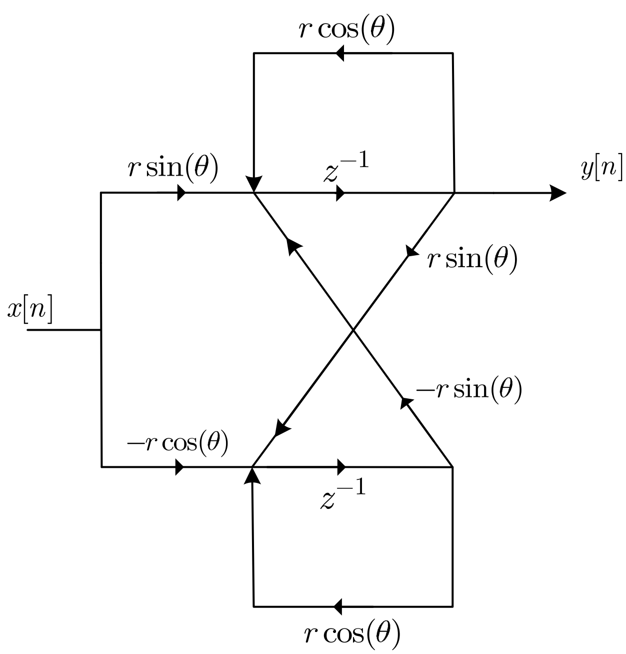
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.
Έχουμε το γράφο του Σχήματος 1. Έστω $w_1[n]$ η έξοδος στον επάνω κόμβο άθροισης του γράφου και $w_2[n]$ έστω η



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 1.*

έξοδος στον κάτω κόμβο άθροισης του γράφου. Έχουμε

$$w_1[n] = x[n]r\sin\theta + w_1[n-1]r\cos\theta - w_2[n-1]r\sin\theta$$
$$w_2[n] = -x[n]r\cos\theta + w_1[n-1]r\sin\theta + w_2[n-1]r\cos\theta$$

οπότε

$$W_1(z) = X(z)r\sin\theta + W_1(z)z^{-1}r\cos\theta - W_2(z)z^{-1}r\sin\theta$$
$$W_2(z) = -X(z)r\cos\theta + W_1(z)z^{-1}r\sin\theta + W_2(z)z^{-1}r\cos\theta$$

Θέτουμε για ευκολία

$$a = -X(z)r\cos\theta \tag{1}$$
$$b = X(z)r\sin\theta \tag{2}$$
$$c = z^{-1}r\sin\theta \tag{3}$$
$$d = z^{-1}r\cos\theta \tag{4}$$

οπότε

$$W_1(z) = b + W_1(z)d - W_2(z)c$$

$$W_2(z) = a + W_1(z)c + W_2(z)d$$

ή

$$W_1(z)(1-d) + W_2(z)c = b$$
$$W_1(z)c + W_2(z)(d-1) = -a$$

ισοδύναμα

$$W_1(z)(1-d)(d-1) + W_2(z)c(d-1) = b(d-1)$$
$$-W_1(z)c^2 - W_2(z)c(d-1) = ac$$

Προσθέτουμε κατά μέλη

$$W_1(z)(-(d-1)^2 - c^2) = b(d-1) + ac$$

Άρα

$$W_1(z) = \frac{bd + ac}{-d^2 - 1 + 2d - c^2}$$

και αντικαθιστώντας τα a,b,c, d και κάνοντας απλοποίηση έχουμε

$$W_1(z) = X(z)\frac{r\sin\theta}{r^2z^{-2} + 1 - 2rz^{-1}\cos\theta}$$

Άρα

$$W_1(z)(r^2z^{-2} + 1 - 2rz^{-1}\cos\theta) = X(z)(r\sin\theta)$$

και γυρνώντας πίσω στο χρόνο

$$w_1[n-2]r^2 + w_1[n] - w_1[n-1]r\cos\theta = x[n]r\sin\theta$$

Όμως σύμφωνα με το διάγραμμα έχουμε $y[n] = w_1[n-1]$. Άρα

$$y[n-1]r^2 + y[n+1] - y[n]r\cos\theta = x[n]r\sin\theta$$

$$y[n-2]r^2 + y[n] - y[n-1]r\cos\theta = x[n-1]r\sin\theta$$
$$y[n] + y[n-2]r^2 - y[n-1]r\cos\theta = x[n-1]r\sin\theta$$

Άσκηση 2.

(α΄)

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

και

$$Y(z) - \frac{1}{4}Y(z)\cdot z^{-2} = X(z) \Rightarrow Y(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-2}) = X(z)$$

οπότε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1}{2(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική ρίζα της εξίσωσης διαφορών ικανοποιεί την εξίσωση $\gamma^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \gamma = +\frac{1}{2}$ ή $\gamma = -\frac{1}{2}$.

Άρα το σύστημα είναι ευσταθές αφού $|\gamma| < 1$, οπότε το πεδίο σύγκλισης της $H(z)$ περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Πρέπει ROC= $\{|z| > \frac{1}{2}\}$ και κάθε όρος της $H(z)$ πρέπει να έχει το ίδιο ROC. Άρα με αντίστροφο μετασχ. Z έχουμε

$$h[n] = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n u[n] = [(\frac{1}{2})^{n+1} + (\frac{1}{2})^{n+1}]u[n]$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}(\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}) =$$
$$= \frac{2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}$$

Το γράφουμε με μερικά κλάσματα

$$\frac{2}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2} = \frac{A}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} + \frac{B}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2} + \frac{C}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{D}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Μετά από πράξεις ... $A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{2}$. Άρα

$$Y(z) = \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} + \frac{1}{2(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2} + \frac{1}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{1}{2(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

και το πεδίο σύγκλισης της $Y(z)$ είναι υπερσύνολο της τομής των πεδίων σύγκλισης των $H(z)$ και $X(z)$. Το $X(z)$ αποτελείται από τους όρους

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

και

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

και κάθε όρος έχει ROC$= \{|z| > \frac{1}{2}\}$. Οπότε ROC$_X = \{|z| > \frac{1}{2}\} \cap \{|z| > \frac{1}{2}\} = \{|z| > \frac{1}{2}\}$. Οπότε

$$ROC_Y \supseteq ROC_X \cap ROC_H = \{|z| > \frac{1}{2}\} \cap \{|z| > \frac{1}{2}\} = \{|z| > \frac{1}{2}\}$$

και πρέπει το πεδίο σύγκλισης κάθε όρου του $Y(z)$ να είναι αναγκαστικά $\{|z| > \frac{1}{2}\}$.

(β΄) Υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier για κάθε όρο του $Y(z)$.

$$Z^{-1}\Big\{\frac{1}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}\Big\} = Z^{-1}\Big\{\frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}\Big\}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} \longleftrightarrow (\frac{1}{2})^n \cdot n \cdot u[n] \Longleftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2} \longleftrightarrow (\frac{1}{2})^{n+1} \cdot (n+1) \cdot u[n+1]$$

Επίσης για το δεύτερο όρο

$$Z^{-1}\Big\{\frac{1}{2(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}\Big\} = Z^{-1}\Big\{\frac{\frac{1}{2}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}\Big\}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{\frac{-1}{2}z^{-1}}{(1-(-\frac{1}{2})z^{-1})^2} \longleftrightarrow (\frac{-1}{2})^n \cdot n \cdot u[n] \Longleftrightarrow \frac{\frac{-1}{2}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2} \longleftrightarrow -(\frac{-1}{2})^{n+1} \cdot (n+1) \cdot u[n+1]$$

Όμοια για τον τρίτο όρο

$$Z^{-1}\Big\{\frac{1}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})}\Big\} = (\frac{1}{2})^n \cdot n \cdot u[n]$$

και για τον τέταρτο όρο

$$Z^{-1}\Big\{\frac{1}{2(1+\frac{1}{2}z^{-1})}\Big\} = \frac{1}{2}(\frac{-1}{2})^n \cdot n \cdot u[n]$$

Οπότε

$$y[n] = (\frac{1}{2})^{n+1} \cdot (n+1) \cdot u[n+1] - (\frac{-1}{2})^{n+1} \cdot (n+1) \cdot u[n+1] + (\frac{1}{2})^n \cdot n \cdot u[n] + \frac{1}{2}(\frac{-1}{2})^n \cdot n \cdot u[n]$$

Επίσης ισχύει

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \Leftrightarrow \delta[n+1] = u[n+1] - u[n] \Leftrightarrow u[n+1] = \delta[n+1] + u[n]$$

άρα

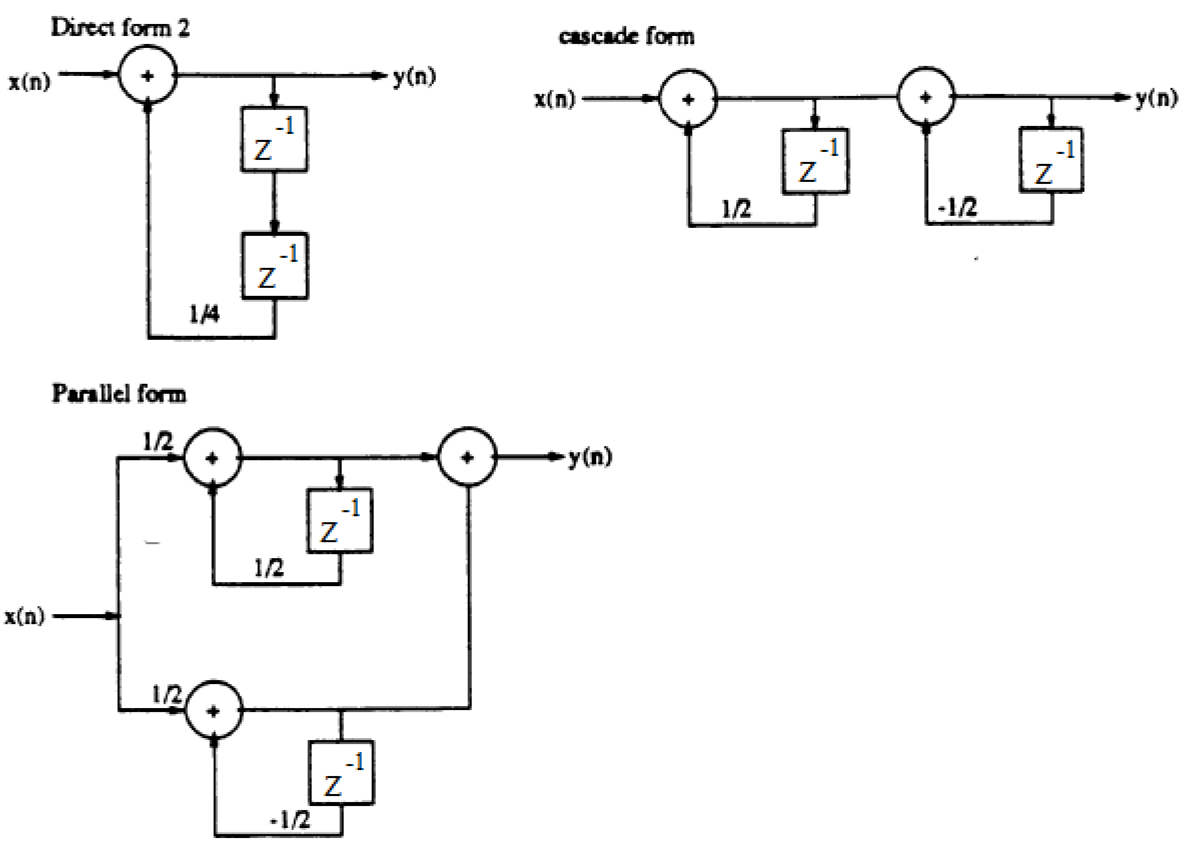
$$y[n] = (\frac{1}{2})^{n+1} \cdot (n+1) \cdot (\delta[n+1] + u[n]) - (\frac{-1}{2})^{n+1} \cdot (n+1) \cdot (\delta[n+1] + u[n]) + (\frac{1}{2})^n \cdot n \cdot u[n] + \frac{1}{2}(\frac{-1}{2})^n \cdot n \cdot u[n]$$

και μετά από πράξεις

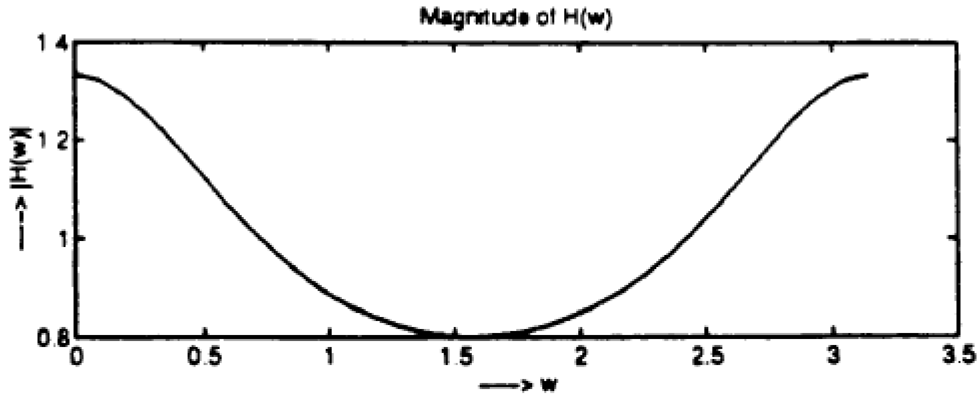
$$y[n] = (\frac{1}{2})^{n+1} \cdot n \cdot u[n] + (\frac{1}{2})^n \cdot u[n] - (\frac{-1}{2})^{n+1} \cdot n \cdot u[n] + (\frac{-1}{2})^n \cdot u[n] \quad (5)$$

$$= \left((\frac{1}{2})^{n+1} \cdot n + (\frac{1}{2})^n - (\frac{-1}{2})^{n+1} \cdot n + (\frac{-1}{2})^n \right) \cdot u[n] \quad (6)$$

(γ΄) Οι γράφοι φαίνονται στο Σχήμα 2



Σχήμα 2: *Γράφοι Άσκησης 2.*

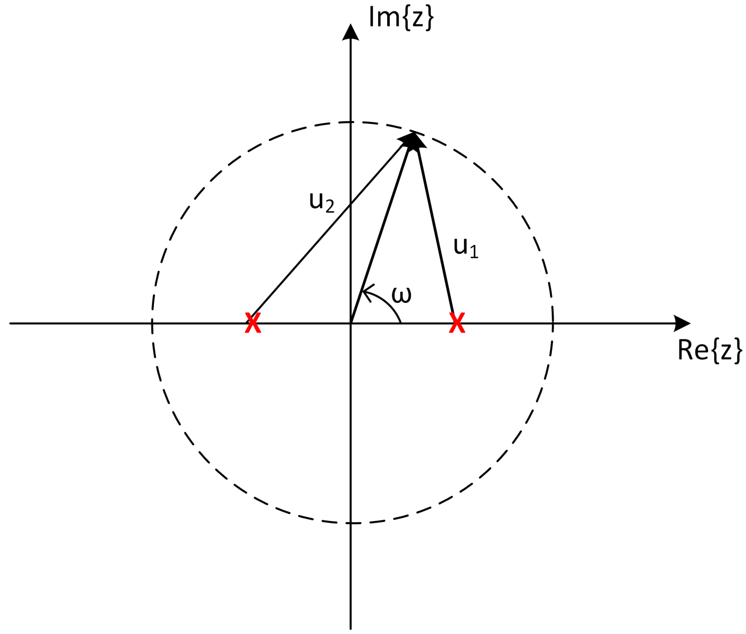


Σχήμα 3: *Φάσμα πλάτους Άσκησης 2.*

(δ΄) Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{4}{\sqrt{17 - 8\cos(2\omega)}} \tag{7}$$

και θέτοντας μερικές τιμές καταλήγουμε στο Σχήμα 3. Εναλλακτικά μπορείτε να να χρησιμοποιήσετε και διάγραμμα διανυσμάτων του Σχήματος 4. Έχουμε



Σχήμα 4: *Διάγραμμα Διανυσμάτων Άσκησης 2.*

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}$$

πάνω στο μοναδιαίο κύκλο θα είναι ίσο με

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega})} = \frac{e^{j2\omega}}{(e^{j\omega} - \frac{1}{2})(e^{j\omega} + \frac{1}{2})}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|e^{j\omega} - \frac{1}{2}| \cdot |e^{j\omega} + \frac{1}{2}|} = \frac{1}{|\overrightarrow{u_1}| \cdot |\overrightarrow{u_2}|}$$

Στο $\omega = 0$ έχουμε $|\overrightarrow{u_1}| = \frac{1}{2}$ και $|\overrightarrow{u_2}| = \frac{3}{2}$ οπότε

$$|H(e^{j0})| = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

Στο $\omega = \pi/2$ έχουμε $|\overrightarrow{u_1}| = |\overrightarrow{u_2}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ οπότε

$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Στο $\omega = \pi$ έχουμε $|\overrightarrow{u_1}| = \frac{3}{2}$ και $|\overrightarrow{u_2}| = \frac{1}{2}$ οπότε

$$|H(e^{j\pi})| = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \approx 1.33$$

Οπότε τα μέγιστα και τα ελάχιστα της απόκρισης πλάτους είναι τα παραπάνω, αφού παρατηρούμε ότι η απόκριση πλάτους είναι συμμετρική γύρω από το $\pi/2$, οπότε ξανά καταλήγουμε στο Σχήμα 3.

Άσκηση 3.

Το σύστημα είναι FIR. Με Μετασχηματισμό Fourier έχουμε

$$Y(e^{j\omega}) = b_0 X(e^{j\omega}) + b_1 X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + b_2 X(e^{j\omega})e^{-j2\omega} \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = (b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega})X(e^{j\omega})$$

άρα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega)}} = b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-j2\omega}$$

Οπότε $H(e^{j0}) = b_0 + b_1 + b_2 = 1$

Για να μηδενίζει τη συχνότητα $\frac{2\pi}{3}$ πρέπει

$$H(e^{j\frac{2\pi}{3}}) = 0 \Rightarrow b_0 + b_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}} + b_2 e^{-j\frac{4\pi}{3}} = 0$$

$$b_0 + b_1\Big(\cos\frac{2\pi}{3} - j\sin\frac{2\pi}{3}\Big) + b_2\Big(\cos\frac{4\pi}{3} - j\sin\frac{4\pi}{3}\Big) = 0$$

$$b_0 + b_1\Big(\frac{-1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) + b_2\Big(\frac{-1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = 0 \Rightarrow b_0 - \frac{1}{2}b_1 - j\frac{\sqrt{3}}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + j\frac{\sqrt{3}}{2}b_2 = 0$$

Άρα πρέπει

$$2b_0 - b_1 - b_2 = 0$$

και

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2 = 0$$

δηλ.

$$b_1 = b_2$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα

$$b_0 = b_1 = b_2 = \frac{1}{3}$$

Επομένως

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{3}e^{-j2\omega} = \frac{1}{3}e^{-j\omega}e^{j\omega} + \frac{1}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{3}e^{-j\omega}e^{-j\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}e^{-j\omega}(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) = \frac{1}{3}e^{-j\omega}(2\cos\omega + 1)$$

Απόκριση πλάτους

$$|H(e^{j\omega})| = |\frac{1}{3}e^{-j\omega}| \cdot |2\cos\omega + 1| = |\frac{1}{3}| \cdot |2\cos\omega + 1|$$

Απόκριση φάσης

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle\frac{1}{3} + \angle e^{-j\omega} + \angle(2\cos(\omega) + 1)$$

Η φάση σταθερού θετικού αριθμού είναι μηδέν, ενώ η φάση του $e^{-j\omega}$ είναι $-\omega$. Η συνάρτηση

$$2\cos(\omega) + 1$$

μηδενίζεται για $\omega = \pm 2\pi/3$, ενώ εκατέρωθέν της ρίζας η συνάρτηση αλλάζει πρόσημο. Άρα η φάση της είναι

$$\angle 2\cos(\omega) + 1 = \begin{cases} 0, & \omega \in (-2\pi/3, 2\pi/3) \\ \pi, & \omega \in (2\pi/3, \pi) \\ -\pi, & \omega \in (-\pi, -2\pi/3) \end{cases}$$

Οπότε συνολικά

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\omega, & \omega \in (-2\pi/3, 2\pi/3) \\ -\omega + \pi, & \omega \in (2\pi/3, \pi) \\ \omega - \pi, & \omega \in (-\pi, -2\pi/3) \end{cases}$$

Άσκηση 4.

Για τα συστήματα Τύπου IV ισχύει

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \le n \le M$$

με M περιττό και είναι συμμετρική γύρω από το $\frac{M}{2}$ που δεν είναι ακέραιος .

Οπότε

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k]x[n-k] + \sum_{k=\frac{M+1}{2}}^{M} h[k]x[n-k]$$

Θέτουμε $k = M - l$ και τα άκρα του όρου

$$\sum_{k=\frac{M+1}{2}}^{M} h[k]x[n-k]$$

γίνονται $k_1 = M - \frac{M+1}{2} = \frac{M-1}{2}, \quad k_2 = 0$.

Οπότε

$$\begin{aligned} \sum_{k=\frac{M+1}{2}}^{M} h[k]x[n-k] &= \sum_{l=\frac{M-1}{2}}^{0} h[M-l]x[n-(M-l)] \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{M-1}{2}} h[M-l]x[n-M+l] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[M-k]x[n-M+k] \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} -h[k]x[n-M+k] \end{aligned}$$

και άρα

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} -h[k]x[n-M+k] = \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$

Άσκηση 5.
Οι πόλοι s_k του $H(s)$ αντιστοιχίζονται σε πόλους $e^{s_k T_d}$ του $H(z)$. Το $H(s)$ γράφεται

$$H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

με

$$A = \frac{1}{2}$$
$$B = \frac{1}{2}$$

Έτσι έχουμε

$$H(s) = \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s+3)}$$

Οι πόλοι είναι $s_1 = -1$ και $s_2 = -3$. Τα μηδενικά είναι $s_0 = -2$. Οι πόλοι $s_1 = -1$, $s_2 = -3$ αντιστοιχίζονται στους e^{-T_d}, e^{-3T_d}.

Άρα

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2(1-e^{-T_d}z^{-1})} + \frac{1}{2(1-e^{-3T_d}z^{-1})} = \frac{1-e^{-3T_d}z^{-1}+1-e^{-T_d}z^{-1}}{2(1-e^{-T_d}z^{-1})(1-e^{-3T_d}z^{-1})} \\ &= \frac{2-e^{-2T_d}z^{-1}(e^{T_d}+e^{-T_d})}{2(1-e^{-T_d}z^{-1})(1-e^{-3T_d}z^{-1})} = \frac{2-2e^{-2T_d}\cosh(T_d)z^{-1}}{2(1-e^{-2T_d}z^{-1})(1-e^{-3T_d}z^{-1})} \\ &= \frac{1-e^{-2T_d}z^{-1}\cosh(T_d)}{(1-e^{-T_d}z^{-1})(1-e^{-3T_d}z^{-1})} \end{aligned}$$

Οι πόλοι του $H(z)$ είναι οι $z_1 = e^{-T_d}, \quad z_2 = e^{-3T_d}$. Πεδίο σύγκλισης είναι το $|z| > e^{-T_d}$. Για να βρούμε τα μηδενικά έχουμε

$$H(z) = \frac{z(z-e^{-2T_d}\cosh(T_d))}{(z-e^{-T_d})(z-e^{-3T_d})}$$

οπότε μηδενικά του $H(z)$ είναι $z_3 = 0$ και $z_4 = e^{-2T_d}\cosh(T_d)$.

Άσκηση 6.

(α΄) Θέτοντας $z = e^{j\omega}$ έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{j\omega} = e^{j\frac{\omega}{2}}(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}) = e^{j\frac{\omega}{2}} \cdot 2\sin(\frac{\omega}{2})j =$$

$$= e^{j\frac{\omega}{2}} 2\sin(\frac{\omega}{2})e^{j\frac{\pi}{2}} = 2\sin(\frac{\omega}{2})e^{j(-\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{2})} = A(e^{j\omega}) \cdot e^{j\phi_1(e^{j\omega})}$$

με $A(e^{j\omega}) = 2\sin(\frac{\omega}{2}$ και $\phi_1(e^{j\omega}) = -\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2}$ το οποίο είναι FIR σύστημα τύπου IV.

(β΄) Το συνολικό σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα το γινόμενο των συχνοτικών αποκρίσεων των δυο συστημάτων.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) = 2\sin(\frac{\omega}{2})e^{j(-\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{2})} \cdot A_2(e^{j\omega})e^{-j\frac{\omega M}{2}} \\ &= 2\sin(\frac{\omega}{2}) \cdot A_2(e^{j\omega})e^{j(-\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\omega M}{2})} = 2\sin(\frac{\omega}{2}) \cdot A_2(e^{j\omega})e^{j(-\frac{\omega(M+1)}{2}+\frac{\pi}{2})} \\ &= A_3(e^{j\omega}) \cdot e^{j\phi_2(e^{j\omega})} \end{aligned}$$

με $A_3(e^{j\omega}) = 2\sin(\frac{\omega}{2}) \cdot A_2(e^{j\omega})$ πραγματική συνάρτηση και $\phi_2(e^{j\omega}) = -\frac{\omega(M+1)}{2} + \frac{\pi}{2}$. Αφού το $H_2(e^{j\omega})$ είναι τύπου II, το M είναι περιττό. Άρα το $\frac{M+1}{2}$ είναι ακέραιος κι έτσι η απόκριση φάσης μας λέει ότι το σύστημα είναι γραμμικής φάσης τύπου III.

Άσκηση 7.

(α΄) Αν σχεδιάσουμε το σήμα $x_1[n]$, παρατηρούμε ότι είναι συμμετρικό με κέντρο συμμετρίας το $n = 5$. Άρα έχει γραμμική φάση (τύπου I). Οπότε

$$\angle X_1(e^{j\omega}) = -5\omega \Rightarrow grd[X_1(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}(-5\omega) = 5$$

(β΄) Το σήμα $x_2[n]$ είναι συμμετρικό γύρω από το $\frac{1}{2}$, όπως είναι εμφανές αν σχεδιάσουμε μερικές τιμές γύρω από το $n = 0$. Προσέξτε ότι αυτό δεν είναι FIR σύστημα, άρα δεν είναι κάποιου τύπου από τους γνωστούς. Οπότε

$$\angle X_2(e^{j\omega}) = -\frac{\omega}{2} \Rightarrow grd[X_2(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}(-\frac{\omega}{2}) = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 8.

Αν $H(e^{j\omega})$ ο μετασχ. Fourier του $h[n]$, τότε από τις ιδιότητες της χρονικής καθυστέρησης και της χρονικής αντιστροφής, έχουμε

$$h[N-n] \longleftrightarrow e^{-j\omega N} H(e^{-j\omega})$$

Από την ιδιότητα της συζυγίας

$$h^*[N-n] \longleftrightarrow e^{-j\omega N} H^*(e^{-j\omega})$$

- Στην περίπτωση που $h[n] = h^*[N-n]$, έχουμε

  $$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega N} H^*(e^{j\omega})$$

  και σε πολική μορφή τα μέλη της παραπάνω σχέσης γράφονται ως

  $$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi_h(\omega)}$$

  και

  $$H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\phi_h(\omega)}$$

  Άρα, από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

  $$e^{j\phi_h(\omega)} = e^{-jN\omega} e^{-j\phi_h(\omega)}$$

  ή

  $$2\phi_h(\omega) = -N\omega + 2\pi k(\omega)$$

  με $k(\omega)$ έναν ακέραιο που εξαρτάται από το ω. Λύνοντας την παραπάνω σχέση

  $$\phi_h(\omega) = -\frac{N\omega}{2} + \pi k(\omega)$$

  και έτσι δείχνουμε ότι η φάση είναι γραμμική.

- Ακριβώς όμοια με παραπάνω, μορούμε να δείξουμε ότι

  $$\phi_h(\omega) = -\frac{N\omega}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi k(\omega)$$

  που αποδεικνύει το ζητούμενο.