *απόκριση πλάτους* (magnitude response) ή *κέρδος* (gain) του συστήματος, και η συνάρτηση φάσης  $\angle H(e^{j\omega})$  λέγεται *απόκριση φάσης* (phase response) του συστήματος. Πρέπει να τονιστεί ξανά εδώ ότι η απόκριση πλάτους της εξόδου αποτελείται από το *γινόμενο* των αποκρίσεων πλάτους της εισόδου και του συστήματος, ενώ η απόκριση φάσης της εξόδου αποτελείται από το *άθροισμα* των αποκρίσεων φάσης της εισόδου και του συστήματος.

Αυτές οι σχέσεις επιδρούν στην είσοδο του συστήματος και τη μεταβάλλουν, είτε με επιθυμητό είτε με ανεπιθύμητο τρόπο. Όσον αφορά το τελευταίο, τότε οι αντίστοιχες σχέσεις αποκαλούνται *διαταραχές πλάτους και φάσης*, αντίστοιχα.

### 15.9.1 Απόκριση Φάσης

Όσον αφορά την απόκριση πλάτους ενός ΓΧΑ συστήματος, τα πράγματα είναι σχετικά ξεκάθαρα, τουλάχιστον διαισθητικά. Το γινόμενο της απόκρισης πλάτους του συστήματος και του φάσματος πλάτους της εισόδου δίνει το φάσμα πλάτους της εξόδου, ή πιο απλά, η απόκριση πλάτους μεταβάλλει το πλάτος των φασματικών συνιστωσών του σήματος εισόδου. Τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα αν θέλουμε να δούμε και πως συμπεριφέρεται η απόκριση φάσης, και ποιά είναι η επιρροή της στο φάσμα φάσης του σήματος εισόδου. Στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου θα δούμε που οφείλεται αυτή η περιπλοκή και πως μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε. Υπενθυμίζεται ότι η φάση σχετίζεται με τη *χρονική δομή* ενός σήματος, και υπό την οπτική του ΓΧΑ συστήματος, η απόκριση φάσης σχετίζεται με τη διατήρηση ή μη της αρχικής χρονικής δομής του σήματος εισόδου όταν αυτό καταλήξει στην έξοδο του συστήματος.

Γνωρίζετε ότι η φάση ενός οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού δεν ορίζεται μονοσήμαντα, αφού αν προσθέσουμε έναν αριθμό  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , το αποτέλεσμα της φάσης παραμένει αμετάβλητο (όπως και ο ίδιος ο μιγαδικός). Όταν υπολογίζουμε τη φάση ενός μιγαδικού αριθμού μέσω της αντίστροφης εφαπτομένης με χρήση ενός προγράμματος ή μιας αριθμομηχανής, το αποτέλεσμα εμφανίζεται πάντα στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$ . Αυτή η τιμή της φάσης λέγεται **πρωτεύουσα τιμή φάσης (principal phase value)**, και θα τη συμβολίζουμε ως

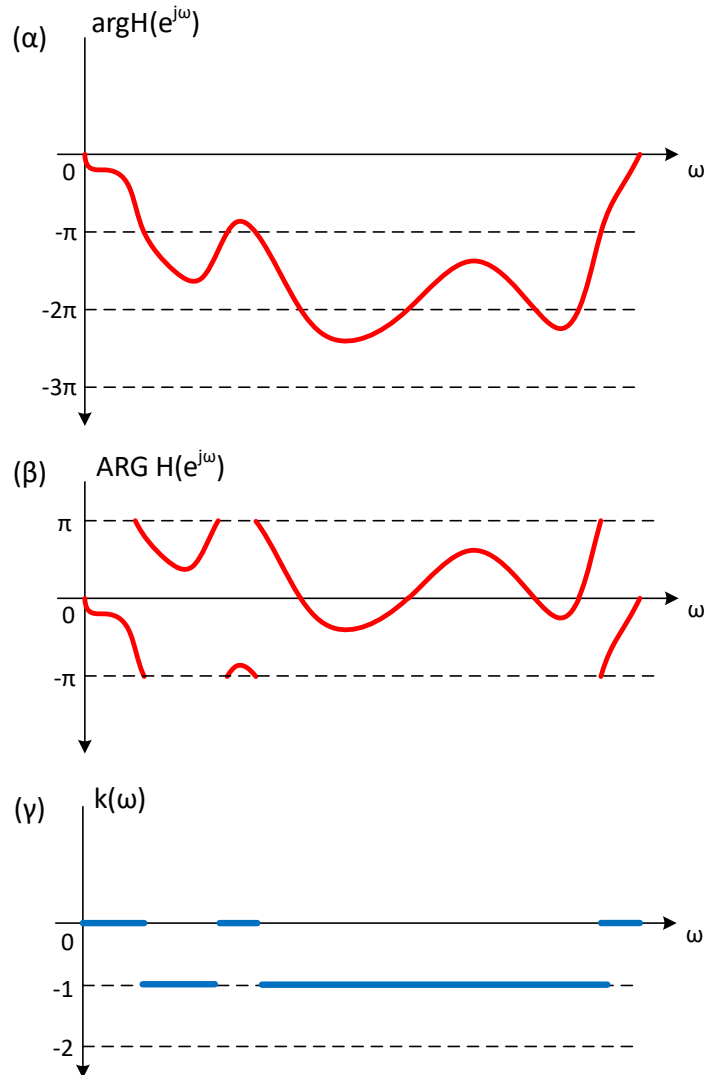
$$-\pi < \text{ARG}[H(e^{j\omega})] \leq \pi \quad (15.493)$$

Οποιαδήποτε άλλη γωνία που δίνει ορθό αποτέλεσμα για τη μιγαδική τιμή της συνάρτησης  $\angle H(e^{j\omega})$  μπορεί να αναπαρασταθεί με όρους πρωτεύουσας τιμής ως

$$\angle H(e^{j\omega}) = \text{ARG}[H(e^{j\omega})] + 2\pi k(\omega) \quad (15.494)$$

όπου  $k(\omega)$  είναι ένας θετικός ή αρνητικός ακέραιος που διαφέρει για κάθε τιμή του  $\omega$ . Θα χρησιμοποιούμε γενικά τη γραφή  $\angle H(e^{j\omega})$  ή  $\arg[H(e^{j\omega})]$  για να δηλώσουμε μη πρωτεύουσα τιμή της φάσης.

Σε πολλές περιπτώσεις, η πρωτεύουσα τιμή φάσης παρουσιάζει  $2\pi$ -ασυνέχειες όταν τη βλέπουμε ως συνάρτηση του  $\omega$  υπολογισμένη από την αντίστροφη εφαπτομένη. Το Σχήμα 15.26 δείχνει μια συνάρτηση φάσης που είναι συνεχής,  $\arg[H(e^{j\omega})]$ , και την πρωτεύουσα τιμή της,  $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$  στο διάστημα  $-\pi < \omega \leq \pi$ . Η συνάρτηση φάσης του Σχήματος 15.26(α) εκτείνεται πέρα από το διάστημα  $(-\pi, \pi]$ . Η πρωτεύουσα τιμή φάσης του Σχήματος 15.26(β) έχει “άλματα” κατά ακέραια πολλαπλάσια του  $2\pi$ , λόγω της αφαίρεσης πολλαπλάσιων του  $2\pi$  από τη μη πρωτεύουσα τιμή του Σχήματος 15.26(α) που έλαβαν χώρα ώστε να βρεθεί κάθε τιμή της στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$ . Τέλος, το Σχήμα 15.26(γ) δείχνει την τιμή του  $k(\omega)$  για κάθε διάστημα, δηλ. πόσα ακέραια πολλαπλάσια του  $2\pi$  απαιτούνται για το “ξετύλιγμα” (unwrapping) της φάσης εκτός του διαστήματος  $(-\pi, \pi]$ . Γι’ αυτό άλλωστε και η διαδικασία μετατροπής της πρωτεύουσας φάσης σε συνεχή συνάρτηση του  $\omega$  μέσω προσθήκης πολλαπλάσιων του  $2\pi$  λέγεται **ξετύλιγμα φάσης - phase unwrapping**, και η αντίστοιχη συνάρτηση **ξετυλιγμένη φάση - unwrapped phase**.



Σχήμα 15.26: (α) Συνεχής και (β) πρωτεύουσα τιμή φάσης. Στο Σχήμα (γ) εμφανίζονται οι ακέραιοι  $k(\omega)$ , όπως εξηγείται στο κείμενο.

### 15.9.2 Καθυστερήση Φάσης και Καθυστερήση Ομάδας - Phase and Group Delay

Θα ήταν ενδιαφέρον λοιπόν να μελετήσουμε τη φάση μέσω κάποιων νέων ορισμών. Έστω η έξοδος  $y[n]$  ενός ΓΧΑ συστήματος με φασματική απόκριση  $H(e^{j\omega})$ . Σύμφωνα με την αρχική ανάλυσή μας, το σύστημα θα εφαρμόσει κάποια καθυστέρηση στην έξοδο σε σχέση με την είσοδο  $x[n]$ , η οποία οφείλεται σε μια, πιθανότατα, μη γραμμική απόκριση φάσης  $\angle H(e^{j\omega}) = \theta(\omega)$  του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση όπου η είσοδος είναι ένα απλό ημίτονο

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (15.495)$$

Ξέρουμε ότι η έξοδος θα είναι επίσης ημιτονοειδούς μορφής, και συγκεκριμένα

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta(\omega_0)) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0 \left(n + \frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0}\right) + \phi\right) \quad (15.496)$$

Η ποσότητα  $\frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0}$  μας υποδεικνύει τη χρονική καθυστέρηση (μετατόπιση), σε δείγματα, του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου. Η συνάρτηση

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad (15.497)$$

ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης - phase delay**.

Θεωρήστε τώρα ότι το σήμα εισόδου αποτελείται από άθροισμα από ημίτονα, διαφορετικής συχνότητας το καθένα. Καταλαβαίνετε ότι κάθε τέτοιο ημίτονο θα υποστεί διαφορετική καθυστέρηση φάσης από κάθε άλλο όταν περάσει από ένα ΓΧΑ σύστημα, και το σήμα εξόδου  $y[n]$  θα είναι, εν γένει, διαφορετικό στη μορφή του σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου  $x[n]$ . Σε τέτοιες περιπτώσεις μας είναι χρήσιμη μια διαφορετική παράμετρος, που θα την αναπτύξουμε παρακάτω, μέσω ενός παραδείγματος.

Έστω ένα σήμα

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n) \cos(\omega_c n) \quad (15.498)$$

με  $\omega_c > \omega_0$ . Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **διαμόρφωση πλάτους - Amplitude Modulation (AM)** και ήταν μια πρώτης μορφής ραδιοφωνική μετάδοση<sup>11</sup>. Το σήμα χαμηλής συχνότητας  $\omega_0$  λέγεται **περιβάλλουσα** (ή σήμα πληροφορίας, στην ορολογία των τηλεπικοινωνιών - το χρήσιμο σήμα που θέλουμε να μεταδοθεί), ενώ το σήμα συχνότητας  $\omega_c$  λέγεται **φέρων σήμα**, αφού φέρει την πληροφορία στο πλάτος του. Με τις σχέσεις του Euler, αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \frac{A}{2} \cos((\omega_c + \omega_0)n) + \frac{A}{2} \cos((\omega_c - \omega_0)n) = \frac{A}{2} \cos(\omega_l n) + \frac{A}{2} \cos(\omega_u n) \quad (15.499)$$

με  $\omega_l = \omega_c - \omega_0$  και  $\omega_u = \omega_c + \omega_0$ . Άρα στο σήμα απλής AM διαμόρφωσης της Σχέσης (15.498) υπάρχουν δυο συχνότητες, οι  $\omega_l, \omega_u$ , και οι δυο γύρω από τη φέρουσα συχνότητα  $\omega_c$ . Αν το παραπάνω σήμα παρουσιαστεί ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα με φασματική απόκριση

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (15.500)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = |H(e^{j\omega_l})| \frac{A}{2} \cos(\omega_l n + \theta(\omega_l)) + |H(e^{j\omega_u})| \frac{A}{2} \cos(\omega_u n + \theta(\omega_u)) \quad (15.501)$$

$$= A \cos\left(\omega_c n + \frac{\theta(\omega_u) + \theta(\omega_l)}{2}\right) \cos\left(\omega_0 n + \frac{\theta(\omega_u) - \theta(\omega_l)}{2}\right) \quad (15.502)$$

θεωρώντας για ευκολία ότι  $|H(e^{j\omega})| \approx 1$  στο διάστημα  $\omega_l \leq \omega \leq \omega_u$ , και χρησιμοποιώντας γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες. Έτσι, βλέπουμε ότι η έξοδος είναι επίσης στη μορφή γινομένου δυο ημιτόνων με συχνότητες  $\omega_c$  και  $\omega_0$ , όμως το καθένα έχει διαφορετική φάση μετατόπισης, και άρα διαφορετική καθυστέρηση σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου οι συχνότητες  $\omega_u, \omega_l$  είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, δηλαδή  $\omega_c \gg \omega_0$ , τότε  $\omega_u \approx \omega_c$  και  $\omega_l \approx \omega_c$ . Σε ένα μικρό εύρος συχνοτήτων γύρω από το  $\omega_c$ , μπορούμε να εκφράσουμε την ξετυλιγμένη φάση  $\theta_c(\omega)$  του ΓΧΑ συστήματος με χρήση αναπτύγματος Taylor ως<sup>12</sup>

$$\theta_c(\omega) \approx \theta_c(\omega_c) + \left. \frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} (\omega - \omega_c) \quad (15.503)$$

κρατώντας μόνο τους δυο πρώτους όρους του αναπτύγματος. Με χρήση του αναπτύγματος, μπορούμε να βρούμε τις χρονικές καθυστερήσεις του σήματος συχνότητας  $\omega_c$  και αυτού συχνότητας  $\omega_0$  της Σχέσης (15.502). Για το σήμα συχνότητας  $\omega_c$ , η φάση μετατόπισης του είναι

$$-\frac{\theta_c(\omega_u) + \theta_c(\omega_l)}{2\omega_c} \approx -\frac{2\theta_c(\omega_c)}{2\omega_c} = -\frac{\theta_c(\omega_c)}{\omega_c} \quad (15.504)$$

που είναι το ίδιο με την καθυστέρηση φάσης του σήματος συχνότητας  $\omega_c$ , σαν να περνούσε μόνο αυτό μέσα από το σύστημα. Για το σήμα συχνότητας  $\omega_0$ , η χρονική καθυστέρηση είναι

$$-\frac{\theta_c(\omega_u) - \theta_c(\omega_l)}{2\omega_0} = -\frac{\theta_c(\omega_u) - \theta_c(\omega_l)}{\omega_u - \omega_l} \approx -\left. \frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (15.505)$$

Η παράμετρος

$$\tau_g(\omega_c) = -\left. \frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (15.506)$$

<sup>11</sup> Το Κεφάλαιο 8 σας έδωσε μια πρώτη ιδέα για τέτοιες μεθόδους διαμόρφωσης στο πεδίο του συνεχούς χρόνου.

<sup>12</sup> Ανάπτυγμα Taylor γύρω από  $x = a$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

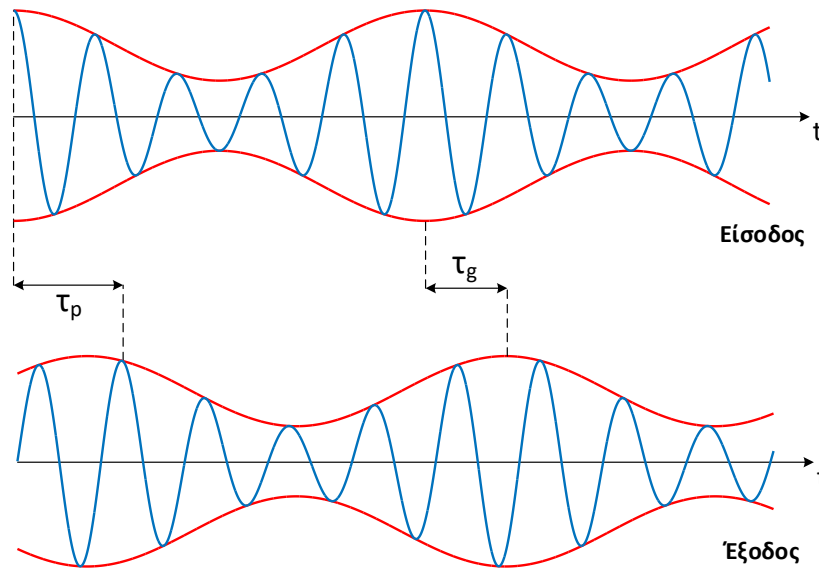
λέγεται **καθυστέρηση ομάδας - group delay** που προκαλείται από το σύστημα στη θέση  $\omega = \omega_c$ . Στη γενική μορφή, η συνάρτηση είναι της μορφής

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \quad (15.507)$$

Στο εξής, ως **καθυστέρηση ομάδας** θα ορίζεται η αρνητική παράγωγος της (ξετυλιγμένης) απόκρισης φάσης,

$$\tau_g(\omega) = \text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\angle H(e^{j\omega})\} = -\frac{d}{d\omega}\{\arg\{H(e^{j\omega})\}\} \quad (15.508)$$

και αφορά την καθυστέρηση που υπόκειται η περιβάλλουσα της εισόδου στο χρόνο (σήμα συχνότητας  $\omega_0$ ) λόγω της επίδρασης της απόκρισης φάσης του ΓΧΑ συστήματος. Μια σχηματική απεικόνιση της καθυστέρησης φάσης και της καθυστέρησης ομάδας για το παραπάνω παράδειγμα βλέπετε στο Σχήμα 15.27, για ένα σήμα συνεχούς χρόνου, για περισσότερη ευκολία στην αναπαράσταση. Άρα λοιπόν το σήμα εξόδου, υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις, μπορεί



Σχήμα 15.27: Καθυστέρηση φάσης  $t_p$  και καθυστέρηση ομάδας  $t_g$  για το σήμα  $y(t)$ .

να προσεγγιστεί πολύ καλά ως

$$y[n] \approx A|H(e^{j\omega_c})| \cos(\omega_0 n - \tau_g(\omega_c)) \cos(\omega_c(n - \tau_p(\omega_c))) \quad (15.509)$$

Με άλλα λόγια, η καθυστέρηση ομάδας μας δίνει τη χρονική καθυστέρηση της περιβάλλουσας, υπό την προϋπόθεση ότι:

- (α') η απόκριση πλάτους του συστήματος είναι προσεγγιστικά σταθερή γύρω από τη συχνότητα  $\omega_0$
- (β') η καθυστέρηση ομάδας είναι προσεγγιστικά σταθερή γύρω από τη συχνότητα  $\omega_0$

Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας μας δίνει ένα μέτρο της γραμμικότητας (ή μη) της φάσης ως συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$ . Στο παραπάνω παράδειγμα, θεωρήσαμε ότι το σήμα μας είναι στενής ζώνης, δηλ. μη μηδενικό για  $\omega \in [\omega_c - \epsilon, \omega_c + \epsilon]$ , αλλά μπορούμε να σκεφτούμε ότι οποιοδήποτε σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα τέτοιων σημάτων, διαφορετικής  $\omega_c$  για το καθένα. Για την ακρίβεια, ας θεωρήσουμε ένα σήμα εισόδου

$$x[n] = \sum_{k=1}^N w_k[n] \cos(\omega_k n + \phi_k) \quad (15.510)$$

και η περιβάλλουσα καθεμιάς συχνότητας,  $w_k[n]$ , είναι ένα σήμα πεπερασμένης διάρκειας στο χρόνο, χαμηλοπερατής φύσεως στη συχνότητα, όπως επίσης και στενής ζώνης, δηλ. για κάθε μια από τις περιβάλλουσες  $w_k[n]$  ισχύει ότι

$$w[n] \neq 0, \quad N_1 \leq n \leq N_2 \quad (15.511)$$

και για το μετασχ. Fourier  $W_k(e^{j\omega})$  ισχύει ότι

$$W_k(e^{j\omega}) = 0, \quad |\omega| > B_k \quad (15.512)$$

και  $B_k \ll \omega_k$ . Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ο μετασχ. Fourier της εισόδου δίνεται ως

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N W_k(e^{j\omega}) * (\pi e^{j\phi_k} \delta(\omega - \omega_k) + \pi e^{-j\phi_k} \delta(\omega + \omega_k)) \quad (15.513)$$

$$= \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{2} e^{j\phi_k} W_k(e^{j(\omega - \omega_k)}) + \frac{1}{2} e^{-j\phi_k} W_k(e^{j(\omega + \omega_k)}) \right) \quad (15.514)$$

Η παραπάνω σχέση, σε συνδυασμό με τη Σχέση (15.512), μας πληροφορεί ότι και το σήμα εισόδου είναι ένα άθροισμα σημάτων στενής ζώνης γύρω από τις συχνότητες  $\omega = \pm\omega_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ . Αν το ΓΧΑ σύστημα στο οποίο εμφανίζεται ως είσοδος το παραπάνω σήμα έχει

(α') περίπου σταθερή απόκριση πλάτους  $|H(e^{j\omega_k})|$  για ένα μικρό εύρος συχνοτήτων γύρω από κάθε συχνότητα  $\pm\omega_k$

(β') περίπου σταθερή καθυστέρηση ομάδας  $\tau_g(e^{j\omega_k})$  για ένα μικρό εύρος συχνοτήτων γύρω από κάθε συχνότητα  $\pm\omega_k$

τότε μπορούμε να δείξουμε ότι η έξοδος μπορεί να γραφεί ως

$$y[n] = \sum_{k=1}^N w_k [n - \tau_g(e^{j\omega_k})] \cos(\omega_k(n - \tau_p(e^{j\omega_k})) + \phi_k) \quad (15.515)$$

με την επιπλέον προϋπόθεση ότι η καθυστέρηση ομάδας και η καθυστέρηση φάσης έχουν ακέραιες τιμές στις συχνότητες  $\omega = \pm\omega_k$ . Αν αυτό δε συμβαίνει, τότε η Σχέση (15.515) είναι προσεγγιστική. Βλέπετε λοιπόν ότι η πραγματική καθυστέρηση του σήματος στην έξοδο σχετίζεται με την καθυστέρηση ομάδας και όχι με την καθυστέρηση φάσης. Είναι ξεκάθαρο λοιπόν ότι:

#### Καθυστέρηση Ομάδας ΓΧΑ Συστήματος

- Αν η απόκριση φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος είναι γραμμική, τότε η καθυστέρηση ομάδας του είναι σταθερή ως προς τη συχνότητα. Αυτό σημαίνει ότι κάθε συνιστώσα στενής ζώνης της εισόδου θα υποστεί την ίδια καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος.
- Αν η απόκριση φάσης είναι μη γραμμική, τότε η καθυστέρηση ομάδας δεν είναι σταθερή, και άρα θα υπάρχουν διαφορετικές καθυστερήσεις για διαφορετικά "πακέτα" συχνοτήτων της εισόδου, με αποτέλεσμα τη διασπορά στο χρόνο της ενέργειας του σήματος στην έξοδο του συστήματος. Έτσι, η μη γραμμικότητα στη φάση ή - ισοδυνάμως - η μη σταθερή καθυστέρηση ομάδας συνεπάγεται διασπορά του σήματος στο χρόνο.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια της καθυστέρησης ομάδας, ας δούμε δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 17.45:

Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα ιδανικής καθυστέρησης, με χρονική απόκριση

$$h[n] = \delta[n - n_d] \quad (15.516)$$

και βρείτε την καθυστέρηση ομάδας του.

Λύση:

Το σύστημα έχει φασματική απόκριση

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad (15.517)$$

η οποία σε πολική μορφή γράφεται ως

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad (15.518)$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d, \quad |\omega| < \pi \quad (15.519)$$

Παρατηρήστε ότι η χρονική καθυστέρηση (ή προήγηση, αν  $n_d < 0$ ) σχετίζεται με τη φάση, η οποία είναι γραμμική ως προς τη συχνότητα. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{\arg\{H(e^{j\omega})\}\} = -\frac{d}{d\omega}(-\omega n_d) = n_d \quad (15.520)$$

και

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\arg\{H(e^{j\omega})\}}{\omega} = -\frac{-\omega n_d}{\omega} = n_d \quad (15.521)$$

Στην περίπτωση της γραμμικής φάσης, η καθυστέρηση ομάδας συμπίπτει με την καθυστέρηση φάσης. Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας είναι σταθερή όταν η απόκριση φάσης είναι γραμμική, και ισούται με τον αριθμό των δειγμάτων που καθυστερεί το σήμα εξόδου σε σχέση με το σήμα εισόδου. ■

Το προηγούμενο παράδειγμα έκανε σαφές ότι η γραμμική απόκριση φάσης οδηγεί σε σταθερή καθυστέρηση ομάδας (και καθυστέρηση φάσης). Σε πολλές εφαρμογές, η απόκριση φάσης σε μορφή καθυστέρησης θεωρείται αρκετά ήπια μορφή διαταραχής, μια και απλά μετατοπίζει το σήμα εισόδου κατά ένα σταθερό πλήθος δειγμάτων στο χρόνο όταν αυτό περνά στην έξοδο του συστήματος, χωρίς κανένα άλλο ανεπιθύμητο πρόβλημα. Με άλλα λόγια, κάθε συχνοτική συνιστώσα του σήματος εισόδου καθυστερεί κατά το ίδιο χρονικό διάστημα με τις υπόλοιπες, ώστε τελικά το άθροισμά τους στην έξοδο να αποτελέσει απλά μια μετατόπιση του σήματος εισόδου. Έτσι, σε πολλές περιπτώσεις σχεδίασης φίλτρων ή ΓΧΑ συστημάτων, η γραμμική φάση είναι αποδεκτή ως μορφή διαταραχής φάσης. Το αντίθετο συμβαίνει για μη-γραμμικές φάσεις, όπου κάθε συνιστώσα της εισόδου καθυστερεί κατά διαφορετικό πλήθος δειγμάτων όταν περνά στην έξοδο, με αποτέλεσμα η χρονική μορφή του σήματος εισόδου να μην έχει σχέση με αυτή της εξόδου.

#### Παράδειγμα 17.46:

Θεωρήστε τα παρακάτω ΓΧΑ σύστημα με χροστικές αποκρίσεις

$$(\alpha') \quad h[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$$

$$(\beta') \quad h[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

και βρείτε την καθυστέρηση ομάδας τους.

Λύση:

(α') Έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = 1 - ae^{-j\omega} = 1 - a \cos(\omega) + ja \sin(\omega) \quad (15.522)$$

Η απόκριση φάσης δίνεται ως

$$\phi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)} \quad (15.523)$$

Για την εύρεση της καθυστέρησης ομάδας, υπενθυμίζουμε από το Κεφάλαιο 2 ότι

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} f(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)} \frac{d}{dx} f(x) \quad (15.524)$$

οπότε η καθυστέρηση ομάδας θα είναι

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \phi_H(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega} \tan^{-1} \frac{a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)} \quad (15.525)$$

$$= -\frac{1}{1 + \left(\frac{a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)}\right)^2} \frac{(1 - a \cos(\omega))a \cos(\omega) - (a \sin(\omega))^2}{(1 - a \cos(\omega))^2} \quad (15.526)$$



το οποίο καταλήγει - μετά από απλοποιήσεις - στη σχέση

$$\tau_g(\omega) = \frac{a^2 - a \cos(\omega)}{1 + a^2 - 2a \cos(\omega)} \quad (15.527)$$

Παρατηρήστε ότι η καθυστέρηση ομάδας έχει ακρότατο για  $\omega = 0$ , το οποίο είναι ελάχιστο για  $0 < a < 1$  και μέγιστο για  $a > 1$ .

(β') Ισχύει

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1 - a \cos(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} - j \frac{a \sin(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} \quad (15.528)$$

και η απόκριση φάσης δίνεται ως

$$\phi_H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{-a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)} = -\tan^{-1} \frac{a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)} \quad (15.529)$$

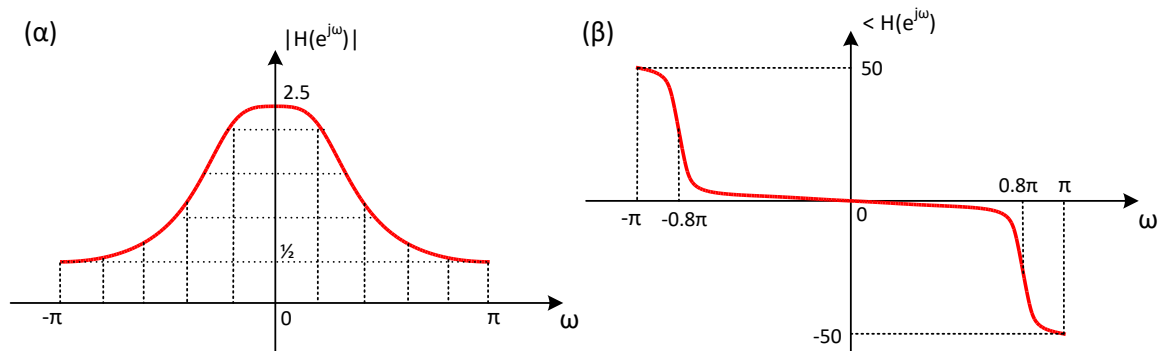
Οπότε η καθυστέρηση ομάδας θα είναι

$$\tau_g(\omega) = \frac{a \cos(\omega) - a^2}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} \quad (15.530)$$

■

#### Παράδειγμα 15.47:

Θεωρήστε το σύστημα με απόκριση πλάτους και (ξετυλιγμένη) απόκριση φάσης όπως του Σχήματος 15.28.



Σχήμα 15.28: Απόκριση (α) πλάτους και (β) φάσης ΓΧΑ συστήματος.

Έστω ότι στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] + x_3[n] \quad (15.531)$$

$$= w[n - M] \sin(0.2\pi) + w[n - M] \sin(0.8\pi) + w[n - 7M] \sin(0.4\pi) \quad (15.532)$$

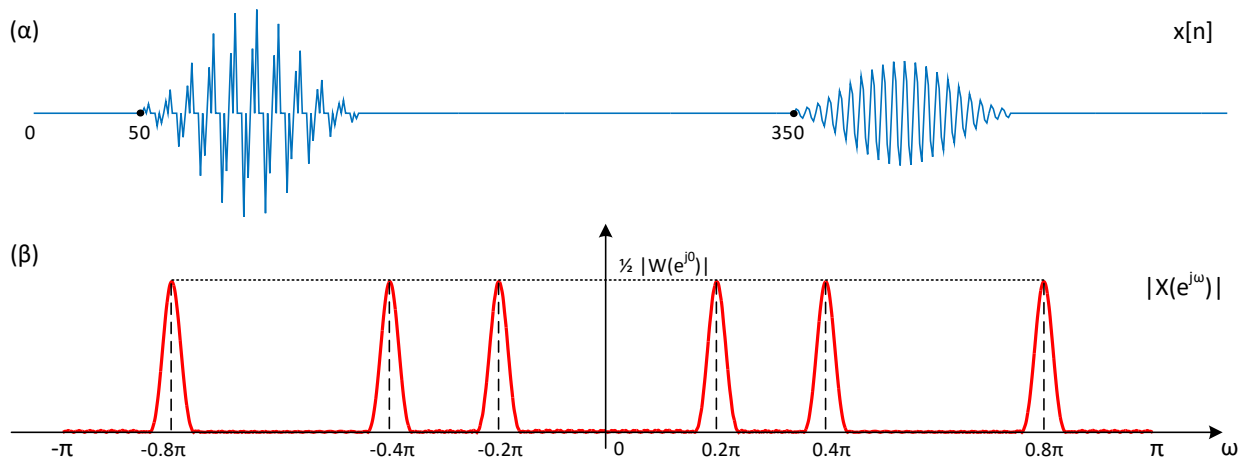
με  $M = 50$  δείγματα και  $w[n]$  ένα σήμα στενής ζώνης, το οποίο ονομάζεται παράθυρο *Hamming* και έχει τη μορφή

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/N), \quad 0 \leq n \leq N \quad (15.533)$$

με  $N = 100$ . Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος,  $y[n]$ .

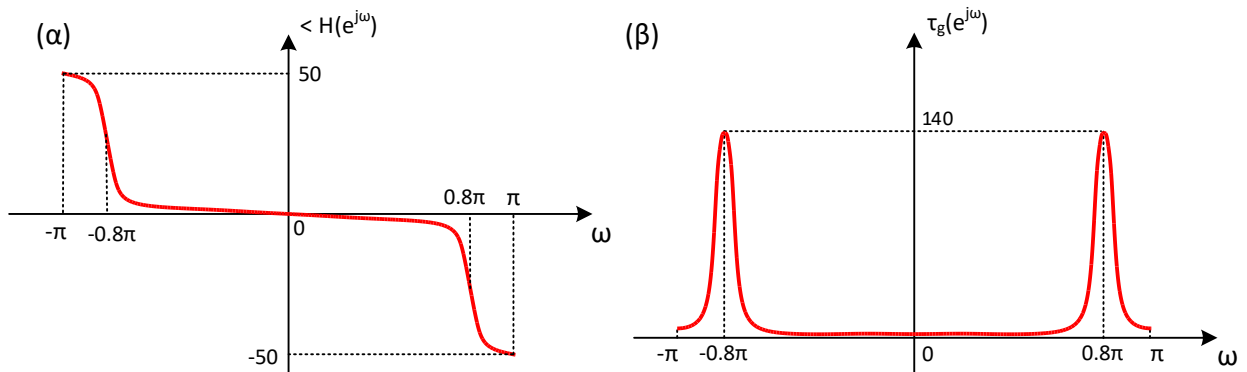
Λύση:

Η είσοδος αποτελείται από τρία ημίτονα, συχνότητας  $\omega = 0.2\pi$ ,  $\omega = 0.4\pi$ , και  $\omega = 0.8\pi$ . Παρατηρήστε ότι τα ημίτονα συχνότητας  $\omega = 0.2\pi$  και  $\omega = 0.8\pi$  έχουν προστεθεί μεταξύ τους, καθώς “ζουν” στον ίδιο χρόνο, δηλ. για  $M \leq n \leq N + M$ , ενώ το σήμα συχνότητας  $\omega = 0.4\pi$  βρίσκεται 300 δείγματα δεξιότερα, όπως δείχνει το Σχήμα 15.29(α). Στο ίδιο Σχήμα 15.29(β) φαίνεται το φάσμα πλάτους  $|X(e^{j\omega})|$  του σήματος  $x[n]$ . Είναι σημαντικό να προσέξετε ότι οι επιμέρους συχνοτικές συνιστώσες καταλαμβάνουν μικρό εύρος ζώνης γύρω από τις κεντρικές συχνότητες  $\omega = \pm 0.2\pi, \pm 0.4\pi, \pm 0.8\pi$ , είναι δηλ. σήματα στενής ζώνης. Για να υπολογίσουμε



Σχήμα 15.29: (α) Σήμα εισόδου  $x[n]$  και (β) φάσμα πλάτους του.

την έξοδο του συστήματος, πρέπει να καταλάβουμε πως λειτουργεί η απόκριση φάσης μέσω της καθυστέρησης ομάδας. Παρατηρήστε αρχικά ότι η ζετυλιγμένη απόκριση φάσης στο Σχήμα 15.30(α) είναι μονότονη συνάρτηση, και μάλιστα φθίνουσα. Έτσι, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι θετική για κάθε  $\omega$ . Στο Σχήμα 15.30(β) βλέπετε την καθυστέρηση ομάδας. Δείτε ότι η καθυστέρηση ομάδας έχει μεγάλες τιμές γύρω από τις συχνότητες  $0.78\pi < |\omega| < 0.82\pi$ , όπου εκεί η ζετυλιγμένη φάση έχει μέγιστη αρνητική κλίση. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι στο παραπάνω



Σχήμα 15.30: (α) Απόκριση φάσης και (β) Καθυστέρηση ομάδας.

σύστημα εμφανίζεται ως είσοδος το σήμα του Σχήματος 15.29. Ελέγχοντας το φάσμα πλάτους  $|X(e^{j\omega})|$  μπορεί να αναρωτηθεί κανείς που βρέθηκαν αυτοί οι λοβοί γύρω από τις συχνότητες  $\omega = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ . Με μια απλοϊκή προσέγγιση, θα περίμενε κανείς να συναντήσει συναρτήσεις Δέλτα σε αυτές τις συχνότητες, μια και αυτές αποτελούν το μετασχ. Fourier σημάτων ημιτόνου όπως αυτά που έχουμε στην είσοδο. Ο λόγος που εμφανίζονται αυτοί οι λοβοί σε αυτές τις συχνότητες γίνονται κατανοητοί αν λάβουμε υπόψη μας τον όρο  $w[n]$  και σκεφτούμε πώς “μεταφράζεται” το γινόμενο  $w[n]$  επί  $\sin(\omega_0 n)$  στο χώρο της συχνότητας. Όπως ήδη ξέρετε, το γινόμενο στο χρόνο γίνεται συνέλιξη στη συχνότητα, και άρα

$$F\{w[n] \sin(\omega_0 n)\} = \frac{1}{2\pi} W(e^{j\omega}) * (\pi e^{-j\pi/2} \delta(\omega - \omega_0) + \pi e^{j\pi/2} \delta(\omega + \omega_0)) \quad (15.534)$$

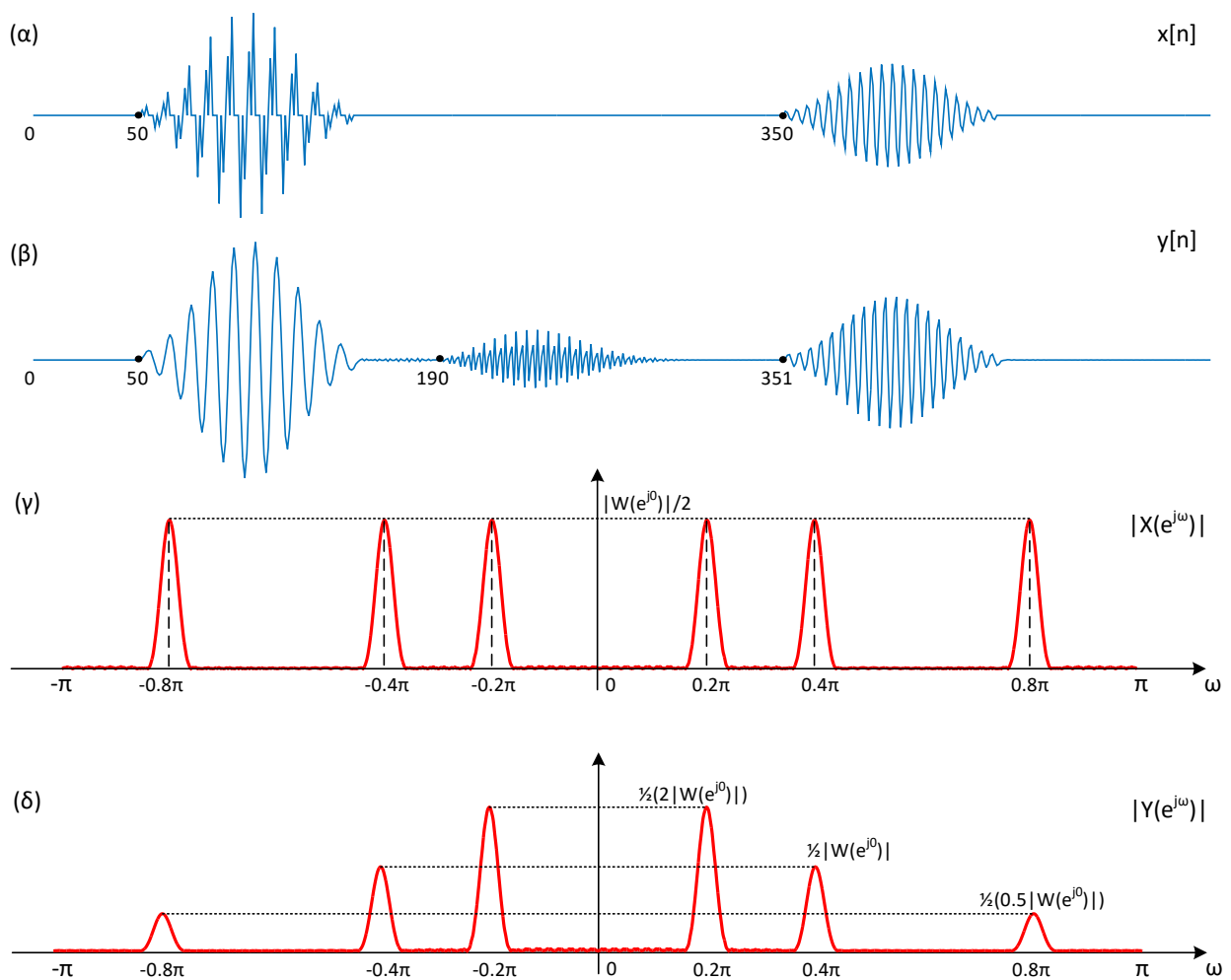
$$= \frac{1}{2} e^{-j\pi/2} W(e^{j(\omega - \omega_0)}) + \frac{1}{2} e^{j\pi/2} W(e^{j(\omega + \omega_0)}) \quad (15.535)$$

Άρα ουσιαστικά αυτό που βλέπουμε στο φάσμα πλάτους  $|X(e^{j\omega})|$  για κάθε ημίτονο της εισόδου είναι ο μετασχ. Fourier  $W(e^{j(\omega \pm \omega_0)})$  του παραθύρου  $w[n]$  γύρω από τις συχνότητες  $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ . Γι' αυτό και αντί για συναρτήσεις Δέλτα στις συχνότητες  $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$  (δηλ. ενέργεια ακριβώς και μόνο σε αυτές τις συχνότητες), βλέπουμε σημαντική ενέργεια γύρω από αυτές τις συχνότητες, σε ένα μικρό εύρος συχνοτήτων, που εξαρτάται από το είδος και τη διάρκεια του παραθύρου. Έστω ότι αυτό το εύρος έχει διάρκεια  $2B$  rad/sample. Κάθε παράθυρο λοιπόν συνεισφέρει ένα σύνολο από συχνότητες  $(\omega_0 - B, \omega_0 + B)$ , όπου  $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ , ή αλλιώς ένα εύρος από συνιστώσες στενής ζώνης που έχουν κέντρο τις συχνότητες  $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ .

Όταν λοιπόν το παραπάνω σήμα παρουσιαστεί ως είσοδος στο ΓΧΑ σύστημα  $H(e^{j\omega})$ , κάθε ένα από τα συχνοτικά “πακέτα” ή αλλιώς, κάθε μια από τις συχνοτικές “ομάδες” που σχετίζεται με καθέναν απ’ τους όρους στενής ζώνης, θα επηρεαστεί από την απόκριση πλάτους του συστήματος, καθώς και από την καθυστέρηση ομάδας στο εύρος συχνοτήτων της κάθε συχνοτικής “ομάδας”. Από την απόκριση πλάτους του συστήματος, βλέπουμε ότι η συχνοτική “ομάδα” γύρω από τη συχνότητα  $\omega = 0.2\pi$  θα λάβει ένα μεγάλο κέρδος στο πλάτος της, και η “ομάδα” γύρω από τη συχνότητα  $\omega = 0.4\pi$  θα παραμείνει περίπου αμετάβλητη. Όσο για την “ομάδα” γύρω από τη συχνότητα  $\omega = 0.8\pi$ , αφού η απόκριση πλάτους του συστήματος είναι κοντά στο  $\frac{1}{2}$  γύρω από αυτή τη συχνότητα, η συνιστώσα εισόδου γύρω από αυτή τη συχνότητα θα μειώσει το πλάτος της στο μισό περίπου.

Κάνοντας την ίδια εξέταση για την καθυστέρηση ομάδας του συστήματος, θα δούμε ότι η καθυστέρηση ομάδας γύρω από τη συχνότητα  $\omega = 0.8\pi$  θα είναι σημαντικά μεγαλύτερη από αυτή είτε της συχνότητας  $\omega = 0.4\pi$  είτε της συχνότητας  $\omega = 0.8\pi$  - οι οποίες και είναι σχεδόν ίσες με μηδέν - και κατά συνέπεια η συνιστώσα της εισόδου που βρίσκονται γύρω από την υψηλότερη συχνότητα θα λάβει τη μεγαλύτερη καθυστέρηση στην έξοδο του συστήματος. Η καθυστέρηση αυτή ισούται με περίπου 140 δείγματα.

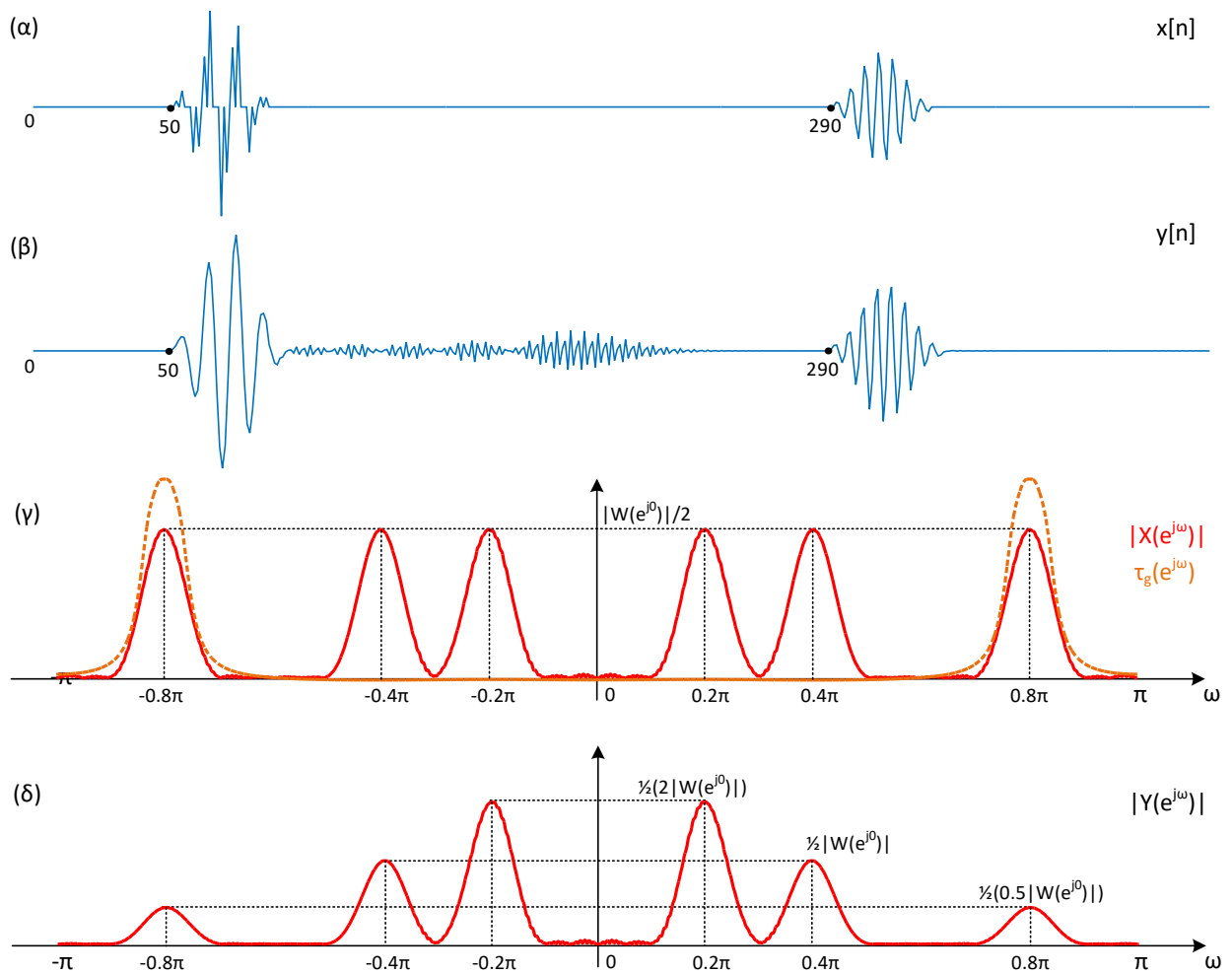
Το σήμα εξόδου και το φάσμα πλάτους του (μαζί με τα αντίστοιχα της εισόδου, για σύγκριση) δίνεται στο Σχήμα 15.31(β,δ). Παρατηρήστε ότι πλέον οι συνιστώσες γύρω από τις συχνότητες  $\omega = 0.2\pi$  και  $\omega = 0.8\pi$  δε βρίσκονται πλέον μαζί στο ίδιο διάστημα  $M \leq n \leq N + M$ , αλλά έχουν διαχωριστεί! Οι συνιστώσες γύρω από τη συχνότητα  $\omega = 0.8\pi$  έχουν καθυστερήσει κατά 140 περίπου δείγματα, με αποτέλεσμα να βρίσκονται πλέον σε διαφορετικό χρονικό διάστημα απ’ ότι βρίσκονταν στην είσοδο! Ταυτόχρονα, το πλάτος της συνιστώσας αυτής έχει σχεδόν υποδιπλασιαστεί, λόγω της επίδρασης της απόκρισης πλάτους του συστήματος. Οι άλλες δυο συνιστώσες έχουν ενισχυθεί στο πλάτος αλλά έχουν μείνει σχεδόν στην αρχική τους θέση: οι συνιστώσες κοντά στη συχνότητα  $\omega = 0.2\pi$  έχουν αυξήσει (σχεδόν διπλασιάσει) το πλάτος τους, ενώ οι συνιστώσες γύρω από τη συχνότητα  $\omega = 0.4\pi$  είναι ελαφρά αυξημένου πλάτους. Και οι δυο έχουν μια αμελητέα καθυστέρηση στην έξοδο.



Σχήμα 15.31: (α) Σήμα εισόδου  $x[n]$ , (β) σήμα εξόδου  $y[n]$ , (γ) φάσμα πλάτους εισόδου, (δ) φάσμα πλάτους εξόδου.

Η Παράγραφος αυτή έδειξε πως τα ΓΧΑ συστήματα τροποποιούν τα σήματα εισόδου τους μέσω του συνδυασμού της απόκρισης πλάτους και της απόκρισης φάσης. Για το τελευταίο παράδειγμα, όπου το σήμα εισόδου αποτελούνταν από συνιστώσες στενής ζώνης, ήταν εύκολο να βρούμε τις συνέπειες σε κάθε σήμα  $x_i[n]$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ξεχωριστά. Αυτό συνέβη γιατί οι συναρτήσεις φασματικής απόκρισης (πλάτους, φάσης, καθυστέρηση ομάδας) ήταν ομαλές και μεταβάλλονται αργά γύρω από το μικρό εύρος συχνοτήτων που εμφανίζονταν οι συνιστώσες της εισόδου. Έτσι, όλες οι συχνότητες που σχετίζονται με ένα δεδομένο σήμα  $x_i[n]$  υπέστησαν περίπου την ίδια καθυστέρηση και το ίδιο κέρδος στο πλάτος τους, με αποτέλεσμα την αναπαραγωγή των συχνοτήτων στην έξοδο, σε διαφορετική θέση και με διαφορετικό πλάτος.

Για σήματα που δεν είναι στενής ζώνης, αλλά ευρείας ζώνης (wideband signals), το παραπάνω δε θα ήταν γενικά αληθές, γιατί διαφορετικά τμήματα του φάσματος θα τροποποιούνταν διαφορετικά από το σύστημα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα αναγνωρίσιμα χαρακτηριστικά της εισόδου, όπως το σχήμα του παλμού, δε θα είναι εμφανή στην έξοδο, και ξεχωριστές ομάδες συχνοτήτων στο χρόνο στην είσοδο μπορεί να καταλήξουν να είναι επικαλύψεις ομάδων συχνοτήτων στην έξοδο. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε αν στο παραπάνω παράδειγμα θέσουμε  $N = 40$ , δηλ. μικρύνουμε τη διάρκεια των επιμέρους παραθύρων στο χρόνο. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα το φάσμα πλάτους των επιμέρους σημάτων  $x_i[n]$  να έχει μεγαλύτερο εύρος λοβού γύρω από τις συχνότητες  $\omega = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ . Η υπόθεση του σήματος στενής ζώνης δεν ισχύει πια, με αποτέλεσμα οι συχνότητες που συνιστούν το σήμα  $x_3[n] = w[n - 7M] \sin(0.8\pi n)$  να καθυστερήσουν καθειμά κατά διαφορετικό πλήθος δειγμάτων από τις υπόλοιπες, με αποτέλεσμα το σήμα  $x_3[n]$  να έχει υποστεί διασπορά στην έξοδο του συστήματος! Τα παραπάνω παρουσιάζονται συνοπτικά στο Σχήμα 15.32. Παρατηρήστε στο Σχήμα 15.32(γ) πώς η καθυστέρηση



Σχήμα 15.32: (α) Σήμα εισόδου  $x[n]$ , (β) σήμα εξόδου  $y[n]$ , (γ) φάσμα πλάτους εισόδου και καθυστέρηση ομάδας, (δ) φάσμα πλάτους εξόδου.

ομάδας λαμβάνει διαφορετικές τιμές για σχεδόν όλες τις συχνότητες που συνιστούν το σήμα  $x_3[n]$  κι έτσι τις καθυστερεί κατά διαφορετικό πλήθος δειγμάτων (η κλίμακα της καθυστέρησης ομάδας έχει προσαρμοστεί κατάλληλα

για καλύτερη σύγκριση).