ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 5/11/2018 Ημερομηνία Παράδοσης: 15/11/2018

Άσκηση 1.
Η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα δίνεται ως

$$x[n] = 4\cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{1}$$

(α΄) Βρείτε την έξοδο του συστήματος, $y[n]$, αν η κρουστική του απόκριση είναι

$$h[n] = \frac{\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right)}{(n-2)\pi} \tag{2}$$

(β΄) Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin(0.25\pi n)}{3\pi n}\right|^2 \tag{3}$$

<u>Απ:</u> (α) $y[n] = 4\cos\left(\frac{\pi n}{6} - \frac{5\pi}{24}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$, (β) $\frac{1}{36}$

Άσκηση 2.
Ένας μετατοπιστής αρχικής φάσης κατά 90^o μπορεί να ιδωθεί ως ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 0 < \omega < \pi \\ j, & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \tag{4}$$

(α΄) Δείξτε ότι η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι της μορφής

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}, & n \text{ περιττό} \\ 0, & \text{άρτιο} \end{cases} \tag{5}$$

(β΄) Δείξτε ότι η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί και ως

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(n\pi/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Άσκηση 3.
Υπολογίστε τους μετασχ. Z - αποκλειστικά μέσω του ορισμού - των παρακάτω σημάτων:

(α') $x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+5]$

(β') $x_2[n] = a^n \sin(\omega_0 n) u[n], \;\; a \in \Re$

(γ') $x_3[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 0, 2, 4, \cdots \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Μην ξεχάσετε τα πεδία σύγκλισης!

<u>Απ:</u> (α) $X_1(z) = 1024 \dfrac{z^5}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \;\; |z| > 1/4$

(β) $X_2(z) = \dfrac{a \sin(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2a\cos(\omega_0)z^{-1} + a^2 z^{-2}}, \;\; |z| > |a|,$

(γ) $X_3(z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}}, \;\; |z| > 1/2$

Άσκηση 4.
Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά ιδιότητες και γνωστά ζεύγη μετασχ. Z, δείξτε ότι

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} \longleftrightarrow \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16} - \frac{1}{4}(z^{-1} + z)}, \;\; \frac{1}{4} < |z| < 4 \tag{7}$$

Υπάρχει ο Μετασχ. Fourier του σήματος αυτού; Αν ναι, βρείτε τον από το παραπάνω αποτέλεσμα. Αν όχι, εξηγήστε.

Άσκηση 5.
Έστω η είσοδος και η κρουστική απόκριση ενός συστήματος ως

$$x[n] = (-2)^n u[-n] \tag{8}$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{9}$$

Υπολογίστε την έξοδο $y[n]$ μέσω ιδιοτήτων και γνωστών ζευγών του μετασχ. Z.

<u>Απ:</u> $y[n] = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{5}(-2)^n u[-n-1]$

Άσκηση 6.
Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier και ο αντίστροφός του είναι πράγματι αντίστροφες εξισώσεις ο ένας του άλλου. Προς αυτό:

(α') Αρχικά δείξτε αναλυτικά (υπολογίζοντας ρητά το ολοκλήρωμα) ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \delta[n-m] \tag{10}$$

(β') Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση όπου χρειαστεί, δείξτε ότι αν

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] e^{-j\omega m} \Big) e^{j\omega n} d\omega \tag{11}$$

και το άθροισμα συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε ω[1], τότε

$$\hat{x}[n] = x[n] \tag{12}$$

[1]Δηλ. μπορείτε να αλλάξετε σειρά στο άθροισμα και στο ολοκλήρωμα