ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Ψπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό εξάμηνο 2018
Διδάσκοντες: Γ.Καφεντζής - Γ.Στυλιανού

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ἀσκηση 1

(α΄) Με μετασχηματισμό Ζ στην είσοδο ἐχουμε:

$$X[z] = -\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big) + \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{1-2z^{-1}}\Big) \tag{1}$$

με πεδία σύγκλισης των επιμέρους ὀρων τα $|z| > \frac{1}{2}$ και $|z| < 2$.Ετσι, το πεδίο σύγκλισης του $X(z)$ είναι κάποιο υπερσύνολο της τομής των πεδίων σύγκλισης δηλαδή το $\frac{1}{2} < |z| < 2$

(β΄) Γράφουμε την $Y(z)$ ως :

$$Y(z) = \frac{z^2-1}{(z-\frac{1}{2})(z-2)} \tag{2}$$

Παρατηρούμε ὀτι η $Y(z)$ ἐχει πόλους στα $z = \frac{1}{2}$ και $z = 2$.Έτσι, τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα $|z| < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < |z| < 2$, $|z| > 2$.Όμως γνωριζουμε οτι $Y(z) = \dot{H}(z)X(z)$ και ἐτσι το πεδίο σύγκλισης πρέπει να είναι υπερσύνολο της τομής των πεδίων σύγκλισης των $H(z)$ και $X(z)$. Λόγω αιτιατότητας, η $H(z)$ πρέπει να ἐξει εξωστρεφές πεδίο σύγκλισης και οι πόλοι της $Y(z)$ στα $\frac{1}{2}, 2$ προέρχονται απο την $X(z)$.Άρα η $H(z)$,αν εχει πόλους θα τους ἐχει στο 0 .Έτσι το πεδιο σύγκλισής της ειναι το $|z| > 0$. Άρα ἐχουμε:

$$ROC_Y = ROC_H \cap ROC_X \tag{3}$$

$$ROC_Y = \{|z| > 0\} \cap \{\frac{1}{2} < |z| < 2\} \tag{4}$$

$$ROC_Y = \{\frac{1}{2} < |z| < 2\} \tag{5}$$

(γ΄) Ἐχουμε:

$$X(z) = -\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big) + \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{1-2z^{-1}}\Big) = \frac{-1+2z^{-1}+4-2z^{-1}}{3(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})} \tag{6}$$

Ὀμως,αφού $Y(z) = \dot{H}(z)X(z)$, θα εχουμε:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - z^{-2}, ROC_H = \{|z| > 0\} \tag{7}$$

και αρα $h[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$

Ἀσκηση 2

(α΄) Με μετασχηματισμό Ζ στην δοθείσα εξίσωση ἐχουμε:

$$Y(z) = -\frac{1}{4}Y(z)z^{-2} = X(z)z^{-2} - \frac{1}{4}X(z) \tag{8}$$

$$Y(z)(1-\frac{1}{4}z^{-2}) = X(z)(z^{-2}-\frac{1}{4}) \tag{9}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \tag{10}$$

Παρατηρούμε ότι η ομογενής εξίσωση $y[n]-\frac{1}{4}y[n-2]=0$ εχει χαρακτηριστική εξίσωση την $\gamma^2-\frac{1}{4}=0$ και λύσεις τις $\gamma_i=\pm\frac{1}{2}$ με $|\gamma_i|<1$. Άρα έχουμε ένα ευσταθές σύστημα. Θέτουμε $z=e^{j\theta}$ στο $H(z)$ και έχουμε:

$$H(e^{j\theta}) = \frac{e^{j2\theta}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\theta}} = e^{j2\theta} \tag{11}$$

Έχουμε λοιπόν $|H(e^{j\theta})| = |e^{j2\theta}| = |e^{j\theta}|^2 = 1$
Αφού το μέτρο είναι μονάδα έχουμε ένα all-pass σύστημα.

(β') Από θεώρημα Parseval ισχύει:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|y[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}|y[n]|^2 \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Y(e^{j\omega})|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}}$$
$$\xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} \sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2 = 5 \tag{12}$$

Άσκηση 3

(α')

$$H(z) = \frac{(1-0.25z^{1})(1+16z^{-2})}{1-0,36z^{-2}} = \frac{(z-0.25)(z^2+16)}{z(z^2-0.36)} = \frac{(z-0.25)(z-4j)(z+4j)}{z(z-0.6)(z+0.6)} \tag{13}$$

Βλέπουμε ότι το σύστημα έχει πόλους στα $-0.6, 0, 0.6$ και μηδενικά στα $-4j, +4j, 0.25$ Μεταφέρουμε τα $\pm 4j$ που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου στα συζυγή αμοιβαία τους εντός του μοναδιαίου κύκλου δηλαδή στα $\pm\frac{1}{4}j$
Έτσι ενα $minimum-phase$ σύστημα είναι:

$$H_{min1}(z) = \frac{(z-0.25)(z-\frac{1}{4}j)(z+\frac{1}{4}j)}{z(z-0.6)(z+0.6)} = \frac{(z-0.25)(z^2+\frac{1}{16})}{z(z-0.6)(z+0.6)} = \frac{(1-0.25z^{-1})(1+\frac{1}{16}z^{-2})}{(1-0.6z^{-1})(1+0.6z^{-1})} \tag{14}$$

Για να ακυρώσουμε τα μηδενικά που εισάγαμε στο $\pm\frac{1}{4}j$, θα εισάγουμε δύο πόλους στο $\pm\frac{1}{4}j$ στο $all-pass$ σύστημα καθώς και δύο μηδενικά στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις $\pm 4j$ ούτως ώστε $|H_{ap}(e^{j\omega})|=1$

$$H_{ap}(z) = \frac{(z-4j)(z+4j)}{(z-\frac{1}{4}j)(z+\frac{1}{4})j} = ...(*\frac{z^{-2}}{z^{-2}}) = 16\frac{(z^{-1}-\frac{1}{4}j)(z^{-1}+\frac{1}{4}j)}{(1+\frac{1}{4}jz^{-1})(1-\frac{1}{4}jz^{-1})} \tag{15}$$

Το παραπάνω κλάσμα ειναι γινόμενο 2 όρων της μορφής $\frac{z^{-1}-\alpha^*}{1-az^{-1}}$ που γνωρίζουμε ότι έχουν μέτρο 1.Άρα το μέτρο του $H_{ap}(z)$ είναι 16. Οπότε μεταφέρουμε το 16 στο $H_{min1}(z)$ και έχουμε:

$$H_{min1}(z) = 16\frac{(1-0.25z^{-1})(1+\frac{1}{16}z^{-2})}{(1-0.6z^{-1})(1+0.6z^{-1})} = \frac{(1-0.25z^{-1})(16+z^{-2})}{(1-0.36z^{-2})} \tag{16}$$

$$H_{ap}(z) = \frac{\frac{1}{16}+z^{-2}}{1+\frac{1}{16}z^{-2}} \tag{17}$$

(β') Το H_{min2} θα ὲχει τα μηδενικά και τους πόλους που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Τα μηδενικά $\pm 4j$ μεταφέρονται στο H_{lin} ὰρα εισάγουμε σε αυτό και δύο επιπλέον μηδενικά στις συζυγείς αμοιβαίες θε'σεις $\pm\frac{1}{4}j$. Πρέπει να ὲξουμε τόσα μηδενικά ὸσα και πόλους και ὲτσι το H_{lin} θα ὲξει και 4 πόλους στο 0. Τα μηδενικά $\pm\frac{1}{4}j$ του H_{lin} ακυρώνονται με την εισαγωγή δύο επιπλέον πόλων $\pm\frac{1}{4}j$ στο H_{min2}. Οι 3 πόλοι του H_{lin} στο 0 ακυρώνονται με τρία μηδενικά τα οποία θα ὲχει το H_{min2} στο 0. Ἐτσι:

$$H_{min2}(z) = \frac{z^3(z-0.25)}{(z-0.6)(z+0.6)(z-\frac{1}{4}j)(z+\frac{1}{4}j)} \tag{18}$$

Ἀσκηση 4

(α') Παίρνουμε το μετασχηματισμό Z για την $r[n]$.Ἐτσι ὲχουμε:

$$r[n] = h[n] * h[-n] \xrightarrow{Z} R(z) = Z\{h[n]\}Z\{h[-n]\} = H(z)H(\frac{1}{z}) = H(z)H(z^{-1}) \tag{19}$$

(β')

$$r[n] = \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] + \frac{4}{3}2^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} R(z) = \frac{4}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{3}\frac{1}{1-2z^{-1}} \tag{20}$$

με $ROC = \{\frac{1}{2} < |z| < 2\}$. Κάνοντας τα παραπάνω κλασματα ομώνυμα και κάνοντας πράξεις προκύπτει ὸτι

$$R(z) = \frac{-2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

το οποίο ὲχει μηδενικά στο 0 (και στο $+\infty$) και πόλους στο $\frac{1}{2}$ και στο 2. Μεταφέροντας το $-2z^{-1}$ στον παρονομαστή προκύπτει το ζητούμενο δηλαδή

$$R(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2 \tag{21}$$

(γ') Εφόσον το $H(z)$ είναι ελάχιστης φάσης, διαλέγουμε αυτό με τον πόλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου, δηλαδή το $\frac{\pm 1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ με πεδίο σύγκλισης το $\{|z| > \frac{1}{2}\}$. Επομένως $h[n] = \pm(\frac{1}{2})^n u[n]$ μέσω των γνωστών πινάκων.

Ἀσκηση 5

Αφού η $h[n]$ είναι πραγματική,τα μηδενικά θα ὲρχονται σε συζυγή ζεύγη. Αφού η $h[n]$ είναι μη μηδενική στο διάστημα $[0,6]$ ὲχουμε ὲνα FIR σύστημα το οποίο είναι και αιτιατό.Ἀρα αν το z_0 είναι μηδενικό τότε και το $\frac{1}{z_0}$ θα είναι μηδενικό. Επίσης, πόλοι υπάρχουν μόνο στο 0. Ἐτσι,η $H(z)$ μηδενίζεται στα

$$0.4e^{\frac{j\pi}{3}},\ 0.4e^{\frac{-j\pi}{3}},\ 3,\ \frac{1}{3},\ 2.5e^{\frac{j\pi}{3}},\ 2.5e^{\frac{-j\pi}{3}}$$

Οπότε, η $H(z)$ γράφεται:

$$H(z) = A(1-0.4e^{\frac{j\pi}{3}}z^{-1})(1-0.4e^{\frac{-j\pi}{3}}z^{-1})(12.5e^{\frac{j\pi}{3}}z^{-1})(1-2.5e^{\frac{-j\pi}{3}}z^{-1})(1-3z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1}) \tag{22}$$

$$= A(1-0.4z^{-1}(e^{\frac{j\pi}{3}}+e^{\frac{-j\pi}{3}})+0.16z^{-2})(1-2.5z^{-1}(e^{\frac{j\pi}{3}}+e^{\frac{-j\pi}{3}})+6.25z^{-2})(1-\frac{10}{3}z^{-1}+z^{-2}) \tag{23}$$

$$= A(1-0.4z^{-1}2\cos\frac{\pi}{3}+0.16z^{-2})(1-2.5z^{-1}2\cos\frac{\pi}{3}+6.25z^{-2})(1-\frac{10}{3}z^{-1}+z^{-2}) \tag{24}$$

$$= \frac{A}{0.16}(1-0.4z^{-1}+0.16z^{-2})(0.16-0.4z^{-1}+z^{-2})(1-\frac{10}{3}z^{-1}+z^{-2}) \tag{25}$$

Παρατηρούμε ὀτι αν αναπτύξουμε την $H(z)$ πλήρως, ο ὀρος που δεν περιέχει κάποια δύναμη του z^{-1} είναι ἰσος με A και στο πεδίο του χρόνου μετατρέπεται σε $A\delta[n]$. Ὁμως η $h[n]$ εφόσον είναι μη μηδενική στο διάστημα $[0, 6]$ θα γράφεται:

$$h[n] = a_0\delta[n] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_3\delta[n-3] + a_4\delta[n-4] + a_5\delta[n-5] \tag{26}$$

Πρέπει λοιπόν να ισχύει $A = a_0$. Ὁμως $h[0] = a_0\delta[0] = a_0 = 1$. Ἀρα $A = 1$ και ἐτσι προκύπτει το ζητούμενο.

Ἀσκηση 6

(α') Γνωρίζουμε απο ιδιότητες ,ὀτι το $H^*(z^*)$ ειναι ο μετασχηματισμός Z της $h^*[n]$. Επίσης γνωρίζουμε οτι θα ἐχει το ἰδιο ROC με την $H(z)$. Συνεπώς η $G(z)$ θα ἐχει ως πεδίο σύγκλισης ἐνα υπερσύνολο της τομής των πεδίων σύγκλισης των $H(z)$ και $H^*(z^*)$ δηλαδή θα ἐχει το ἰδιο πεδίο σύγκλισης με την $H(z)$. Ἀρα η $G(z)$ αντιστοιχεί σε ευσταθές και αιτιατό σύστημα.

(β') Γνωρίζουμε απο ιδιότητες ,ὀτι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της παραγώγου της $H(z)$ είναι $h[n] = -(n-1)h[n-1]$. Ἐτσι αφού η $h[n]$ είναι αιτιατή τότε και η $h[n-1]$ θα είναι αιτιατή. Συνεπώς η $G(z)$ αντιστοιχεί σε αιτιατό σύστημα.

Οσο αφορά την ευστάθεια, η $H(z)$ ως ρητη συνάρτηση γράφεται ωσ:

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \implies \frac{\frac{dA(z)}{dz}B(z) - \frac{dB(z)}{dz}A(z)}{B^2(z)} \tag{27}$$

Σψνεπως, οι πόλοι της $\frac{dH(z)}{dz}$ θα είναι τα μηδενικά της $B^2(z)$,δηλαδή, ἰδιοι με τα μηδενικά της $B(z)$ που είναι και οι πόλοι της $H(z)$. Επομένως, θα βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Ἀρα ἐχουμε εξωστρεφές πεδίο σύγκλισης (λόγω αιτιατότητας) και τους πόλους της εντός μοναδιαίου κύκλου.Ἀρα η $G(z)$ αντιστοιχεί σε ευσταθές σύστημα.

(γ') Γνωρίζουμε από ιδιότητες ὀτι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της $H(z^{-1})$ είναι η $h[-n]$. Αφού η $h[n]$ είναι αιτιατή τότε,προφανώς, η $h[-n]$ δεν θα είναι αιτιατή και ἐτσι το $G(z)$ δεν αντιστοιχεί σε αιτιατό σύστημα. Οσο αφορά την ευστάθεια, αφού η $h[n]$ είναι ευσταθής θα είναι και απολύτως αθροίσιμη. Προφανώς, και η $h[n]$ θα είναι απολύτως αθροίσιμη και ἀρα η $G(z)$ αντιστοιχεί σε ευσταχές σύστημα.

(δ') Γνωρίζουμε από ιδιότητες ὀτι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Z της $H(-z)$ είναι η $(-1)^n h[n]$. Η $h[n]$ είναι ευσταθής ἀρα και απολύτως αθροίσιμη. Για την $(-1)^n h[n]$ θα ἐχουμε:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-1)^n h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-1)^n||h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \tag{28}$$

Ἀρα η $(-1)^n h[n]$ είναι ευσταθής και ἐτσι η $G(z)$ αντιστοιχεί σε ευσταθές σύστημα. Επίσης, ο πολλαπλασιασμός με μια σταθερά ($(-1)^n = \pm 1$) δεν αλλάζει την αιτιατότητα. Ἀρα η $G(z)$ αντιστοιχεί σε αιτιατό σύστημα.

Ἀσκηση 7

Η συνάρτηση μεταφοράς ἐχει τη μορφή:

$$H(z) = A\frac{(z - e^{\frac{j\pi}{2}})(z - e^{\frac{-j\pi}{2}})}{(z - \frac{1}{2})^2} \tag{29}$$

Για $z = e^{j\omega}$ ἐξουμε:

$$H(e^{j\omega}) = A\frac{(e^{j\omega} - e^{\frac{j\pi}{2}})(e^{j\omega} - e^{\frac{-j\pi}{2}})}{(e^{j\omega} - \frac{1}{2})^2} \tag{30}$$

Έτσι το μέτρο είναι:

$$|H(e^{j\omega})| = |A| \frac{|e^{j\omega} - e^{\frac{j\pi}{2}}||e^{j\omega} - e^{\frac{-j\pi}{2}}|}{|e^{j\omega} - \frac{1}{2}|^2} \tag{31}$$

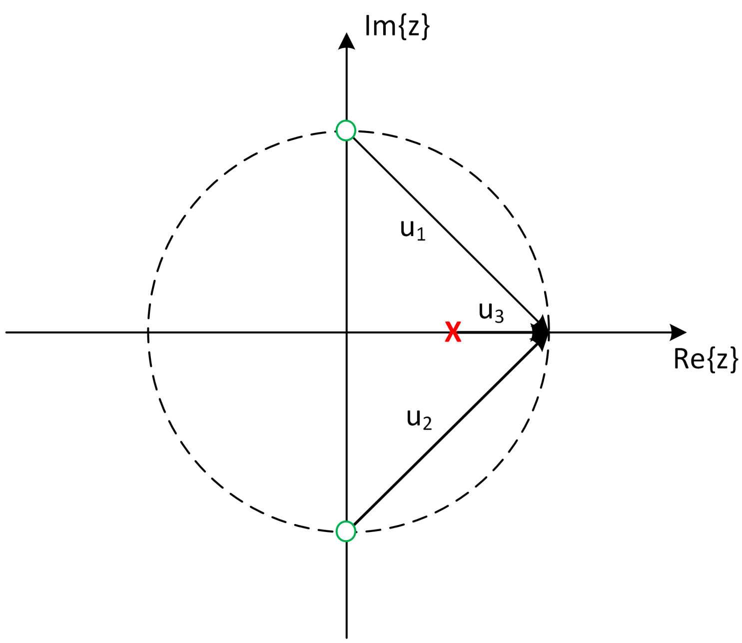
Θέτουμε

$$\vec{u_1} = e^{j\omega} - e^{\frac{j\pi}{2}} \tag{32}$$

$$\vec{u_2} = e^{j\omega} - e^{\frac{-j\pi}{2}} \tag{33}$$

$$\vec{u_3} = e^{j\omega} - \frac{1}{2} \tag{34}$$

όπως στο Σχήμα 1. Έτσι εχουμε:



Σχήμα 1: *Σχήμα Ασκησης 7.*

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}{|\vec{u_3}|^2} \tag{35}$$

Όταν $\omega = 0$,οι $\vec{u_1}$ και $\vec{u_2}$ είναι υποτείνουσες ορθογωνίου τριγώνου. Συνεπώς, έχουν μήκος $\sqrt{2}$ και έτσι $|\vec{u_3}| = \frac{1}{2}$. Άρα:

$$|H(e^{j0})| = |A| \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}^2} \implies |A| = \frac{1}{8} \implies A = \pm\frac{1}{8} \tag{36}$$