

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/11/2018

Ημερομηνία Παράδοσης: 4/12/2018

Άσκηση 1.

Γνωρίζετε τις ακόλουθες πληροφορίες για ένα ΓΧΑ σύστημα :

- το σύστημα είναι αιτιατό
- όταν η είσοδος είναι

$$x[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{4}{3}2^n u[-n-1] \quad (1)$$

τότε ο μετασχ. Z της εξόδου είναι

$$Y(z) = \frac{1 - z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} \quad (2)$$

- (α) Βρείτε το μετασχ.. Z της εισόδου
- (β) Ποιά είναι τα πιθανά πεδία σύγκλισης του $Y(z)$;
- (γ) Ποιές είναι οι πιθανές κρουστικές αποκρίσεις $h[n]$ για το σύστημα ;

Απ: Δε δίνονται, καθώς ουσιαστικά αποτελούν τις λύσεις της άσκησης ☺☺

Άσκηση 2.

Έστω $x[n]$ ένα αιτιατό, N σημείων σήμα, δηλ. είναι μηδενικό εκτός του διαστήματος $0 \leq n \leq N-1$. Όταν δίνουμε αυτό το σήμα ως είσοδο σε ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{4}x[n] \quad (3)$$

η έξοδος είναι επίσης αιτιατή και N σημείων.

- (α) Δείξτε ότι το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών είναι ένα all-pass σύστημα.
- (β) Δεδομένου ότι

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = 5 \quad (4)$$

βρείτε την τιμή

$$\sum_{n=0}^{N-1} |y[n]|^2 \quad (5)$$

Απ: (β) 5

Άσκηση 3.

Έστω ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 0.25z^{-1})(1 + 16z^{-2})}{(1 - 0.36z^{-2})} \quad (6)$$

(α) Βρείτε αναλυτικά ένα σύστημα ελάχιστης φάσης και ένα allpass τέτοια ώστε

$$H(z) = H_{min_1}(z)H_{ap}(z) \quad (7)$$

$$\underline{\text{Απ:}} H_{min_1}(z) = \frac{(1-0.25z^{-1})(16+z^{-2})}{(1-0.36z^{-2})}, H_{ap}(z) = \frac{\frac{1}{16}+z^{-2}}{1+\frac{1}{16}z^{-2}}$$

(β) Βρείτε αναλυτικά ένα διαφορετικό σύστημα ελάχιστης φάσης και ένα σύστημα γραμμικής φάσης έτσι ώστε

$$H(z) = H_{lin}(z)H_{min_2}(z) \quad (8)$$

$$\underline{\text{Απ:}} H_{min_2}(z) = \frac{1-0.25z^{-1}}{(1+0.36z^{-2})(1+\frac{1}{16}z^{-2})}, H_{lin}(z) = (1 + \frac{1}{16}z^{-2})(1 + 16z^{-2})$$

Άσκηση 4.

Ένα σήμα ορίζεται ως

$$r[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]h[n+m] = h[n] * h[-n] \quad (9)$$

με $h[n]$ να είναι ένα σύστημα *ελάχιστης φάσης* και

$$r[n] = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{3} 2^n u[-n-1] \quad (10)$$

(α) Δείξτε ότι $R(z) = H(z)H(z^{-1})$

(β) Βρείτε το $R(z)$ και σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών, αναγράφοντας ρητά όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά.

(γ) Προσδιορίστε τις πιθανές μορφές του συστήματος ελάχιστης φάσης με κρουστική απόκριση $h[n]$.

$$\underline{\text{Απ:}} \text{ (α) } R(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}, \frac{1}{2} < |z| < 2, \text{ (β) } h[n] = \pm \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Άσκηση 5.

Ένα ΓΧΑ σύστημα γραμμικής φάσης έχει κρουστική απόκριση $h[n]$ η οποία είναι

- πραγματική
- μη μηδενική για $0 \leq n \leq 6$

Σας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία :

- $h[0] = 1$
- υπάρχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 0.4e^{j\pi/3}$
- υπάρχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 3$

Βρείτε τη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς του, $H(z)$

$$\underline{\text{Απ:}} H(z) = \frac{25}{4}(1 - 0.4z^{-1} + 0.16z^{-2})(0.16 - 0.4z^{-1} + z^{-2})(1 - \frac{10}{3}z^{-1} + z^{-2})$$

Άσκηση 6.

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος $H(z)$ η οποία είναι ρητή συνάρτηση του z^{-1} , και ικανοποιεί τις ιδιότητες της ευστάθειας και της αιτιατότητας. Προσδιορίστε ποιό/α από τα παρακάτω συστήματα είναι επίσης ευσταθές/η και ποιό/α είναι αιτιατό/α.

(α) $G(z) = H(z)H^*(z^*)$

(β) $G(z) = \frac{d}{dz}H(z)$

(γ) $G(z) = H(z^{-1})$

(δ) $G(z) = H(-z)$

Απ: (α) ✓, ✓, (β) ✓, ✓, (γ) ✓, ✗, (δ) ✓, ✓

Άσκηση 7.

Ένα σύστημα δεύτερης τάξης έχει δυο πόλους στις θέσεις $z = 1/2$ (δηλ. έναν πόλο τάξης 2) και ένα ζεύγος μιγαδικών μηδενικών στις θέσεις $e^{\pm j\pi/2}$.

Γνωρίζετε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από τη γνώση των πόλων και των μηδενικών, επί μια σταθερά $A \in \mathbb{R}$, η οποία δεν επηρεάζει τη θέση των πόλων και μηδενικών, δηλ.

$$H(z) = A \frac{\prod(1 - c_k z^{-1})}{\prod(1 - d_k z^{-1})} \quad (11)$$

Βρείτε με χρήση διαγράμματος διανυσμάτων την τιμή που πρέπει να έχει η σταθερά A έτσι ώστε η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ να έχει την τιμή 1 για $\omega = 0$.

Απ: $A = \frac{1}{8}$