ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.

(α΄) Αναγνωρίζουμε ότι

$$\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} \longleftrightarrow \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

Οπότε για τη δεδομένη κρουστική απόκριση

$$h[n] = \frac{\sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right)}{(n-2)\pi} \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j2\omega}, & |\omega| \leq \pi/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2}$$

από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης. Το σύστημα αυτό λειτουργεί ως χαμηλοπερατό φίλτρο, κρατώντας συχνότητες στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$, με σταθερό πλάτος και φάση -2ω. Η είσοδος περιέχει συχνότητες $\pm\pi/6$, $\pm\pi/4$, οπότε θα περάσουν και τα δυο ημίτονα, δηλ.

$$\begin{aligned} y[n] &= 4\cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{8} + \angle H(e^{j\pi/6})\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{2} + \angle H(e^{j\pi/4})\right) && (3)\\ &= 4\cos\left(\frac{\pi n}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) && (4)\\ &= 4\cos\left(\frac{\pi n}{6} - \frac{5\pi}{24}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) && (5) \end{aligned}$$

(β΄) Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Parseval, δηλ.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{6}$$

με

$$x[n] = \frac{1}{3}\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} \tag{7}$$

το οποίο αντιστοιχεί σε ένα χαμηλοπερατό φίλτρο με πλάτος $1/3$ και συχνότητα αποκοπής $\omega_c = \pi/4$. Ως εκ τούτου, ο μετασχ. Fourier του θα είναι

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & |\omega| \leq \pi/4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{8}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega && (9)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{3}\right)^2 d\omega && (10)\\ &= \frac{1}{18\pi}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{36} && (11) \end{aligned}$$

Άσκηση 2.

(α΄) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} je^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} je^{j\omega n}d\omega \tag{12}$$

$$= \frac{1}{2\pi n}e^{j\omega n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi n}e^{j\omega n}\Big|_{0}^{\pi} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2\pi n}(1 - e^{-j\pi n}) - \frac{1}{2\pi n}(e^{j\pi n} - 1) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2\pi n}(1 - (-1)^n) - \frac{1}{2\pi n}((-1)^n - 1) \tag{15}$$

$$= \frac{1}{\pi n}(1 - (-1)^n) \tag{16}$$

δηλ.

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi}, & n \text{ περιττό} \\ 0, & \text{άρτιο} \end{cases} \tag{17}$$

αφού εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $h[0] = 0$.

(β΄) Από τη σχέση

$$h[n] = \frac{1}{2\pi n}(1 - e^{-j\pi n}) - \frac{1}{2\pi n}(e^{j\pi n} - 1) \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\pi n} - \frac{1}{2\pi}(e^{j\pi n} + e^{-j\pi n}) \tag{19}$$

$$= \frac{1}{\pi n}(1 - \cos(\pi n)) \tag{20}$$

$$= \frac{1}{\pi n}2\sin^2(\pi n/2) \tag{21}$$

από γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα. Άρα

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin^2(n\pi/2)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Άσκηση 3.

(α΄) Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+5]z^{-n} \tag{23}$$

$$= \sum_{n=-5}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=-5}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^n \tag{24}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^{-5}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = 1024\frac{z^5}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \tag{25}$$

μόνο αν $\left|\frac{1}{4}z^{-1}\right| < 1 \iff |z| > \frac{1}{4}$.

(β') Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \sin(\omega_0 n)u[n]z^{-n} \tag{26}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sin(\omega_0 n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \Big(\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n}\Big)z^{-n} \tag{27}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2j}a^n e^{j\omega_0 n} z^{-n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2j}a^n e^{-j\omega_0 n} z^{-n} \tag{28}$$
$$= \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{+\infty}(ae^{j\omega_0}z^{-1})^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{+\infty}(ae^{-j\omega_0}z^{-1})^n \tag{29}$$
$$= \frac{1}{2j}\frac{1}{1-ae^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}z^{-1}} \tag{30}$$
$$= \frac{az^{-1}\sin(\omega_0)}{1-2az^{-1}\cos(\omega_0)+a^2z^{-2}} \tag{31}$$

μετά από πράξεις, και μόνο αν

$$|ae^{j\omega_0}z^{-1}| < 1 \text{ και } |ae^{-j\omega_0}z^{-1}| < 1 \iff |z| > |a| \tag{32}$$

(γ') Είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0,\text{άρτιος}}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} \tag{33}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} z^{-2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-2}\right)^n \tag{34}$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \tag{35}$$

μόνο αν $|\frac{1}{4}z^{-2}| < 1 \iff |z| > \frac{1}{2}$.

Άσκηση 4.

Η σχέση γράφεται ως

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{|n|} = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n] - \delta[n] \tag{36}$$

Από πίνακες ιδιοτήτων και γνωστά ζεύγη, ο μετας. Z της είναι

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{4}z} - 1 = \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}-\frac{1}{4}(z^{-1}+z)} \tag{37}$$

μόνο αν

$$|z| > \frac{1}{4} \text{ και } |z| < 4 \iff \frac{1}{4} < |z| < 4 \tag{38}$$

Ο μετασχ. Fourier του σήματος αυτού υπάρχει αφού ο μοναδιαίος κύκλος περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισς. Ο μετασχ. δίνεται από τη σχέση

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos(\omega)} \tag{39}$$

Άσκηση 5.
Από γνωστά ζεύγη και ιδιότητες ξέρουμε ότι

$$h[n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \;\; |z| > \frac{1}{2} \tag{40}$$

και

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z} = \frac{2z^{-1}}{1+2z^{-1}}, \;\; |z| < 2 \tag{41}$$

Η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο του Z, οπότε

$$x[n] * h[n] \longleftrightarrow X(z)H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \frac{2z^{-1}}{1+2z^{-1}} \tag{42}$$

$$= \frac{2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+2z^{-1})} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+2z^{-1}} \tag{43}$$

με

$$A = \frac{2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+2z^{-1})}(1-\frac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z^{-1}=2} = \frac{4}{5} \tag{44}$$

$$B = \frac{2z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+2z^{-1})}(1+2z^{-1})\Big|_{z^{-1}=-1/2} = -\frac{4}{5} \tag{45}$$

οπότε

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{4}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{5}\frac{1}{1+2z^{-1}}, \;\; \frac{1}{2} < |z| < 2 \tag{46}$$

και από γνωστά ζεύγη

$$y[n] = \frac{4}{5}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] + \frac{4}{5}(-2)^n u[-n-1] \tag{47}$$

Άσκηση 6.

(α΄) Έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(n-m)} e^{j\omega(n-m)}\Big]_{-\pi}^{\pi} \tag{48}$$

$$= \frac{1}{2j\pi(n-m)}(e^{j\pi(n-m)} - e^{-j\pi(n-m)}) \tag{49}$$

$$= \frac{1}{2j\pi(n-m)} 2j\sin(\pi(n-m)) \tag{50}$$

$$= \frac{1}{\pi(n-m)}\sin(\pi(n-m)) \tag{51}$$

Για $n \neq m$, ο όρος $\sin(\pi(n-m))$ είναι μηδέν. Για $n = m$, επανυπολογίζουμε το ολοκλήρωμα και εύκολα παίρνουμε ότι μας δίνει μονάδα. Άρα

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} = \delta[n-m] \tag{52}$$

(β΄) Είναι

$$\hat{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j\omega m}\Big)e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)} d\omega \tag{53}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m](2\pi\delta[n-m]) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m] \tag{54}$$

Η τελευταία σχέση είναι ο ορισμός της συνέλιξης σήματος με τη συνάρτηση Δέλτα, οπότε

$$\hat{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\delta[n-m] = x[n] * \delta[n] = x[n] \tag{55}$$

οπότε και δείξαμε το ζητούμενο.