Κεφάλαιο 11

Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Ως τώρα, τα σήματα που μελετήσαμε ήταν ολα συνεχούς χρόνου. Σε αυτό το κεφάλαιο, ξεκινάμε τη μελέτη μας σχετικά με την επεξεργασία σημάτων διακριτού χρόνου αναπτύσσοντας πρώτα τις ιδέες του *σήματος διακριτού χρόνου* και του *συστήματος διακριτού χρόνου*. Θα επικεντρωθούμε σε προβλήματα που σχετίζονται με την αναπαράσταση σημάτων, πράξεις με σήματα, ιδιότητες σημάτων, ιδιότητες συστημάτων και ταξινόμηση αυτών, ακριβώς ανάλογα με όσα έχουμε ήδη συζητήσει για το συνεχή χρόνο.

Τα σήματα διακριτού χρόνου ουσιαστικά βρίσκονται ένα βήμα πριν τα *ψηφιακά σήματα*. Πολλές φορές η σχετική βιβλιογραφία τιτλοφορείται *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*, αντί *Επεξεργασία Σήματος Διακριτού Χρόνου*. Σίγουρα έχετε ακούσει για τα πλεονεκτήματα των ψηφιακών συστημάτων. Αυτά μπορούν να συνοψισθούν στα παρακάτω:

1. Τα ψηφιακά συστήματα έχουν μεγαλύτερη σταθερότητα, ενώ είναι πιο ευέλικτα (τα χαρακτηριστικά τους μπορούν εύκολα να αλλάξουν).

2. Μεγαλύτερη ποικιλία συστημάτων μπορούν να πραγματοποιηθούν στον ‘‘ψηφιακό’’ χώρο.

3. Τα ψηφιακά σήματα μπορούν να αποθηκευτούν εύκολα σε ένα αποθηκευτικό μέσο χωρίς αλλοίωση της ποιότητάς τους.

4. Για την επεξεργασία ψηφιακών σημάτων έχουν αναπτυχθεί πιο εξελιγμένοι αλγόριθμοι.

5. Τα ψηφιακά συστήματα μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, παρέχοντας χαμηλή κατανάλωση ισχύος.

Ελπίζοντας να σας πείσαμε για τη χρησιμότητά τους, ας προχωρήσουμε. ☺

11.1 Σήματα Διακριτού Χρόνου

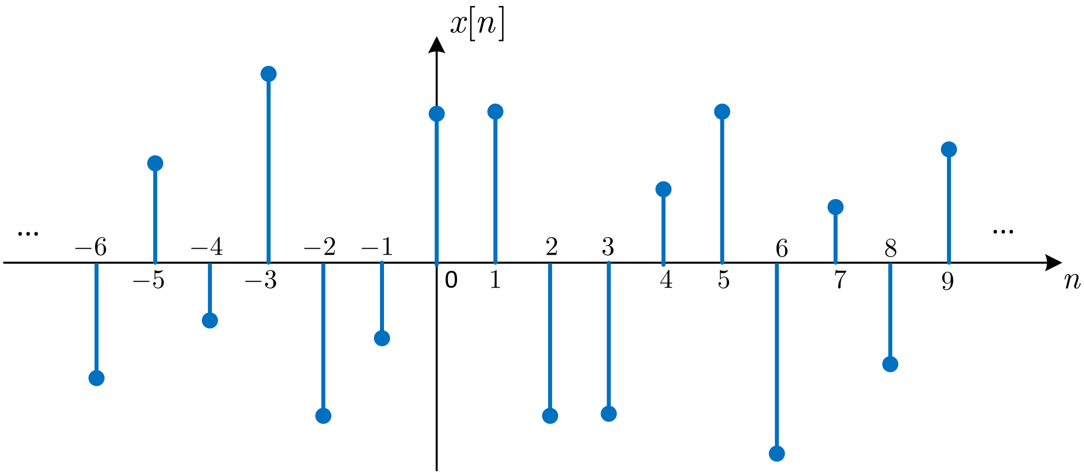
Ένα *σήμα διακριτού χρόνου* είναι μια διατεταγμένη ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών τιμών. Έτσι, ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι μια συνάρτηση της ακέραιας μεταβλητής n, που συμβολίζεται ως $x[n]$. Το σήμα διακριτού χρόνου δεν ορίζεται για μη ακέραιες τιμές του n. Έτσι, ένα πραγματικό σήμα $x[n]$ αναπαρίσταται γραφικά οπως στο Σχημα 11.1. Τα σήματα διακριτού χρόνου συχνά προέρχονται από δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου, όπως η φωνή. Για παράδειγμα, ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ δειγματοληπτείται με ρυθμό $f_s = \frac{1}{T_s}$ Hz, και παράγει ένα δειγματοληπτημένο σήμα $x[n]$, που σχετίζεται με το $x_a(t)$ ως

$$x[n] = x_a(nT_s), \ \ n \in \mathbb{Z} \tag{11.1}$$

Όμως, υπάρχουν και σήματα που δεν προήλθαν κατ΄ αυτόν τον τρόπο. Κάποια σήματα υφίστανται εξ΄ αρχής στο διακριτό χρόνο, όπως για παράδειγμα οι ημερίσιες τιμές των μετοχών, τα ετήσια στατιστικά πληθυσμών, το πλήθος των δρομολογίων ενός λεωφορείου ανά ημέρα, κλπ. Σε κάθε περίπτωση, θα καθιστούμε σαφές πότε ένα σήμα πρόερχεται από δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου και πότε υπάρχει εξ΄ αρχής στο διακριτό χρόνο - θα είναι εμφανές από τα συμφραζόμενα.

Εν γένει, ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορει να ειναι μιγαδικό, και μάλιστα υπάρχουν πολλές σημαντικές εφαρμογές, όπως οι ψηφιακές επικοινωνίες, όπου τα μιγαδικά σήματα έρχονται στο προσκήνιο πολύ εύκολα. Ένα μιγαδικό σήμα μπορει να εκφραστεί είτε ως άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους

$$z[n] = a[n] + jb[n] = \Re\{z[n]\} + j\Im\{z[n]\} \tag{11.2}$$



Σχήμα 11.1: *Σήμα Διακριτού Χρόνου*

είτε σε πολική μορφή, με όρους πλάτους και φάσης ως

$$z[n] = |z[n]|e^{j\angle z[n]} = |z[n]|e^{j\angle\{z[n]\}} \tag{11.3}$$

όπου $j = \sqrt{-1}$. Το πλάτος δίνεται από την έκφραση

$$|z[n]| = \sqrt{\Re^2\{z[n]\} + \Im^2\{z[n]\}} \tag{11.4}$$

ενώ η φάση από τη σχέση

$$\angle z[n] = \tan^{-1}\frac{\Im\{z[n]\}}{\Re\{z[n]\}} \tag{11.5}$$

η οποία εκφράζεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Αν η $z[n]$ είναι μιγαδική ακολουθία, η συζυγής της είναι η $z^*[n]$, και μπορει να υπολογιστεί απλά αλλάζοντας το πρόσημο του φανταστικού μέρους της $z[n]$:

$$z^*[n] = \Re\{z[n]\} - j\Im\{z[n]\} = |z[n]|e^{-j\angle\{z[n]\}} \tag{11.6}$$

Ασφαλώς, εμάς θα μας απασχολήσουν κυρίως πραγματικά σήματα στο πεδίο του διακριτού χρόνου, αλλά όπως και στο συνεχή χρόνο, θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά το μιγαδικό χώρο προς διευκόλυνσή μας όπου απαιτείται! ☺

11.1.1 Περιοδικά Σήματα

Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορει να είναι ειτε περιοδικό είτε απεριοδικό. Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν, για κάποιο θετικό ακέραιο N, ισχύει οτι

$$x[n] = x[n+N] \tag{11.7}$$

για κάθε n. Η *περιοδος*, που συμβολίζεται ως N, ειναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί τη Σχέση (11.7). Αν η σχέση αυτή δεν ικανοποιείται για κανένα ακέραιο N, το σήμα λέγεται απεριοδικό.

Αν $x_1[n]$ είναι ένα περιοδικό σημα με περίοδο N_1 και $x_2[n]$ ένα περιοδικό σήμα με περίοδο N_2, τότε το άθροισμα

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \tag{11.8}$$

θα είναι πάντα περιοδικό και η περιοδός του θα είναι η

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{Μ.Κ.}\Delta\{N_1, N_2\}} \tag{11.9}$$

όπου Μ.Κ.$\Delta\{N_1, N_2\}$ είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των N_1, N_2, αν αυτός υπάρχει. Εναλλακτικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

$$N = \text{Ε.Κ.Π}\{N_1, N_2\} \tag{11.10}$$

Όμοια ισχύει και για το γινόμενο, δηλ. το σημα

$$x[n] = x_1[n]x_2[n] \tag{11.11}$$

θα είναι περιοδικό με (πιθανή) περίοδο N που δίνεται από τη Σχέση (11.9), αν και η πραγματική (μικρότερη) περιοδος μπορεί να είναι μικρότερη.

Δεδομένης μιας πεπερασμένης διάρκειας ακολουθίας $x[n]$, ένα περιοδικό σήμα μπορει πάντα να δημιουργηθεί ''αντιγράφοντας '' το $x[n]$ ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-kN] \tag{11.12}$$

όπου N ένας θετικός ακέραιος. Σε αυτήν την περιπτωση, το $y[n]$ είναι περιοδικό με περιοδο N.

11.1.1.1 Ημίτονα Διακριτού Χρόνου

Θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με περιοδικά σήματα, οπότε είναι καλό να αναφέρουμε ότι υπάρχει μια ''ιδιαιτερότητα'' στα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου, που τα ξεχωρίζει από αυτά που έχουμε δει στο συνεχή χρόνο. Μια καλή αφορμή για να καταδείξουμε αυτές τις ''ιδιαιτερότητες '' αποτελούν τα γνωστά μας ημίτονα. Θυμάστε ότι στο συνεχή χρόνο, ένα ημίτονο συχνότητας $\omega_0 = 2\pi f_0/f_s$ είναι πάντα περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 1/f_0$. Στο διακριτό χρόνο όμως, ένα ημίτονο $\cos(\omega_0 n)$ είναι περιοδικό *μόνον αν* η περίοδός του, N, είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Ας κάνουμε πιο ξεκάθαρα τα πράγματα...

Αν ένα ημίτονο διακριτού χρόνου $\cos(\omega_0 n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N, τότε ικανοποιεί τη σχέση

$$\cos(\omega_0 n) = \cos(\omega_0(n+N)) = \cos(\omega_0 n + \omega_0 N) \tag{11.13}$$

Αυτό η σχέση ισχύει μόνον αν το $\omega_0 N$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή

$$\omega_0 N = 2\pi m,\ \ m \text{ ακέραιος αριθμός} \tag{11.14}$$

ή αλλιώς

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \tag{11.15}$$

Επειδή και το m και το N είναι θετικοί ακέραιοι, η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το ημίτονο που συζητάμε είναι περιοδικό μόνον αν ο αριθμός

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \tag{11.16}$$

είναι ρητός (δηλ. γράφεται ως πηλίκο δυο ακεραίων). Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να βρούμε την περίοδο από τη σχέση

$$N = m\frac{2\pi}{\omega_0},\ \ m \in \mathbb{Z} \tag{11.17}$$

αλλά πρέπει να διαλέξουμε το *μικρότερο* δυνατό θετικό m που θα κάνει τον αριθμό

$$m\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{11.18}$$

ακέραιο. Για παράδειγμα, αν

$$\omega_0 = \frac{4\pi}{13} \tag{11.19}$$

τότε ο μικρότερος δυνατός θετικός ακέραιος m που κάνει τον αριθμό

$$m\frac{2\pi}{\omega_0} = m\frac{13}{2} \tag{11.20}$$

ακέραιο είναι προφανώς $m = 2$. Για $m = 2$, η περίοδος είναι $N = 13$ δείγματα.

Η ίδια ακριβώς συζήτηση γίνεται για οποιοδήποτε πιθανώς περιοδικό σήμα, όπως για παράδειγμα το $e^{j\omega_0 n}$ που είδαμε νωρίτερα, αφού αποτελείται από ένα άθροισμα πιθανώς περιοδικών σημάτων συχνότητας ω_0, τα $\cos(\omega_0 n) + j\sin(\omega_0 n)$.

Παράδειγμα 11.1:

Βρείτε την περίοδο - αν υπάρχει - των παρακάτω σημάτων.

(α΄) $x[n] = e^{j(\pi n/6+\pi/3)}$

(β΄) $x[n] = e^{j3\pi n/4}$

(γ΄) $x[n] = e^{j\sqrt{2}\pi n/8}$

(δ΄) $x[n] = \dfrac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$

(ε΄) $x[n] = e^{-j\pi n/10} + e^{-jn/3}$

(ϛ΄) $x[n] = e^{j\pi n/2} + e^{-j\pi n/2}$

Λύση:

(α΄) Είναι

$$x[n] = e^{j(\pi n/6+\pi/3)}\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{\pi/6}k = 12k \xrightarrow{k=1} N_0 = 12 \tag{11.21}$$

(β΄) Είναι

$$x[n] = e^{j3\pi n/4}\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{3\pi/4}k = \frac{8}{3}k \xrightarrow{k=3} N_0 = 8 \tag{11.22}$$

(γ΄) Είναι

$$x[n] = e^{j\sqrt{2}\pi n/8}\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}k = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{2}\pi}{8}}k = \frac{16}{\sqrt{2}}k \tag{11.23}$$

Δεν υπάρχει $N_0 \in \mathbb{Z}$, άρα δεν είναι περιοδικό.

(δ΄) Είναι

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n} \tag{11.24}$$

Για το $\sin(\pi n/4), N_0 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8k \xrightarrow{k=1} N_0 = 8$. Όμως η συνάρτηση $y[n] = \frac{1}{\pi n}$ δεν είναι περιοδική, άρα το γινόμενο δεν είναι περιοδικό.

(ε΄) Είναι

$$x[n] = e^{-j\pi n/10} + e^{-jn/3}\ ,\ N_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}}k = 20k \xrightarrow{k=1} N_1 = 20 \text{ αλλά } N_2 = \frac{2\pi}{1/3}k = 6\pi k \tag{11.25}$$

Δεν υπάρχει $N_2 \in \mathbb{Z}$, άρα το άθροισμα δεν είναι περιοδικό.

(ϛ΄) Είναι

$$x[n] = e^{-j\pi n/2} + e^{j\pi n/2} = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\ ,\ N_0 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}k = 4k \xrightarrow{k=1} N_0 = 4 \tag{11.26}$$

■

11.1.1.2 Μιγαδικές Εκθετικές Συναρτήσεις Διακριτού Χρόνου

Πολύ δημοφιλείς στην ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου είναι οι περίφημες μιγαικές εκθετικές συναρτήσεις διακριτού χρόνου. Το μιγαδικό εκθετικό σήμα $x_d[n] = e^{j\omega_0 n}$ έχει επίσης μια ιδιαιτερότητα σε σχέση με το αντίστοιχο του συνεχούς χρόνου, $x_a(t) = e^{j\omega_0 t}$. Αυτή η ιδιαιτερότητα είναι ότι το $x_d[n]$ είναι *πάντα* περιοδικό στο *χώρο της συχνότητας* με περίοδο 2π, γιατί

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n} \tag{11.27}$$

αφού

$$e^{j2\pi n} = 1, \forall n \in Z \tag{11.28}$$

Αυτό σημαίνει ότι για να καταλάβουμε - αργότερα - πώς συμπεριφέρεται μια μιγαδική εκθετική συνάρτηση αυτής της μορφής στο χώρο της συχνότητας, αρκεί να την παρατηρήσουμε σε διάστημα μιας περιόδου 2π, αφού εκτός αυτής επαναλαμβάνεται. Συνήθως προτιμούμε το διάστημα $(-\pi, \pi]$. Φυσικά εξακολουθούν να ισχύουν οι σχέσεις του Euler και για τα μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου.[1] Αυτή η περιοδικότητα στο χώρο της συχνότητας μας λέει πρακτικά ότι οι συχνότητες ω_0 και $\omega_0 + 2\pi k$ είναι ουσιαστικά ίδιες - όχι φυσικά ως τιμές αλλά ως συχνότητες ταλάντωσης του σήματος διακριτού χρόνου. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με όσα γνωρίζετε από τη διαίσθησή σας και το συνεχή χρόνο, ότι δηλαδή όσο αυξάνουμε τη συχνότητα, τόσο πιο γρήγορα ταλαντώνεται ένα σήμα. Για παράδειγμα, το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \tag{11.32}$$

ταλαντώνεται όλο και πιο γρήγορα αν αυξάνουμε τη συχνότητα f_0. Για ένα ημίτονο διακριτού χρόνου

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n) \tag{11.33}$$

όσο αυξάνουμε τη συχνότητα ω_0 από το $\omega_0 = 0$ ως το $\omega_0 = \pi$, τότε πράγματι οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο γρήγορες. Όμως, όταν αυξήσουμε το ω_0 από $\omega_0 = \pi$ ως $\omega_0 = 2\pi$, τότε οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο αργές! Το ίδιο μοτίβο επαναλαμβάνεται και μετά το $\omega_0 = 2\pi$, ξεκινώντας από γρήγορες ταλαντώσες γύρω από το 2π, φτάνοντας σε πιο αργές γύρω από το 3π, και ξανά σε πιο γρήγορες γύρω από το $\omega_0 = 4\pi$.

Αντίστοιχα, στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, οι γρήγορες ταλαντώσεις γίνονται γύρω από τις συχνότητες $\omega_0 = \pm\pi$, ενώ οι πιο αργές (προφανώς) γύρω από τη συχνότητα $\omega_0 = 0$. Για ένα οπτικό παράδειγμα, δείτε το Σχήμα 11.2.

Εν γένει λοιπόν, οι συχνότητες γύρω από περιοχές κοντά στη συχνότητα $\omega_0 = 2\pi k$, για $k \in Z$, αναφέρονται ως *χαμηλές* συχνότητες, ενώ οι αντίστοιχες γύρω από περιοχές της μορφής $\omega_0 = \pi + 2\pi k$, για $k \in Z$, λέγονται *υψηλές* συχνότητες.

11.1.2 Συμμετρικές Ακολουθίες

Ένα σήμα διακριτού χρόνου συχνά έχει μερικές μορφές συμμετρίας που μπορούμε να εκμεταλλευτούμε. Δυο ειδών συμμετρίες μας είναι ενδιαφέρουσες.

Ένα πραγματικό σήμα λέγεται ότι είναι *άρτιο* αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = x[-n] \tag{11.34}$$

ενώ ένα σήμα λέγεται ότι είναι *περιττό* αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = -x[-n] \tag{11.35}$$

Κάθε σήμα $x[n]$ μπορει να γραφεί ως το άθροισμα του άρτιου μέρους του, $x_e[n]$, και του περιττού μέρους του, $x_o[n]$, ως

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \tag{11.36}$$

με

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n]) \tag{11.37}$$

και

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \tag{11.38}$$

Για μιγαδικά σήματα, οι συμμετρίες είναι ελαφρά διαφορετικές. Ένα μιγαδικό σημα λέγεται ότι είναι *συζυγές συμμετρικό* (ή αλλιώς *ερμητιανό*) αν, για κάθε n, ισχύει ότι

$$x[n] = x^*[-n] \tag{11.39}$$

και λέγεται *συζυγές αντισυμμετρικό* αν, για κάθε n, ισχύει

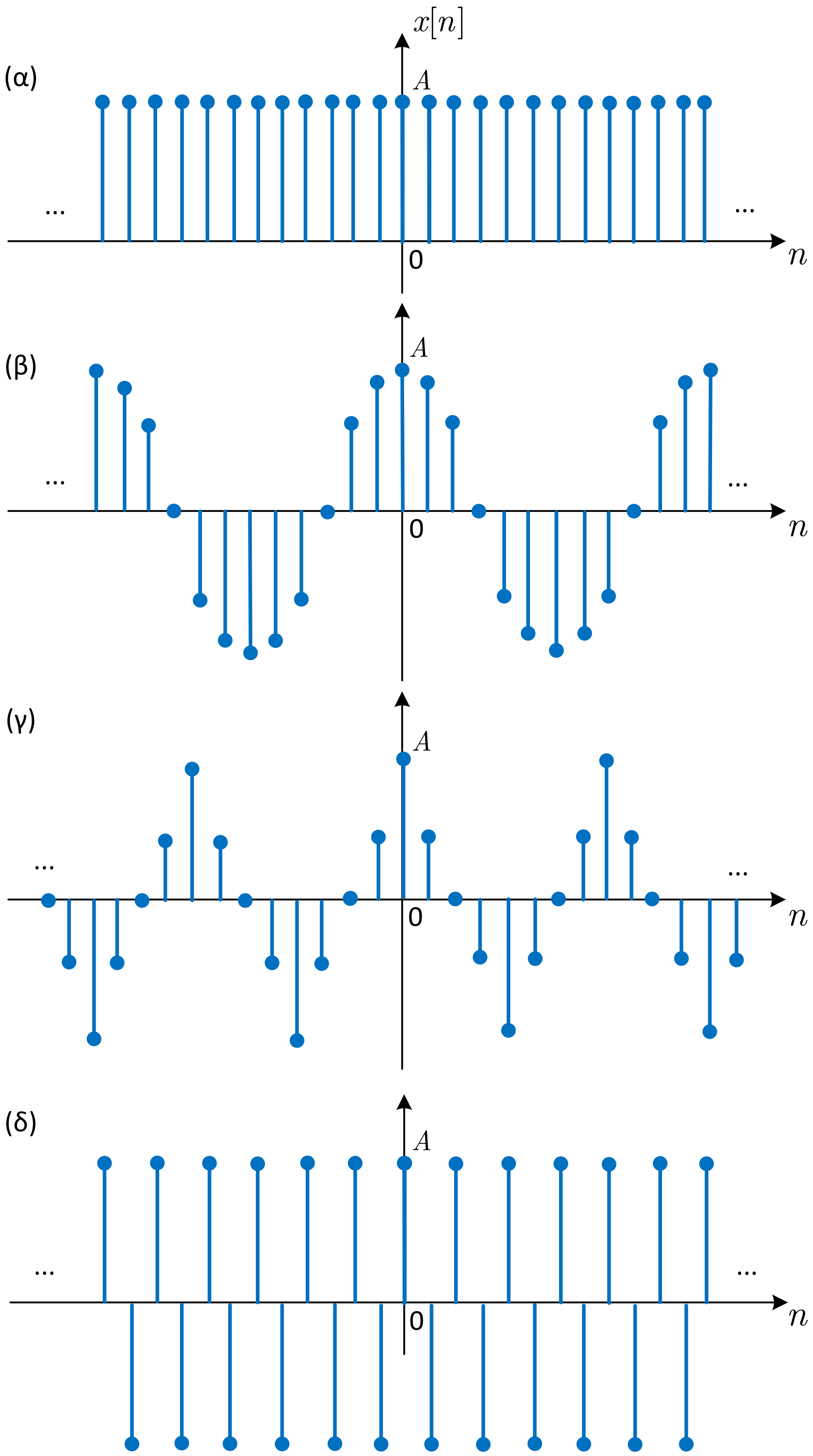
$$x[n] = -x^*[-n] \tag{11.40}$$

[1] Ντροπή, αλλά τις υπενθυμίζουμε :)

$$\cos(\theta n) = \frac{e^{j\theta n} + e^{-j\theta n}}{2} \tag{11.29}$$

$$\sin(\theta n) = \frac{e^{j\theta n} - e^{-j\theta n}}{2j} \tag{11.30}$$

$$\tag{11.31}$$



Σχήμα 11.2: *Το σήμα $A\cos(\omega_0 n)$ για διάφορες τιμές του ω_0: όσο το ω_0 αυξάνεται από το μηδέν προς το π (σχήματα (α) $\rightarrow$ (δ)), τόσο γρηγορότερα ταλαντώνεται το σήμα. Όσο το ω_0 αυξάνεται από το π προς το 2π (σχήματα (δ) $\rightarrow$ (α)), τόσο πιο αργές γίνονται οι ταλαντώσεις του.*

11.2 Μετασχηματισμοί Σημάτων

Συχνά, θέλουμε να τροποποιήσουμε τα σήματα μέσω του δείκτη τους, n. Δηλ. θέλουμε να κάνουμε ένα μετασχηματισμό της μορφής

$$y[n] = x[f[n]] \tag{11.41}$$

με $f[n]$ μια συνάρτηση του n. Οι πιο συχνοί μετασχηματισμοί περιλαμβάνουν την *ολίσθηση*, την *αντιστροφή*, και την *κλιμάκωση*[2]. Ας τις δούμε αναλυτικά.

11.2.1 Χρονική ολίσθηση

Η ολίσθηση οριζεται ως ο μετασχηματισμός της μορφής

$$f[n] = n - n_0 \tag{11.42}$$

με $n_0 \in \mathbb{Z}$. Αν $y[n] = x[n - n_0]$ με $n_0 > 0$, το σήμα $x[n]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά n_0 δείγματα (η πράξη αναφέρεται ως καθυστέρηση), ενώ μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά n_0 δειγματα, αν το $n_0 < 0$ (η πράξη αναφέρεται ως προήγηση-προπόρευση).

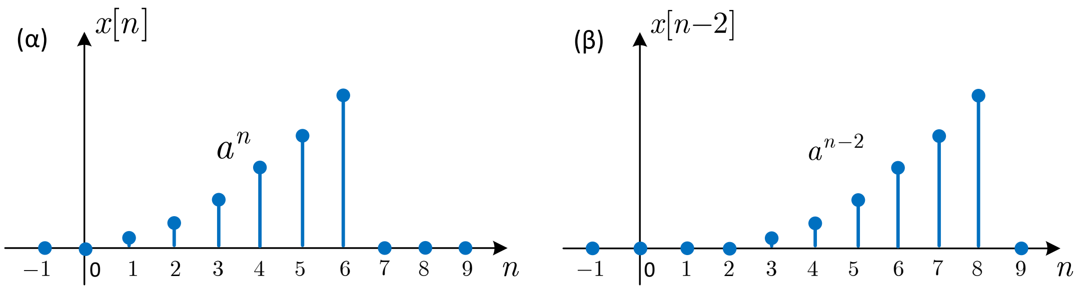
Παράδειγμα 11.2:

Έστω το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.43}$$

Περιγράψτε το σήμα που προκύπτει από την καθυστέρηση του σήματος κατά $n_0 = 2$ δείγματα.

Λύση:
Το δεδομένο σήμα καθώς και το καθυστερημένο κατά $n_0 = 2$ δείγματα φαίνονται στο Σχήμα 11.3. Το σήμα



Σχήμα 11.3: *(α) Σήμα $x[n]$, (β) Καθυστέρηση στο χρόνο κατά $n_0 = 2$ δείγματα.*

$x[n-2]$ ορίζεται ως

$$x[n-2] = \begin{cases} a^{n-2}, & 0 \leq n-2 \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} a^{n-2}, & 2 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.44}$$

■

11.2.2 Χρονική Αντιστροφή

Η αντιστροφή ορίζεται ως ο μετασχηματισμός

$$f[n] = -n \tag{11.45}$$

και απλά ειναι η ανάκλαση του σηματος ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

[2] Τις οποίες γνωρίζετε ήδη από το συνεχή χρόνο.

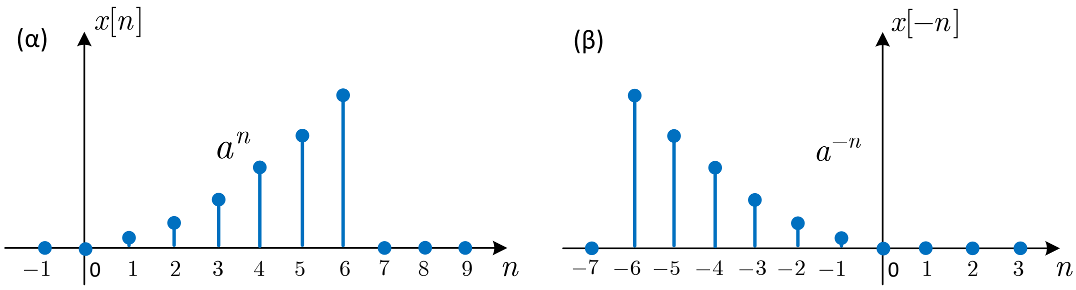
Παράδειγμα 11.3:

Έστω το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.46}$$

Περιγράψτε το σήμα που προκύπτει από την ανάκλασή του ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

Λύση:
Τα σήματα $x[n]$, $x[-n]$ φαίνονται στο Σχήμα 11.4. Το σήμα $x[-n]$ ορίζεται ως



Σχήμα 11.4: *(α) Σήμα $x[n]$, (β) Σήμα $x[-n]$.*

$$x[-n] = \begin{cases} a^{-n}, & 0 \leq -n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} a^{-n}, & -6 \leq n \leq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.47}$$

■

11.2.3 Κλιμάκωση στο χρόνο

Η κλιμάκωση στο χρόνο ορίζεται ως

$$f[n] = Mn \text{ ή } f[n] = n/N \tag{11.48}$$

όπου M, N είναι θετικοί ακέραιοι. Στην πρώτη περιπτωση, το σήμα $x[Mn]$ σχηματίζεται παίρνοντας κάθε M-οστο δείγμα από τη $x[n]$ (~~αυτή η πράξη λέγεται υποδειγματοληψία – *downsampling*~~). Με $f[n] = n/N$, το σήμα $y[n] = x[f[n]]$ ορίζεται ως

$$y[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{11.49}$$

(~~η πράξη αυτή ειναι γνωστη ως υπερδειγματοληψία – *upsampling*~~).

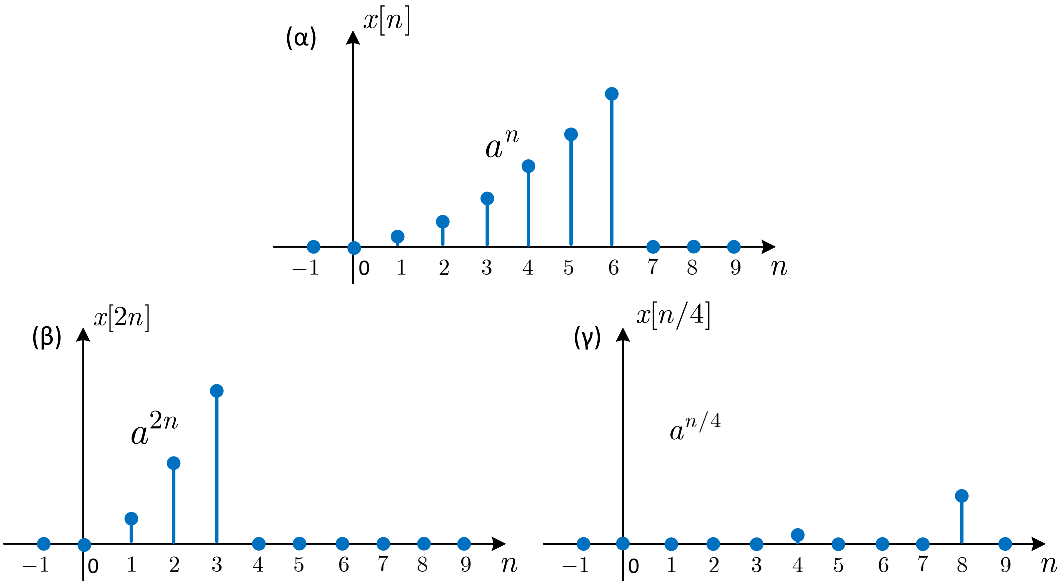
Παράδειγμα 11.4:

Έστω το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.50}$$

Περιγράψτε το σήμα που προκύπτει από την κλιμάκωσή του κατά $M = 2$ και $M = 1/4$.

Λύση:
Τα σήματα $x[n]$, $x[2n]$, και $x[n/4]$ φαίνονται στο Σχήμα 11.5. Το σήμα $x[2n]$ ορίζεται ως



Σχήμα 11.5: *(α) Σήμα $x[n]$, (β) Σήμα $x[2n]$, (γ) Σήμα $x[n/4]$.*

$$x[2n] = \begin{cases} a^{2n}, & 0 \leq 2n \leq 6 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} a^{2n}, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.51}$$

ενώ το σήμα $x[n/4]$ ορίζεται ως

$$x[n/4] = \begin{cases} a^{n/4}, & n = 0, \pm 4, \pm 8, \cdots \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.52}$$

■

Σημειώστε ότι οι παραπάνω πράξεις εξαρτώνται από τη σειρά που θα τις εφαρμόσετε. Για παράδειγμα, για το μετασχηματισμό $x[Mn - n_0]$, πρέπει πρώτα να μετατοπίσετε το σήμα $x[n]$ κατά n_0 δεξιά - και να λάβετε το $x[n - n_0]$ - και στη συνέχεια να κλιμακώσετε το σήμα $x[n - n_0]$ κατά M - και να λάβετε το $x[Mn - n_0]$.

11.3 Μερικά Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων

Αν και τα περισσότερα σήματα που συναντάμε στην πράξη ή στην καθημερινότητά μας μοιάζουν πολύπλοκες συναρτήσεις του χρόνου, υπάρχουν τρία απλά αλλά πολύ σημαντικά σήματα διακριτού χρόνου που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην περιγραφή και αναπαράσταση πιο περίπλοκων σημάτων.

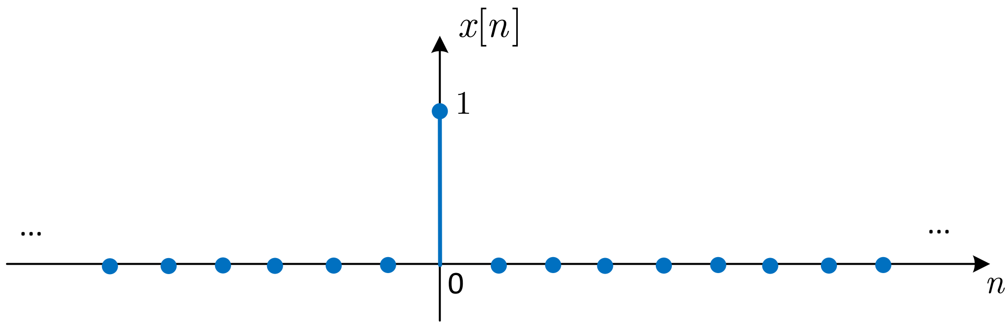
Αυτά τα σήματα είναι η διακριτή συνάρτηση Δέλτα, η διακριτή βηματική συνάρτηση, και η εκθετική συνάρτηση.

11.3.1 Η Συνάρτηση Δέλτα Διακριτού Χρόνου

Η διακριτή συνάρτηση Δέλτα, που συμβολίζεται με $\delta[n]$, ορίζεται ως

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{11.53}$$

και παιζει τον ίδιο ρολο στην επεξεργασία σήματος διακριτού χρόνου με τη συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$ που γνωρίζετε στο συνεχή χρόνο, με τη διαφορά ότι εδώ είναι σημαντικά πιο απλή στη χρήση και στον ορισμό της[3]. Η συνάρτηση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 11.6.



Σχήμα 11.6: *Η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου.*

11.3.2 Η Βηματική Συνάρτηση Διακριτού Χρόνου

Η διακριτή βηματική συνάρτηση, που συμβολίζεται με $u[n]$, ορίζεται ως

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{11.56}$$

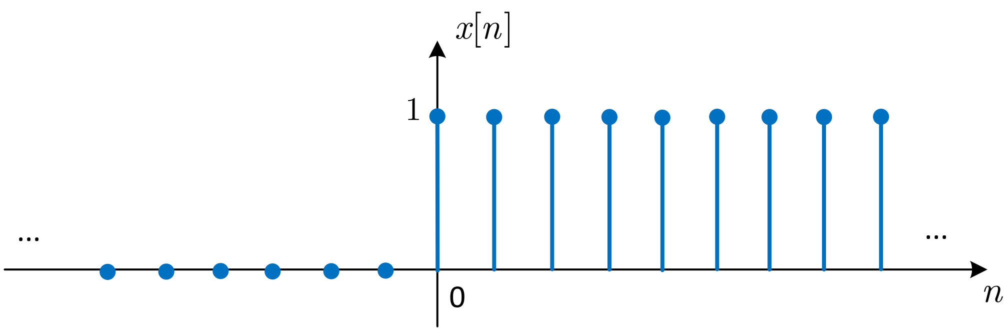
και σχετίζεται με τη διακριτή συνάρτηση Δέλτα ως

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \tag{11.57}$$

αλλά και ως

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \tag{11.58}$$

Η συνάρτηση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 11.7. Όμοια, η διακριτή συνάρτηση Δέλτα μπορει να γραφεί ως η διαφορά



Σχήμα 11.7: *Η βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου.*

δυο βηματικών που διαφέρουν κατά ένα δείγμα:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{11.59}$$

[3]Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση Δέλτα συνεχούς χρόνου, $\delta(t)$, είναι κατανομή - ή αλλιώς γενικευμένη συνάρτηση - και ορίζεται από τις εξής ιδιότητες:

$$\delta(t) = 0, \ t \neq 0, \tag{11.54}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{11.55}$$

Παρατηρήστε ότι οι παραπάνω σχέσεις είναι ανάλογες με αυτές που συναντήσαμε για τη βηματική συνάρτηση και συνάρτηση Δέλτα συνεχούς χρόνου.

11.3.3 Η Εκθετική Συνάρτηση

Τέλος, η εκθετική συνάρτηση ορίζεται ως

$$x[n] = a^n \tag{11.60}$$

όπου a ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Γενικότερα, μας ενδιαφέρουν εκθετικά του τύπου

$$x[n] = Aa^n \tag{11.61}$$

με A, a μιγαδικά (εν γένει). Τότε, αναλύοντας τα A, a σε πολική μορφή, θα έχουμε

$$A = |A|e^{j\phi_A} \tag{11.62}$$

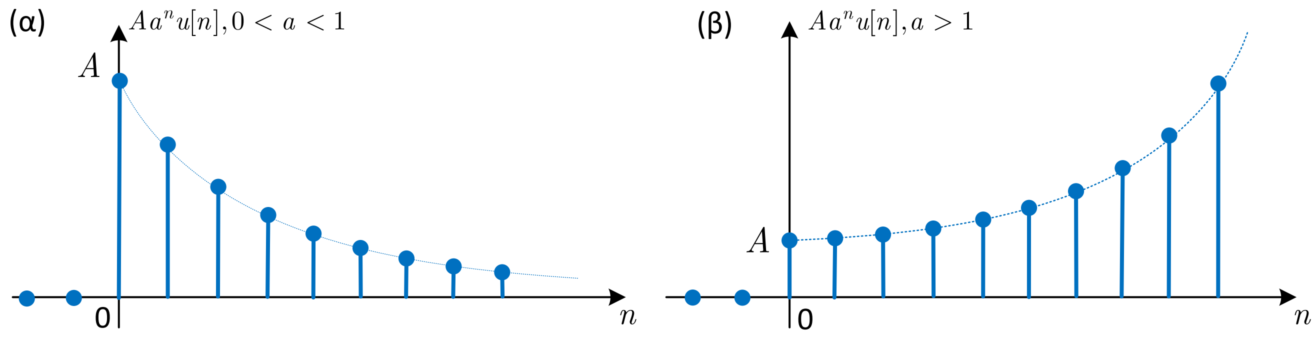
και

$$a^n = |a|^n e^{j\phi_a n} \tag{11.63}$$

έχουμε

$$x[n] = Aa^n = |A|e^{j\phi_A}|a|^n e^{j\phi_a n} = |A||a|^n e^{j(\phi_A+\phi_a)} \tag{11.64}$$

Στο Σχήμα 11.8 φαίνονται δυο πραγματικά εκθετικά σήματα για $0 < a < 1$ και $a > 1$, αντίστοιχα. Επίσης,

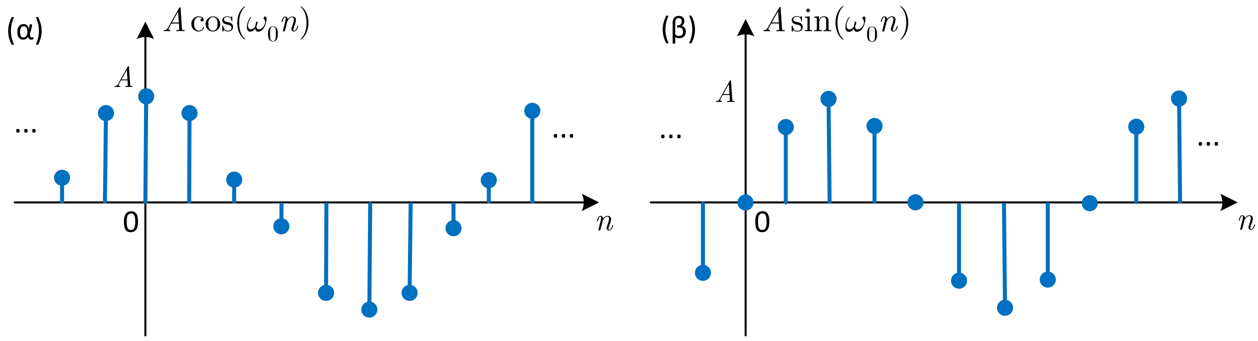


Σχήμα 11.8: *Εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου για (α) $0 < a < 1$ και (β) $a > 1$.*

ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι τα μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0) \tag{11.65}$$

με ω_0 πραγματικό αριθμό εκφρασμένο σε radians-ακτίνια, ο οποίος δεν είναι άλλος από τη συχνότητα του σήματος. Σχηματικά, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος φαίνονται στο Σχήμα 11.9. Όπως θα δούμε σύντομα, οι



Σχήμα 11.9: *(α) Πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου $e^{j\omega_0 n}$.*

μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι πολύ χρήσιμες στην ανάλυση Fourier των σημάτων διακριτού χρόνου – όσο χρήσιμα ήταν τα αντίστοιχα συνεχή μιγαδικά εκθετικά στην ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου ☺. Αν συνδυάσουμε τη Σχέση (11.65) και τη Σχέση (11.64) για πραγματικό a, θα έχουμε

$$x[n] = Aa^n e^{j\omega_0 n} = |A|a^n e^{j(\omega_0 n+\phi_A)} = |A|a^n\cos(\omega_0 n+\phi_A) + j|A|a^n\sin(\omega_0 n+\phi_A) \tag{11.66}$$

Αυτή η ακολουθία ταλαντώνεται με αυξανόμενο πλάτος αν $|a| > 1$, ή με φθίνον πλάτος αν $|a| < 1$. Για $|a| = 1$, το σήμα αποτελείται από απλά ημίτονα και συνημίτονα σταθερού πλάτους.

Ακριβώς ανάλογα λοιπόν με το συνεχή χρόνο, ορίζουμε την ποσότητα ω_0 ως τη *συχνότητα* του σήματος, και την ποσότητα ϕ_A ως *φάση* του σήματος.

11.4 Ανάλυση Σήματος

Η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου $\delta[n]$ μπορει να χρησιμοποιηθεί για να αναλύσει ένα σήμα σε ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα με κατάλληλα βαρη και μετατοπίσεις ως

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{11.67}$$

όπου κάθε όρος του αθροίσματος, $x[k]\delta[n-k]$, είναι μια συνάρτηση Δέλτα που έχει πλάτος $x[k]$ τη χρονική στιγμή $n = k$ και ειναι μηδέν όλες τις άλλες χρονικές στιγμές.

Παράδειγμα 11.5:

Εκφράστε το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.68}$$

ώς ένα άρθοισμα κατάλληλα μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα.

Λύση:
Θα πούμε ότι

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] \tag{11.69}$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε περαιτέρω αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{11.70}$$

έχουμε

$$x[n] = u[n] - u[n-1] + 2(u[n-1] - u[n-2]) + 3(u[n-2] - u[n-3]) \tag{11.71}$$

που δίνει

$$x[n] = u[n] + u[n-1] + u[n-2] - 3u[n-3] \tag{11.72}$$

■

Βλέπετε ότι παρόλο που το σήμα είναι ένα άθροισμα βηματικών (δηλ. άπειρων σε διάρκεια) συναρτήσεων, είναι τελικά πεπερασμένης διάρκειας.

11.5 Ενέργεια και Ισχύς Σήματος Διακριτού Χρόνου

Ακολουθώντας παρόμοιο σκεπτικό όπως στο συνεχή χρόνο, η *ενέργεια* ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \tag{11.73}$$

Για να έχει νόημα αυτή η μετρική θα πρέπει, όπως φαντάζεστε, να δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα (να μην απειρίζεται δηλαδή). Μια αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι ότι το πλάτος του σήματος πρέπει να φθίνει στο μηδέν όσο $n \to \pm\infty$. Φυσικά, οποιοδήποτε σήμα πεπερασμένης διάρκειας είναι σήμα ενέργειας (ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη). Ένα σήμα που η ενέργειά του είναι πεπερασμένη ($0 < E < +\infty$) λέγεται *σήμα ενέργειας*.

Σε περιπτώσεις όπου το πλάτος του σήματος δε φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$, χρειαζόμαστε μια εναλλακτική μετρική, καθώς η ενέργεια θα απειρίζεται. Αυτή δεν είναι άλλη από την *ισχύ* του σήματος, που ορίζεται ως

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \tag{11.74}$$

Αν η P_x είναι πεπερασμένη (και μη μηδενική), τότε το σήμα λέγεται *σήμα ισχύος*. Όπως και στο συνεχή χρόνο, ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να είναι είτε σήμα ενέργειας είτε σήμα ισχύος, αλλά όχι και τα δυο ταυτόχρονα. Επίσης, μπορεί να μην είναι ούτε ενέργειας ούτε ισχύος (όπως π.χ. το $x[n] = 2^n u[n]$ ή το $x[n] = n$).

Σήματα Ενέργειας και Ισχύος

- Σήμα ενέργειας:
  - Το πλάτος και η διάρκεια του σήματος είναι πεπερασμένα.
  - Αν το πλάτος είναι πεπερασμένο αλλά όχι και η διάρκεια, τότε αναγκαία συνθήκη είναι η $x[n] \to 0$ όταν $|n| \to \infty$. Η συνθήκη αυτή όμως δεν είναι και ικανή.[α΄]
- Σήμα ισχύος:
  - Εμφανίζει περιοδικότητα με περίοδο N_0 και *απολύτως φραγμένο* πλάτος, δηλ.

$$|x[n]| < M_x, \quad \forall n \text{ και } M_x \in \Re \tag{11.76}$$

  - Δεν εμφανίζει περιοδικότητα, αλλά η διάρκεια του σήματος είναι άπειρη με το πλάτος του να είναι *απολύτως φραγμένο*.

[α΄] Δείτε ότι παρ᾽ όλο που το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{n}}, & n \geq 1 \end{cases} \tag{11.75}$$

φθίνει στο μηδέν όταν $|n| \to \infty$, η ενέργειά του είναι άπειρη, καθώς αποτελεί μια αρμονική σειρά, η οποία γνωρίζουμε ότι αποκλίνει!

Αν δεν ισχύει τίποτε από τα παραπάνω, το σήμα δεν είναι ούτε ενέργειας ούτε ισχύος.

Στον υπολογισμό τέτοιων αθροισμάτων μας - αλλά και γενικότερα - είναι πολύ χρήσιμες οι σχέσεις του Πίνακα 1.5 του Κεφαλαίου 1. Ας δούμε ένα παράδειγμα υπολογισμού.

Παράδειγμα 11.6:

Έστω το σήμα

$$x[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n] \tag{11.77}$$

(α΄) Υπολογίστε το άθροισμα

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \tag{11.78}$$

(β΄) Υπολογίστε την ενέργεια του $x[n]$,

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] \tag{11.79}$$

Λύση:

(α΄) Θα είναι

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n] = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^n \tag{11.80}$$

Με αλλαγή μεταβλητής, $k \leftarrow (-n)$, έχουμε

$$A = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \tag{11.81}$$

και με χρήση του Πίνακα 1.5, έχουμε

$$A = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 \tag{11.82}$$

(β΄) Είναι

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} u^2[-n] = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} \tag{11.83}$$

Ξανά με αλλαγή μεταβλητής, $k \leftarrow -n$, έχουμε

$$E = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k} = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \tag{11.84}$$

ξανά με χρήση του Πίνακα 1.5.

■

Παράδειγμα 11.7:

Έστω το σήμα

$$x[n] = u[n] \tag{11.85}$$

Υπολογίστε την ισχύ του $x[n]$,

$$P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] \tag{11.86}$$

Λύση:
Είναι

$$P = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} x^2[n] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} u^2[n] \tag{11.87}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} u[n] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 \tag{11.88}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} (N-0+1) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{2N+1} \tag{11.89}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{N}}{N\left(2+\frac{1}{N}\right)} = \frac{1}{2} \tag{11.90}$$

■

11.6 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Όπως είδαμε και στο συνεχή χρόνο, ένα συστημα διακριτού χρόνου είναι, θεωρητικά, ένας μαθηματικός τελεστης ή μια αντιστοίχιση που μετασχηματίζει ένα σήμα (την είσοδο) σε ένα άλλο σήμα (την έξοδο), μέσω ενός καθορισμένου συνόλου από πράξεις. Η σημειογραφεία $T\{\cdot\}$ χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει εν γένει ένα σύστημα. Οι ιδιότητες εισόδου-εξόδου ενός συστήματος μπορούν να καθοριστούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί, για παράδειγμα, να εκφραστει ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.91}$$

ή

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] \tag{11.92}$$

Είναι επίσης δυνατόν να περιγραφει ένα σύστημα με αλγοριθμικούς όρους, που αποτελείται από εντολές ή πράξεις που εφαρμόζονται σε ενα σήμα εισόδου, όπως οι

$$y_1[n] = \frac{1}{2}y_1[n-1] + \frac{1}{4}x[n] \tag{11.93}$$

$$y_2[n] = \frac{1}{4}y_2[n-1] + \frac{1}{2}x[n] \tag{11.94}$$

$$y_3[n] = \frac{4}{10}y_3[n-1] + \frac{1}{2}x[n] \tag{11.95}$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] + y_3[n] \tag{11.96}$$

Θα μπορούσε εδώ κάποιος να αναρωτηθεί αν τα συστήματα διακριτού χρόνου ορίζονται κατ΄ ευθείαν στο διακριτό χρόνο ή μπορούν να προέλθουν από κάποιου είδους ‘‘δειγματοληψία’’ συστημάτων συνεχούς χρόνου - τα τελευταία περιγράφονται, όπως γνωρίζετε ήδη, από *διαφορικές* εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Αυτή είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα και χρήσιμη διαισθητικά ερώτηση, αξίζει λοιπόν μιας σύντομης απάντησης.

11.6.1 Σχέση Συστημάτων Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

Είναι προφανές ότι κάποια φυσικά συστήματα ορίζονται απ΄ ευθείας στο διακριτό χρόνο. Ένα πολύ δημοφιλές παράδειγμα είναι ο τραπεζικός λογαριασμός σας: έστω ότι κάθε μήνα n καταθέτετε $x[n]$ χρήματα σε αυτόν. Αν η τράπεζα σας δίνει μηνιαίως 1% τόκο στις τρέχουσες καταθέσεις σας, τότε στο τέλος κάθε μήνα θα έχετε $y[n]$ χρήματα στο λογαριασμό σας. Το σύστημα αυτό περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = \Big(1 + \frac{1}{100}\Big)y[n-1] + x[n] \tag{11.97}$$

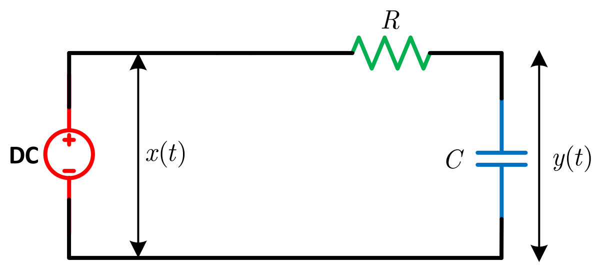
Ένα άλλο παράδειγμα είναι η περίφημη ακολουθία Fibonacci, της οποίας κάθε στοιχείο F_n, με $n > 2$, αποτελείται από το άθροισμα των προηγούμενων δυο στοιχείων της. Η ακολουθία αυτή έχει συνήθως τη μορφή

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ \text{με}\ F_0 = 1,\ F_1 = 1 \tag{11.98}$$

Η ακολουθία μπορεί να γραφεί και ως σύστημα διακριτού χρόνου ως

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2], \ \text{με}\ y[0] = 1,\ y[1] = 1 \tag{11.99}$$

Τι συμβαίνει όμως με τα συστήματα συνεχούς χρόνου; Θα μπορούσαμε να τα μετατρέψουμε σε διακριτού χρόνου ώστε να τα χρησιμοποιήσουμε για αριθμητικούς υπολογισμούς, δηλ. για να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που τα περιγράφουν με αριθμητικές μεθόδους; Η απάντηση είναι θετική, και υπάρχουν πολλοί τρόποι για να γίνει κάτι τέτοιο. Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα του κυκλώματος RC που συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 3 και που επαναλαμβάνουμε για ευκολία στο Σχήμα 11.10. Είδαμε στο σχετικό κεφάλαιο ότι το παραπάνω κύκλωμα



Σχήμα 11.10: *Κύκλωμα RC.*

περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{11.100}$$

Αν θέλαμε να λύσουμε αυτήν την εξίσωση αριθμητικά, με χρήση ενός υπολογιστή[4], θα έπρεπε με κάποιο τρόπο να τη διακριτοποιήσουμε, μια και ένας υπολογιστής έχει πεπερασμένο αποθηκευτικό χώρο. Μια πολύ απλή (και ως εκ τούτου, με αρκετό σφάλμα) διακριτοποίηση θα ήταν η ακόλουθη: υποθέτουμε ότι κάθε χρονική στιγμή t απέχει από την επόμενή της ένα σταθερό χρονικό διάστημα T. Τότε η παράγωγός ενός σήματος $y(t)$ θα μπορούσε να

[4] Αν και στην πραγματικότητα είναι πολύ απλή και γνωρίζετε τη λύση της...

προσεγγιστεί ως

$$\frac{d}{dt}y(t) \approx \frac{y(t) - y(t-T)}{T} \tag{11.101}$$

και τότε η διαφορική εξίσωση της Σχέσης (11.100) γράφεται ως

$$\frac{y(t) - y(t-T)}{T} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{11.102}$$

Εφόσον έχουμε διακριτές χρονικές στιγμές $t = nT$, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{y(t) - y(t-T)}{T} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \tag{11.103}$$

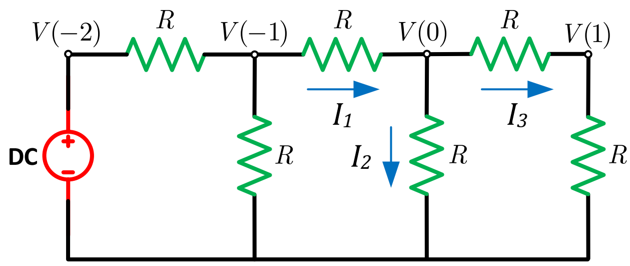
$$\frac{y(nT) - y(nT-T)}{T} + \frac{1}{RC}y(nT) = \frac{1}{RC}x(nT) \tag{11.104}$$

$$\frac{y[n] - y[n-1]}{T} + \frac{1}{RC}y[n] = \frac{1}{RC}x[n] \tag{11.105}$$

$$y[n] = \frac{1}{1+\frac{T}{RC}}\Big(y[n-1] + \frac{T}{RC}x[n]\Big) \tag{11.106}$$

και η τελευταία σχέση από τις παραπάνω αποτελεί το σύστημα διακριτού χρόνου που προσεγγίζει το σύστημα συνεχούς χρόνου της Σχέσης (11.100). Φυσικά η ακρίβεια της προσέγγισής μας εξαρτάται από το πόσο μικρό είναι το διάστημα T.

Ίσως το παραπάνω παράδειγμα να οδηγεί τον αναγνώστη στην πεποίθηση ότι η περιγραφή ηλεκτρικών κυκλωμάτων περνά υποχρεωτικά μέσα από το πεδίο του συνεχούς χρόνου. Αυτό όμως δεν είναι απαραίτητα αληθές. Δείτε το Σχήμα 11.11. Το κύκλωμα αντιστατών του Σχήματος (11.11) έχει τέσσερις ενδιαφέροντες κόμβους



Σχήμα 11.11: *Κύκλωμα R.*

σημειωμένους με $V(n)$, όπου $V(i)$, $-2 \leq i \leq 1$ η τάση στον $i-$οστό κόμβο. Ας επικεντρωθούμε στον κόμβο με τάση $V(0)$. Καταλαβαίνετε ότι το φορτίο που υπάρχει σε ένα κύκλωμα δεν μεταβάλλεται σε ποσότητα - απλά μετακινείται στο κύκλωμα. Άρα το ρεύμα I που εισέρχεται σε έναν κόμβο πρέπει να ισούται με το ρεύμα που εξέρχεται από αυτόν. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται *Αρχή Διατήρησης του Φορτίου* και αποτελεί τον περίφημο *Πρώτο Κανόνα του Kirchhoff* στη μελέτη κυκλωμάτων. Εφαρμόζοντας αυτόν τον κανόνα στον κόμβο $i = 0$, έχουμε

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{11.107}$$

Γνωρίζουμε ότι το ρεύμα που διαρρέει έναν αντιστάτη ισούται με $I = \Delta V/R$, με ΔV την τάση στα άκρα του αντιστάτη και R την αντίσταση του αντιστάτη. Οπότε

$$\frac{\Delta V_1}{R} = \frac{\Delta V_2}{R} + \frac{\Delta V_3}{R} \tag{11.108}$$

$$\frac{V(-1) - V(0)}{R} = \frac{V(0) - V_r}{R} + \frac{V(0) - V(1)}{R} \tag{11.109}$$

$$V(-1) - V(0) = V(0) - V_r + V(0) - V(1) \tag{11.110}$$

$$V(1) = 3V(0) - V(-1) - V_r \tag{11.111}$$

Υποθέτοντας $V_r = 0$, έχουμε

$$V(1) = 3V(0) - V(-1) \tag{11.112}$$

και αν γενικεύσουμε για τον $n-$οστό κόμβο, τότε

$$V[n] = 3V[n-1] - V[n-2] \tag{11.113}$$

η οποία είναι μια εξίσωση διαφορών που περιγράφει το κύκλωμα του Σχήματος 11.11 με όρους τάσεων στους κόμβους του.

11.6.2 Κατηγορίες Συστημάτων

Τα συστηματα διακριτού χρονου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με ιδιότητες που έχουν, όπως ακριβώς αυτά του συνεχούς χρόνου. Οι πιο συνήθεις ιδιότητες που μας ενδιαφερουν είναι η *δυναμικότητα*, η *γραμμικότητα*, η η *χρονική αμεταβλητικότητα*, η *αιτιατότητα*, και η *ευστάθεια*. Αυτές οι ιδιότητες, μαζι με μερικές ακόμα, περιγράφονται παρακάτω, μαζί με χαρακτηριστικά παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα.

11.6.2.1 Δυναμικά και Στατικά Συστήματα

Η πρώτη κατηγορία αφορά το αν ένα σύστημα είναι δυναμικό ή στατικό, δηλ. αν απαιτεί ή όχι μνήμη για τον υπολογισμό της εξόδου. Ένα σύστημα λέμε οτι είναι *χωρίς μνήμη* ή *στατικό* αν η έξοδος σε μια χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από την είσοδο τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι στατικό αν, για κάθε n_0, μπορούμε να βρούμε την τιμή $y[n_0]$ δεδομένης μόνο της τιμής $x[n_0]$.

Παράδειγμα 11.8:

Ελέγξτε αν τα συστήματα

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.114}$$
$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{11.115}$$

είναι δυναμικά ή στατικά.

Λύση:
Το σύστημα

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.116}$$

ειναι στατικό γιατι για μια τυχαία χρονική στιγμή $n = n_0$, η έξοδος $y[n_0]$ εξαρτάται μόνο από την τιμή $x[n_0]$. Αντίθετα, το σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{11.117}$$

είναι δυναμικό, γιατι για τον υπολογισμό της τιμής εξόδου $y[n_0]$ χρειαζόμαστε και την τιμή εισόδου $x[n_0 - 1]$, εκτος απ΄ την $x[n_0]$.

■

11.6.2.2 Αθροιστικό Σύστημα

Ένα σύστημα λέγεται *αθροιστικό* αν ισχύει

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} \tag{11.118}$$

για οποιαδήποτε σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$.

11.6.2.3 Ομογενές Σύστημα

Ένα σύστημα λέμε ότι είναι *ομογενές* αν η κλιμάκωση της εισόδου με μια σταθερά έχει ως αποτέλεσμα την κλιμάκωση της εξόδου με την ίδια σταθερά. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι αν

$$T\{cx[n]\} = cT\{x[n]\} \tag{11.119}$$

για οποιαδήποτε μιγαδική σταθερά c για κάθε σήμα εισόδου $x[n]$.

Παράδειγμα 11.9:

Ελέγξτε την αθροιστικότητα και την ομογένεια του συστήματος που ορίζεται ως

$$y[n] = \frac{x^2[n]}{x[n-1]} \tag{11.120}$$

Λύση:
Το σύστημα δεν είναι αθροιστικό γιατί

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = \frac{(x_1[n] + x_2[n])^2}{x_1[n-1] + x_2[n-1]} \tag{11.121}$$

που δεν είναι το ίδιο με το

$$T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = \frac{x_1^2[n]}{x_1[n-1]} + \frac{x_2^2[n]}{x_2[n-1]} \tag{11.122}$$

Το σύστημα, όμως, είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $cx[n]$, η έξοδος

$$T\{cx[n]\} = \frac{(cx[n])^2}{cx[n-1]} = c\frac{x^2[n]}{x[n-1]} = cT\{x[n]\} \tag{11.123}$$

Από την άλλη μεριά, το σύστημα που ορίζεται από τη σχέση

$$y[n] = x[n] + x^*[n-1] \tag{11.124}$$

είναι αθροιστικό (δείξτε το! :-)) αλλά δεν είναι ομογενές, γιατι

$$T\{cx[n]\} = cx[n] + c^*x^*[n-1] \neq cT\{x[n]\} = cx[n] + cx^*[n-1] \tag{11.125}$$

■

11.6.2.4 Γραμμικά και μη-γραμμικά Συστήματα

Ένα συστημα λέγεται *γραμμικό* αν είναι αθροιστικό και ομογενές. Δηλ. ένα σύστημα είναι γραμμικό αν

$$T\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\} \tag{11.126}$$

για δυο εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ και για δυο οποιεσδηποτε σταθερές a_1, a_2.

Παράδειγμα 11.10:

Το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n] \tag{11.127}$$

είναι γραμμικό. Δείξτε το.

Λύση:
Για είσοδο $ax_1[n]$, η έξοδος θα είναι

$$2a_1x_1[n-1] + a_1x_1[n] = a_1y_1[n] \tag{11.128}$$

Για είσοδο $a_2x_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$2a_2x_2[n-1] + a_2x_2[n] = a_2y_2[n] \tag{11.129}$$

Τέλος, για είσοδο

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \tag{11.130}$$

η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned}
y[n] &= 2(a_1x_1[n-1] + a_2x_2[n-1]) + (a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) && (11.131)\\
&= 2a_1x_1[n-1] + 2a_2x_2[n-1] + a_1x_1[n] + a_2x_2[n] && (11.132)\\
&= 2a_1x_1[n-1] + a_1x_1[n] + 2a_2x_2[n-1] + a_2x_2[n] && (11.133)\\
&= a_1(2x_1[n-1] + x_1[n-1]) + a_2(2x_2[n-1] + x_2[n]) && (11.134)\\
&= a_1T\{x_1[n]\} + a_2T\{x_2[n]\} = a_1y_1[n] + a_2y_2[n] && (11.135)
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 11.11:

Δείξτε ότι τα συστήματα

(α΄) $y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$

(β΄) $y[n] = x^2[n-2]$

(γ΄) $y[n] = \frac{1}{x[n]}, \quad x[n] \neq 0, \forall n$

είναι μη γραμμικά.

Λύση:
Εξασκηθείτε! ☺

■

Η γραμμικότητα απλοποιεί πάρα πολύ την απόκριση ενός συστηματος σε μια δεδομένη είσοδο. Για παράδειγμα, η εξοδος ενός συστηματος για είσοδο όπως η Σχέση (11.67), είναι

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} \tag{11.136}$$

Επειδή οι τιμές $x[k]$ είναι αριθμοί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της ομογένειας και να έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x[k]\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} \tag{11.137}$$

Αν ορίσουμε ότι $h_k[n]$ την απόκριση του συστήματος σε μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $n = k$, δηλ.

$$h_k[n] = T\{\delta[n-k]\} \tag{11.138}$$

και άρα θα έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \tag{11.139}$$

το οποίο και είναι γνωστο ως *υπέρθεση*.

Μεγάλης σημασίας έχουν - όπως θα δούμε στη συνέχεια - τα συστήματα της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{11.140}$$

με a_k, b_l, σταθερούς συντελεστές. Τέτοια συστήματα είναι γραμμικά. Είναι σημαντικό να το δείξουμε.

Παράδειγμα 11.12:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \tag{11.141}$$

με a_k, b_l, σταθερούς συντελεστές είναι γραμμικό.

Λύση:
Όταν η είσοδος είναι της μορφής $x_1[n]$, τότε η έξοδος γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_1[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_k x_1[n-k] \tag{11.142}$$

Όταν η είσοδος είναι της μορφής $x_2[n]$, τότε η έξοδος γίνεται

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_2[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x_2[n-l] \tag{11.143}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω σχέσεις με α και β αντίστοιχα, έχουμε

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha y_1[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l \alpha x_1[n-l] \tag{11.144}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \beta y_2[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l \beta x_2[n-l] \tag{11.145}$$

Το άθροισμά τους δίνει

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \alpha y_1[n-k] + \sum_{k=0}^{N} a_k \beta y_2[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l \alpha x_1[n-l] + \sum_{l=0}^{M} b_l \beta x_2[n-l] \tag{11.146}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (\alpha y_1[n-k] + \beta y_2[n-k]) = \sum_{l=0}^{M} b_l (\alpha x_1[n-l] + \beta x_2[n-l]) \tag{11.147}$$

Όμως η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από τη Σχέση (11.141) με

$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \tag{11.148}$$

$$y[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n] \tag{11.149}$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

■

11.6.2.5 Χρονικά Αμετάβλητα και Χρονικά Μεταβλητά Συστήματα

Ένα σύστημα λέμε οτι ειναι *χρονικά αμετάβλητο* αν μια καθυστέρηση στην είσοδο κατά n_0 δείγματα έχει ως αποτέλεσμα την καθυστέρηση της εξόδου κατά n_0 δείγματα. Πιο “μαθηματικά” ☺, έστω $y[n]$ η έξοδος ενός συστήματος για μια εισοδο $x[n]$. Το σύστημα λέμε ότι είναι χρονικά αμετάβλητο αν για κάθε καθυστέρηση της εισόδου n_0, η απόκριση στην είσοδο $x[n-n_0]$ ειναι η $y[n-n_0]$.

Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα ειναι χρονικά αμετάβλητο, πρέπει να συγκρινουμε τα σήματα $y[n-n_0]$ και $T\{x[n-n_0]\}$. Αν είναι ίδια, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Παράδειγμα 11.13:

Το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{11.150}$$

και λέγεται *αθροιστής*, είναι χρονικά αμετάβλητο. Ας το δείξουμε.

Λύση:
Έστω η είσοδος $x_1[n] = x[n-n_0]$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε την έξοδο $y_1[n]$ για την είσοδο αυτή, καθώς και το σήμα $y[n-n_0]$. Έχουμε ότι

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] \tag{11.151}$$

Με αλλαγή μεταβλητής $u \leftarrow k-n_0$, θα έχουμε

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] = \sum_{u=-\infty}^{n-n_0} x[u] \tag{11.152}$$

Ας υπολογίσουμε και το $y[n-n_0]$. Είναι

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \tag{11.153}$$

Προφανώς οι Σχέσεις (11.152),(11.153) είναι ισοδύναμες (τα u, k είναι μεταβλητές με τον ίδιο ρόλο και στις δυο σχέσεις). Άρα ισχύει $y_1[n] = y[n-n_0]$. Άρα το σύστημά μας είναι χρονικά αμετάβλητο.

■

Παράδειγμα 11.14:

Δείξτε ότι το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.154}$$

ειναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:
Η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$, είναι

$$y_1[n] = [x[n-n_0]]^2 = x^2[n-n_0] \tag{11.155}$$

Όμως, προφανώς ισχύει ότι $y_1[n] = y[n-n_0]$, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

■

Παράδειγμα 11.15:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$y[n] = nx[n] \tag{11.156}$$

είναι χρονικά μεταβλητό.

Λύση:
Η έξοδος του συστήματος, $y_1[n]$, για είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$ είναι

$$y_1[n] = nx[n-n_0] \tag{11.157}$$

Όμως, η έξοδος $y[n-n_0]$ ισούται με

$$y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0] \tag{11.158}$$

που προφανώς είναι διαφορετική από την $y_1[n]$. Άρα το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

■

Παράδειγμα 11.16:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_1[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_k x_1[n-k] \tag{11.159}$$

είναι χρονικά αμετάβλητο.

Λύση:
Όταν η είσοδος είναι της μορφής $x_1[n] = x[n-n_0]$, τότε η έξοδος είναι

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_1[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_k x[n-n_0-k] \tag{11.160}$$

Η καθυστερημένη κατά n_0 έξοδος $y[n-n_0]$ ισούται με

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_1[n-n_0-k] = \sum_{l=0}^{M} b_k x[n-n_0-k] \tag{11.161}$$

που προφανώς είναι ίδια με την έξοδο για είσοδο $x_1[n]$, όπως αυτή ορίζεται παραπάνω. Άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

■

11.6.2.6 Αιτιατά και μη-αιτιατά Συστήματα

Μια ιδιότητα ιδιαίτερα σημαντική για πραγματικές εφαρμογές είναι η *αιτιατότητα*, η οποία λέει ότι η απόκριση ενός συστηματος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρταται μόνο από τις χρονικές στιγμές ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Για ένα αιτιατο σύστημα, οι αλλαγές στην έξοδο δεν μπορεί να προηγούνται από αλλαγές στην είσοδο.

Παράδειγμα 11.17:

Δείξτε ότι το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{11.162}$$

είναι αιτιατό, ενώ το σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n+1] \tag{11.163}$$

δεν είναι.

Λύση:
Για το σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{11.164}$$

η τιμή της εξόδου τη χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές εισόδου $x[n]$ στις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 - 1$. Αντίθετα, το σύστημα

$$y[n] = x[n] + x[n+1] \tag{11.165}$$

δεν είναι αιτιατό, γιατι η έξοδος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται από την τιμή της εισόδου τις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 + 1$.

■

11.6.2.7 Ευσταθή και Ασταθή Συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται *ευσταθές*, αν ισχύει ότι για φραγμένη είσοδο, $|x[n]| < B_x$, η έξοδος είναι επίσης φραγμένη, $|y[n]| < B_y$, με B_x, B_y πραγματικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 11.18:

Δείξτε ότι ο αθροιστής προηγούμενου παραδείγματος δεν είναι ευσταθές σύστημα.

Λύση:
Αν η είσοδος είναι φραγμένη, $|x[n]| < B_x$, τότε η έξοδος είναι

$$|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{n} |x[k]| < \sum_{k=-\infty}^{n} B_x \to \infty \tag{11.166}$$

■

Παράδειγμα 11.19:

Δείξτε ότι το σύστημα

$$y[n] = x^2[n] + \sin(x[n]) \tag{11.167}$$

είναι ευσταθές.

Λύση:
Αν $|x[n]| < B_x$, τότε

$$|y[n]| = |x^2[n] + \sin(x[n])| \leq |x^2[n]| + |\sin(x[n])| < B_x^2 + 1 \qquad (11.168)$$

αφού $|\sin(\theta)| \leq 1$.

■