ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκοντες: Γ. Καφεντζής - Γ. Στυλιανού

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 10/10/2018 Ημερομηνία Παράδοσης: 18/10/2018

Άσκηση 1. Εκτός από τη γνωστή σας κρουστική απόκριση $h[n]$, μπορεί κανείς να ορίσει και την περίφημη *βηματική απόκριση* $s[n]$, ως την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται μια βηματική συνάρτηση $u[n]$. Η βηματική απόκριση σχετίζεται με την κρουστική απόκριση από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \tag{1}$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{2}$$

οι οποίες είναι ουσιαστικά η μια αντίστροφη της άλλης. Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος με βηματική απόκριση

$$s[n] = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}u[n], \quad |\rho| < 1 \tag{3}$$

Σας δίνεται η βοηθητική σχέση

$$\rho^n u[n] - \rho^{n-1}u[n-1] = \delta[n] + (\rho^n - \rho^{n-1})u[n-1] \tag{4}$$

όμως δικαιολογήστε γιατί ισχύει αυτή η σχέση.

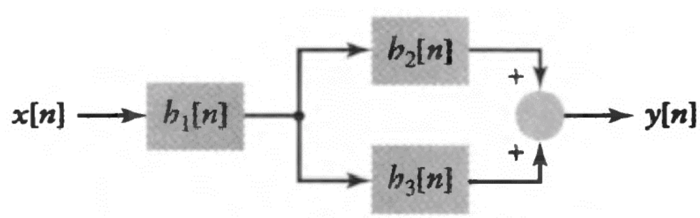
<u>Απ:</u> $h[n] = \rho^n u[n]$

Άσκηση 2. Θωρήστε τη διασύνδεση τεσσάρων ΓΧΑ συστημάτων, όπως στο Σχήμα 1. Οι κρουστικές αποκρίσεις δίνονται ως:

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-2] \tag{5}$$

$$h_2[n] = \delta[n-2] \tag{6}$$

$$h_3[n] = u[n] \tag{7}$$



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

i. Εκφράστε τη συνολική κρουστική απόκριση $h[n]$ ως συνάρτηση των $h_i[n]$, $i = 1, 2, 3$.

ii. Δείξτε ότι η μαθηματική μορφή της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ είναι

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-4] + \frac{1}{12}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)u[n-2] \tag{8}$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε έτοιμη την ιδιότητα

$$x[n-n_0] * \delta[n-n_1] = x[n-n_0-n_1] \tag{9}$$

Άσκηση 3. Για τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα, δείξτε αν το σύστημα είναι (α) γραμμικό, (β) ευσταθές, (γ) αιτιατό, (δ) χρονικά αμετάβλητο.

i. $y[n] = 2x[n-1] + x[n-2]$

ii. $y[n] = n\cos(x[n+1])$

iii. $y[n] = x[n]u[n]$

Απ:

	Γραμμικό	Ευσταθές	Αιτιατό	Χ.Α.
(α)	✓	✓	✓	✓
(β)	✗	✗	✗	✗
(γ)	✓	✓	✓	✗

Άσκηση 4. Βρείτε τη συνέλιξη των παρακάτω ζευγών σημάτων:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1],\ \ y[n] = u[n+1] \tag{10}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2],\ \ y[n] = 2u[n] \tag{11}$$

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n-2],\ \ y[n] = u[-n] \tag{12}$$

Απ:

$$c[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$c[n] = \begin{cases} 0, & n < 2 \\ \frac{8}{3} - \frac{32}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$c[n] = \begin{cases} \frac{1}{12}, & n < 2 \\ \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση 5. Για την παρακάτω εξίσωση διαφορών που περιγράφει ένα σύστημα, με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες και είσοδο $x[n]$

$$y[n] - \frac{1}{6}y[n-1] = 3x[n],\ \ y[-1] = 1,\ \ x[n] = (1/2)^n u[n] \tag{13}$$

βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου ($y_{zi}[n]$), την κρουστική απόκριση $h[n]$, και την απόκριση μηδενικής κατάστασης ($y_{zs}[n]$). Σχολιάστε την ευστάθειά του. Γράψτε τη συνολική έξοδο $y_t[n]$ του συστήματος.

Απ: $y_{zi}[n] = \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} u[n],\ \ h[n] = 3\left(\frac{1}{6}\right)^n u[n],\ \ y_{zs}[n] = \left[\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right]u[n]$