ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκοντες: Γ. Καφεντζής - Γ. Στυλιανού

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.
Ας αποδείξουμε πρώτα τη ζητούμενη σχέση, δηλ.

$$\rho^n u[n] - \rho^{n-1}u[n-1] = \delta[n] + (\rho^n - \rho^{n-1})u[n-1] \tag{1}$$
$$\rho^n u[n] - \rho^{n-1}u[n-1] = \delta[n] + \rho^n u[n-1] - \rho^{n-1}u[n-1] \tag{2}$$
$$\rho^n u[n] - \rho^n u[n-1] = \delta[n] \tag{3}$$
$$\rho^n (u[n] - u[n-1]) = \delta[n] \tag{4}$$

και εφόσον ξέρουμε ότι

$$u[n] - u[n-1] = \delta[n] \tag{5}$$

ισχύει

$$\rho^n (u[n] - u[n-1]) = \delta[n] \tag{6}$$
$$\rho^n \delta[n] = \delta[n] \tag{7}$$
$$\rho^0 \delta[n] = \delta[n] \tag{8}$$
$$\delta[n] = \delta[n] \tag{9}$$

λόγω ιδιοτήτων της συνάρτησης Δέλτα, και η τελευταία σχέση είναι αληθής.
Άρα

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \tag{10}$$
$$= \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho}u[n] - \frac{1-\rho^n}{1-\rho}u[n-1] \tag{11}$$
$$= \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} - \frac{1-\rho^n}{1-\rho}(u[n] - \delta[n]) \tag{12}$$
$$= \Big(\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} - \frac{1-\rho^n}{1-\rho}\Big)u[n] + \frac{1-\rho^n}{1-\rho}\delta[n] \tag{13}$$
$$= \Big(\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} - \frac{1-\rho^n}{1-\rho}\Big)u[n] + 0 \times \delta[n] \tag{14}$$
$$= \Big(\frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} - \frac{1-\rho^n}{1-\rho}\Big)u[n] \tag{15}$$
$$= \Big(\frac{1-\rho^{n+1} - 1 + \rho^n}{1-\rho}\Big)u[n] \tag{16}$$
$$= \frac{\rho^n(1-\rho)}{1-\rho}u[n] \tag{17}$$
$$= \rho^n u[n] \tag{18}$$

που ειναι και το ζητούμενο.

Άσκηση 2.

i. Από το Σχήμα εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$y[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] + (x[n] * h_1[n]) * h_3[n] = x[n] * \Big[h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n])\Big] \tag{19}$$

οπότε

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) \tag{20}$$

ii. Έχουμε

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) \tag{21}$$
$$= (1/4)^n u[n-2] * \delta[n-2] + (1/4)^n u[n-2] * u[n] \tag{22}$$
$$= (1/4)^{n-2} u[n-4] + (1/4)^n u[n-2] * u[n] \tag{23}$$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη συνέλιξη ως

$$c[n] = (1/4)^n u[n-2] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1/4)^k u[k-2] u[n-k] = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k \tag{24}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)^2}{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{12}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \tag{25}$$

για $n \geq 2$, δηλ.

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-4] + \frac{1}{12}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) u[n-2] \tag{26}$$

Άσκηση 3.

i. $y[n] = 2x[n-1] + x[n-2]$:
Για είσοδο $ax_1[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = 2ax_1[n-1] + ax_1[n-2] = a(2x_1[n-1] + x_1[n-2]) = ay_1[n] \tag{27}$$

ενώ για είσοδο $bx_2[n]$, είναι

$$y[n] = 2bx_2[n-1] + bx_2[n-2] = b(2x_2[n-1] + x_2[n-2]) = by_2[n] \tag{28}$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$, έχουμε έξοδο

$$y[n] = 2(ax_1[n-1] + bx_2[n-1]) + (ax_1[n-2] + bx_2[n-2]) \tag{29}$$
$$= a(2x_1[n-1] + x_1[n-2]) + b(2x_2[n-1] + x_2[n-2]) \tag{30}$$
$$= ay_1[n] + by_2[n] \tag{31}$$

άρα το σύστημα είναι γραμμικό. Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί

$$|y[n]| < B_y \Longrightarrow |2x[n-1]x[n-2]| \leq |2x[n-1]| + |x[n-2]| \tag{32}$$
$$= 2|x[n-1]| + |x[n-2]| \leq 2B_x + B_x = 3B_x = B_y \tag{33}$$

Η έξοδος εξαρτάται μόνο από παρελθοντικές τιμές της εισόδου, οπότε το σύστημα είναι αιτιατό. Επίσης, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0, τότε

$$y[n] = 2x[n-1-n_0] + x[n-2-n_0] \tag{34}$$

ενώ αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά n_0 παίρνουμε

$$y[n-n_0] = 2x[n-1-n_0] + x[n-2-n_0] \tag{35}$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

ii. $y[n] = n\cos(x[n+1])$:
Για είσοδο $ax_1[n]$ έχουμε έξοδο

$$y[n] = n\cos(ax_1[n+1]) \neq a(n\cos(x_1[n+1])) \tag{36}$$

άρα το σύστημα δεν είναι ομογενές, οπότε δεν είναι και γραμμικό. Επίσης, για φραγμένη είσοδο, η έξοδος είναι

$$|y[n]| < B_y \Longrightarrow |n\cos(x[n+1])| = |n||\cos(x[n+1])| \leq |n| \tag{37}$$

το οποίο τεινει στο άπειρο όταν $n \to infty$. Άρα το σύστημα είναι ασταθές. Επιπλέον, η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές τιμές της εισόδου, άρα το σύστημα δεν είναι αιτιατό. Τέλος, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0, η έξοδος είναι

$$y[n] = n\cos(x[n+1-n_0]) \tag{38}$$

ενώ η καθυστέρηση της εξόδου κατά n_0 δίνει

$$y[n-n_0] = (n-n_0)\cos(x[n+1-n_0]) \tag{39}$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

iii. $y[n] = x[n]u[n]$:
Για είσοδο $ax_1[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = ax_1[n]u[n] = a(x_1[n]u[n]) = ay_1[n] \tag{40}$$

ενώ για είσοδο $bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = bx_2[n]u[n] = b(x_2[n]u[n]) = by_2[n] \tag{41}$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ έχουμε έξοδο

$$y[n] = (ax_1[n] + bx_2[n])u[n] = ax_1[n]u[n] + bx_2[n]u[n] = ay_1[n] + by_2[n] \tag{42}$$

άρα το σύστημα είναι γραμμικό. Επίσης, για φραγμένη είσοδο, η έξοδος είναι

$$|y[n]| < B_y \Longrightarrow |x[n]u[n]| = |x[n]||u[n]| \leq |x[n]| < B_x = B_y \tag{43}$$

άρα το σύστημα είναι ευσταθές. Το σύστημα ειναι επίσης αιτιατό γιατί εξαρτάται μόνο από από τις τρέχουσες τιμές της εισόδου για τον υπολογισμό της εξόδου. Τέλος, αν καθυστερήσουμε την είσοδο κατά n_0, έχουμε

$$y[n] = x[n-n_0]u[n] \tag{44}$$

ενώ αν καθυστερήσουμε την έξοδο κατά n_0, έχουμε

$$y[n-n_0] = x[n-n_0]u[n-n_0] \tag{45}$$

οπότε το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

Άσκηση 4.

(α΄) Είναι

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k-1]u[n-k+1] = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{46}$$

αφού

$$u[k-1]u[n-k+1] = 1, \quad 1 \leq k \leq n+1 \tag{47}$$

Άρα

$$c[n] = \sum_{k=1}^{n+1} \Big(\frac{1}{2}\Big)^k = \frac{\frac{1}{2} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+2}, \quad n \geq 0 \tag{48}$$

δηλ.

$$c[n] = 1 - 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n+2} u[n] \tag{49}$$

(β΄) Είναι

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\Big(\frac{1}{4}\Big)^{k-2} u[k-2]u[n-k] = \sum_{k=2}^{n} 2\Big(\frac{1}{4}\Big)^{k-2} \tag{50}$$

αφού

$$u[k-2]u[n-k] = 1, \quad 2 \leq k \leq n \tag{51}$$

Άρα

$$c[n] = \sum_{k=2}^{n} 2\Big(\frac{1}{4}\Big)^{k-2} = \sum_{k=2}^{n} 32\Big(\frac{1}{4}\Big)^{k} \tag{52}$$

$$= 32\frac{\Big(\frac{1}{4}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{4}\Big)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{3} - \frac{32}{3}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n, \; n \geq 2 \tag{53}$$

δηλ.

$$c[n] = \Big(\frac{8}{3} - \frac{32}{3}\Big(\frac{1}{4}\Big)^n\Big) u[n-2] \tag{54}$$

(γ΄) Είναι

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^k u[k-2]u[-n+k] \tag{55}$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- $n \geq 2$: τότε

$$c[n] = \sum_{k=n}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^k = \frac{3}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n \tag{56}$$

- $n < 2$: τότε

$$c[n] = \sum_{k=2}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^k = \frac{\Big(-\frac{1}{3}\Big)^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \tag{57}$$

Άρα

$$c[n] = \begin{cases} \frac{3}{4}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n, & n \geq 2 \\ \frac{1}{12}, & n < 2 \end{cases} \tag{58}$$

Άσκηση 5.
Πρώτα θα βρούμε την απόκριση μηδενικής εισόδου. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\gamma - \frac{1}{6} = 0 \Longrightarrow \gamma = \frac{1}{6} \tag{59}$$

Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c_1 \Big(\frac{1}{6}\Big)^n, \;\; n \geq 0 \tag{60}$$

Βρίσκουμε το c_1 από τις αρχικές συνθήκες ως

$$y[-1] = 1 \Longleftrightarrow 6c_1 = 1 \Longleftrightarrow c_1 = \frac{1}{6} \tag{61}$$

οπότε

$$y_{zi}[n] = \Big(\frac{1}{6}\Big)^{n+1} u[n] \tag{62}$$

Πριν την απόκριση μηδενικής κατάστασης, πρέπει να βρούμε την κρουστική αποκριση $h[n]$. Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{6}x[n-1] = x[n] \tag{63}$$

Έχουμε ότι η κρουστική απόκριση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών είναι

$$h_0[n] - \frac{1}{6}h_0[n-1] = \delta[n] \tag{64}$$

Η κρουστική απόκριση θα είναι της μορφής

$$h_0[n] = d_1\Big(\frac{1}{6}\Big)^n \tag{65}$$

Για $n = 0$ έχουμε

$$h_0[0] - \frac{1}{6}h_0[-1] = 1 \Longrightarrow h_0[0] = 1 \tag{66}$$

Οπότε

$$h_0[n] = \Big(\frac{1}{6}\Big)^n u[n] \tag{67}$$

και η ζητούμενη κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = 3h_0[n] = 3\Big(\frac{1}{6}\Big)^n u[n] \tag{68}$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης μέσω της πράξης της συνέλιξης. Είναι

$$\begin{aligned} y_{zs}[n] = h[n] * x[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3\Big(\frac{1}{6}\Big)^k u[k]\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k} u[n-k] && (69)\\ &= 3\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{3}\Big)^k u[k]u[n-k] && (70)\\ &= 3\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{3}\Big)^k && (71) \end{aligned}$$

αφού

$$u[k]u[n-k] = 1, \quad 0 \leq k \leq n \tag{72}$$

κι άρα

$$y_{zs}[n] = 3\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{3}\Big)^k = \frac{9}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \Big(1 - \Big(\frac{1}{3}\Big)^{n+1}\Big) \tag{73}$$

$$= \frac{9}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{6}\Big)^n, \;\; n \geq 0 \tag{74}$$

δηλ.

$$y_{zs}[n] = \Big[\frac{9}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{6}\Big)^n\Big] u[n] \tag{75}$$

Η συνολική έξοδος θα είναι

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \Big(\frac{1}{6}\Big)^{n+1} u[n] + \Big[\frac{9}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{6}\Big)^n\Big] u[n] \tag{76}$$

Το σύστημα ειναι ευσταθές, αφού η χαρακτηριστική ριζα του είναι μικρότερη της μονάδας. Εναλλακτικά, η κρουστική του απόκριση είναι απολύτως αθροισιμη, αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{k=0}^{+\infty} 3\Big(\frac{1}{6}\Big)^n = 3\frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{18}{5} < +\infty \tag{77}$$