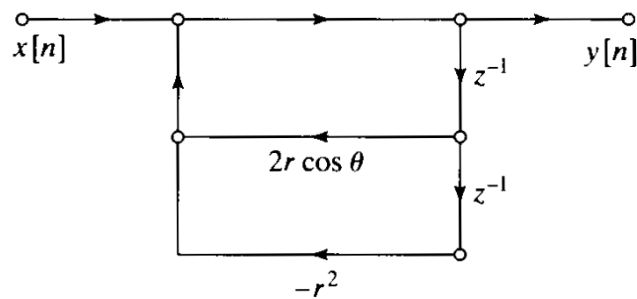


ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

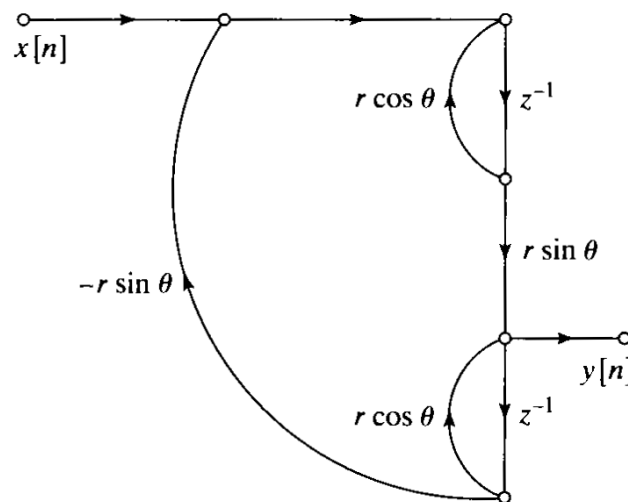
Τρίτο Φροντιστήριο

1. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς των δυο παρακάτω γράφων (Σχήμα. 1) και δείξτε ότι έχουν τους ίδιους πόλους.



Network 1

(a)



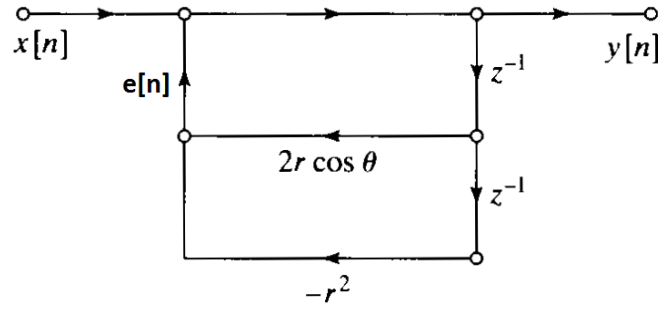
Network 2

(b)

Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1

Λύση:

Για τον πρώτο γραφο, μπορούμε να βρούμε το σύστημα πηγαίνοντας από το χώρο του χρόνου σε αυτόν της συχνότητας. Θέτοντας $e[n]$ στο δεύτερο κόμβο (εκεί όπου υπάρχουν δυο είσοδοι και μια έξοδος), θα έχουμε το Σχήμα 2. Άρα θα έχουμε



Network 1

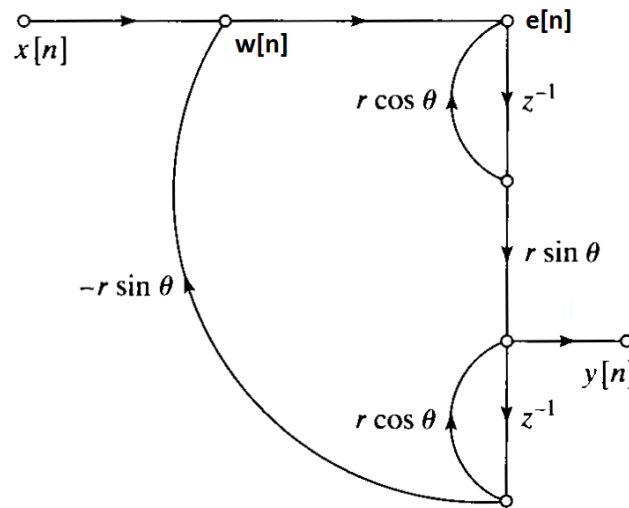
Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 1α - επιπλέον μεταβλητές

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] + e[n] \\
 e[n] &= 2r \cos(\theta) w[n-1] - r^2 w[n-2] \\
 y[n] &= x[n] + e[n] = x[n] + 2r \cos(\theta) w[n-1] - r^2 w[n-2] \\
 &= x[n] + 2r \cos(\theta) y[n-1] - r^2 y[n-2]
 \end{aligned} \tag{1}$$

Αν κάνουμε μετ. Ζ στην τελευταία σχέση, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= X(z) + 2r \cos(\theta) Y(z) z^{-1} - r^2 Y(z) z^{-2} \\
 Y(z)(1 - 2r \cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}) &= X(z) \\
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 2r \cos(\theta) z^{-1} + r^2 z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

Για το δευτερο δίκτυο-γράφο, βάζοντας μεταβλητές στους ενδιάμεσους κόμβους (εκεί που υπάρχουν δυο εισοδοι και μια έξοδος), όπως στο Σχήμα 3, θα έχουμε:



Network 2

Σχήμα 3: Σχήμα Άσκησης 1β - επιπλέον μεταβλητές

$$\begin{aligned}
 w[n] &= x[n] - r \sin(\theta) y[n-1] \\
 e[n] &= w[n] + r \cos(\theta) e[n-1] \\
 y[n] &= r \sin(\theta) e[n-1] + r \cos(\theta) y[n-1]
 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= f[n] + x[n] \\
g[n] &= y[n-1] + p[n-1] \\
p[n] &= g[n] + y[n-2] \\
w[n] &= p[n] + f[n-1] \\
f[n] &= w[n] + p[n-1]
\end{aligned}$$

στις οποίες αν κάνουμε μετασχ. Z, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
Y(z) &= F(z) + X(z) \\
G(z) &= z^{-1}Y(z) + z^{-1}P(z) \\
P(z) &= G(z) + z^{-2}Y(z) \\
W(z) &= P(z) + z^{-1}F(z) \\
F(z) &= W(z) + z^{-1}P(z)
\end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
Y(z) &= F(z) + X(z) \\
G(z) &= z^{-1}Y(z) + z^{-1}(G(z) + z^{-2}Y(z)) = z^{-1}Y(z) + z^{-1}G(z) + z^{-3}Y(z) \\
&= \frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z) \\
F(z) &= W(z) + z^{-1}P(z) = G(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}F(z) + z^{-1}(G(z) + z^{-2}Y(z)) \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \left(G(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}G(z) + z^{-3}Y(z) \right) \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \left(\frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1} \frac{z^{-1} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z) + z^{-3}Y(z) \right) \\
&= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z)
\end{aligned} \tag{5}$$

και άρα τελικά από την εξίσωση (5), είναι

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \frac{z^{-1} + 2z^{-2} + z^{-3}}{1 - z^{-1}}Y(z) + X(z) \\
\frac{1 - 3z^{-1} - z^{-2} - z^{-3}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}Y(z) &= X(z) \\
(1 - 3z^{-1} - z^{-2} - z^{-3})Y(z) &= (1 - 2z^{-1} + z^{-2})X(z) \leftrightarrow \\
y[n] - 3y[n-1] - y[n-2] - y[n-3] &= x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]
\end{aligned} \tag{6}$$

που είναι και η ζητούμενη σχέση.

3. Έστω ο γράφος του Σχήματος 6.

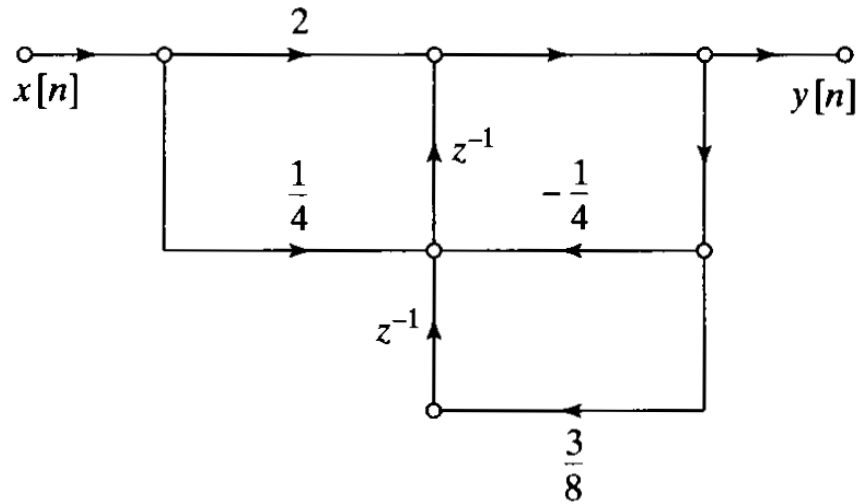
(α) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος που απεικονίζει ο γράφος.

(β) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που ικανοποιείται από την είσοδο $x[n]$ και την έξοδο $y[n]$.

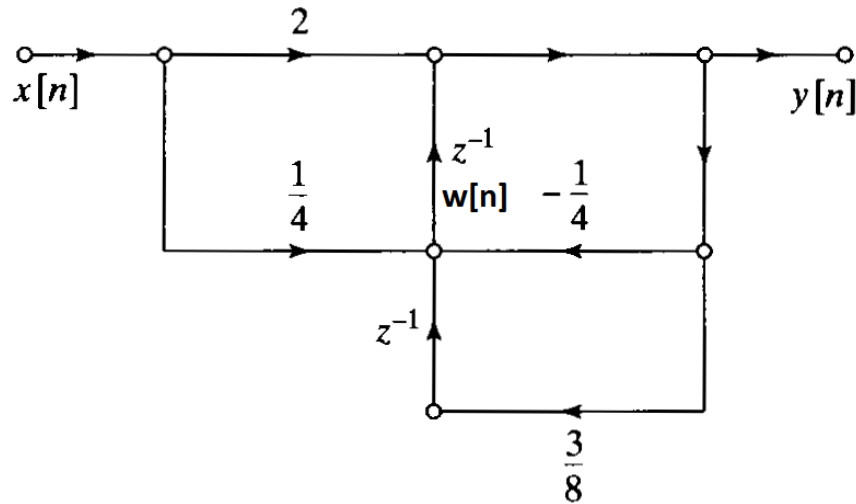
Λύση:

(α) Βάζοντας μια μεταβλητή στον κεντρικό κόμβο, καταλήγουμε στο Σχήμα 7. Θα έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
y[n] &= 2x[n] + w[n-1] \\
w[n] &= \frac{1}{4}x[n] - \frac{1}{4}y[n] + \frac{3}{8}y[n-1]
\end{aligned}$$



Σχήμα 6: Σχήμα Άσκησης 3



Σχήμα 7: Σχήμα Άσκησης 3 - επιπλέον μεταβλητές

τα οποία και δίνουν μετασχ. Ζ τους παρακάτω

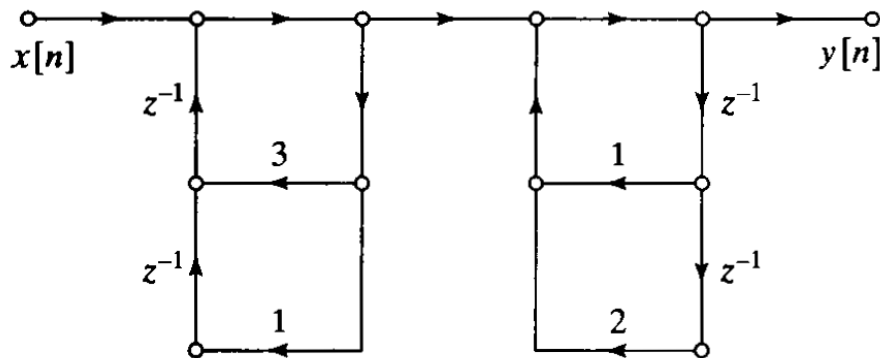
$$\begin{aligned}
 W(z) &= \frac{1}{4}X(z) - \frac{1}{4}Y(z) + \frac{3}{8}z^{-1}Y(z) \\
 Y(z) &= 2X(z) + z^{-1}W(z) = 2X(z) + z^{-1}\left(\frac{1}{4}X(z) - \frac{1}{4}Y(z) + \frac{3}{8}z^{-1}Y(z)\right) \\
 &= 2X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}X(z) - \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{3}{8}z^{-2}Y(z) \\
 Y(z)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right) &= \left(2 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z) \Leftrightarrow \\
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{(2 + \frac{1}{4}z^{-1})}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{7}$$

(β) Η εξίσωση διαφορών δίνεται πολύ απλά από το $H(z)$:

$$\begin{aligned}
 Y(z)\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{3}{8}z^{-2}\right) &= \left(2 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z) \Leftrightarrow \\
 y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{3}{8}y[n-2] &= 2x[n] + \frac{1}{4}x[n-1]
 \end{aligned} \tag{8}$$

που είναι και το ζητούμενο.

4. Ένα ΓΧΑ σύστημα υλοποιείται από τον γράφο του Σχήματος 8.

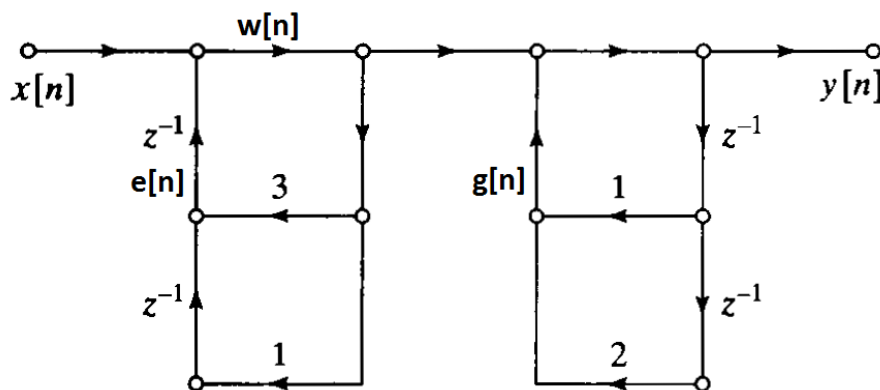


Σχήμα 8: Σχήμα Άσκησης 4

- (α) Γράψτε την εξίσωση διαφορών που σχετίζει την είσοδο $x[n]$ και την έξοδο $y[n]$ του γράφου αυτού.
 (β) Ποιά είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος;
 (γ) Πόσοι πολλαπλασιασμοί και προσθέσεις απαιτούνται για τον υπολογισμό της εξόδου; (θεωρούμε ότι οι πολλαπλασιασμοί με τη μονάδα δε προσμετρούνται)
 (δ) Η υλοποίηση του σχήματος 8 απαιτεί 4 καταχωρητές (στοιχεία καθυστέρησης). Είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσετε λιγότερους καταχωρητές, με χρήση διαφορετικής δομής; Αν ναι, σχεδιάστε τη δομή, αν όχι, εξηγήστε γιατί δεν μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των καταχωρητών.

Λύση:

- (α) Βάζοντας επιπλέον μεταβλητές στους απαραίτητους κόμβους, καταλήγουμε στο Σχήμα 9. Προσέξτε, ΔΕΝ είναι δομή Direct Form II!! Οπότε οι εξισώσεις είναι



Σχήμα 9: Σχήμα Άσκησης 4 - επιπλέον μεταβλητές

$$\begin{aligned} y[n] &= g[n] + w[n] \\ w[n] &= x[n] + e[n - 1] \\ e[n] &= 3w[n] + w[n - 1] \\ g[n] &= y[n - 1] + 2y[n - 2] \end{aligned}$$

οι οποίες δίνουν μετ. Ζ ως

$$Y(z) = G(z) + W(z) \quad (9)$$

$$W(z) = X(z) + z^{-1}E(z)$$

$$E(z) = 3W(z) + z^{-1}W(z) \Leftrightarrow E(z) = \frac{3 + z^{-1}}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z)$$

$$G(z) = z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) \quad (10)$$

και σύμφωνα με τη σχέση (9) και αντικαθιστώντας, θα είναι

$$\begin{aligned} Y(z) &= G(z) + W(z) = z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) + X(z) + z^{-1}E(z) \\ &= z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) + X(z) + z^{-1}\frac{3 + z^{-1}}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z) \\ &= z^{-1}Y(z) + 2z^{-2}Y(z) + X(z) + \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z) \\ Y(z) - z^{-1}Y(z) - 2z^{-2}Y(z) &= X(z) + \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z) \\ Y(z) - z^{-1}Y(z) - 2z^{-2}Y(z) &= \frac{1}{1 - 3z^{-1} - z^{-2}}X(z) \end{aligned}$$

και τελικά

$$\begin{aligned} Y(z) - 4z^{-1}Y(z) + 7z^{-3}Y(z) + 2z^{-4}Y(z) &= X(z) \Leftrightarrow \\ y[n] - 4y[n-1] + 7y[n-3] + 2y[n-4] &= x[n] \end{aligned} \quad (11)$$

(β) Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του συστήματος δίνεται από

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 4z^{-1} + 7z^{-3} + 2z^{-4}} \quad (12)$$

(γ) Από το σχήμα, απαιτούνται 4 προσθέσεις και 2 πολλαπλασιασμοί.

(δ) Δεν είναι δυνατό να μειωθεί ο αριθμός των καταχωρητών. Απαιτούνται το λιγότερο τέσσερις καταχωρητές για ένα σύστημα 4ης τάξης. Ακόμα και η μετατροπή σε Direct Form II απαιτεί επίσης τέσσερις καταχωρητές.

5. Έστω $x[n]$ και $y[n]$ οι ακολουθίες που σχετίζονται με την ακόλουθη εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-2] - \frac{1}{4}x[n]$$

Σχεδιάστε τον Direct Form II γράφο για το αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφει αυτήν την εξίσωση διαφορών.

Λύση:

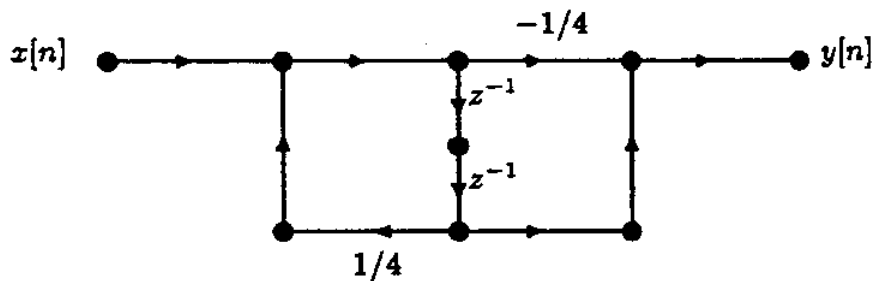
Η εξίσωση διαφορών γράφεται ως

$$\begin{aligned} y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] &= x[n-2] - \frac{1}{4}x[n] \Leftrightarrow \\ Y(z) - \frac{1}{4}Y(z)z^{-2} &= X(z)z^{-2} - \frac{1}{4}X(z) \Leftrightarrow \\ Y(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-2}) &= X(z)(z^{-2} - \frac{1}{4}) \Leftrightarrow \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-\frac{1}{4} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-2}} \end{aligned} \quad (13)$$

που είναι της μορφής

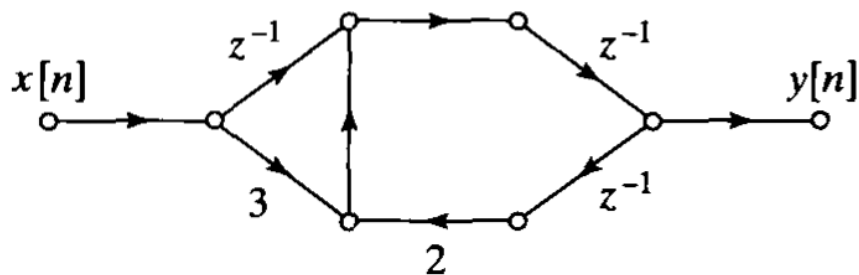
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

και άρα ευκολα σχεδιάζουμε τον Direct Form II γράφο όπως στο Σχήμα 10. που είναι και το ζητούμενο.



Σχήμα 10: Σχήμα Άσκησης 5

6. Έστω ο γράφος του Σχήματος 11. Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος και την εξίσωση

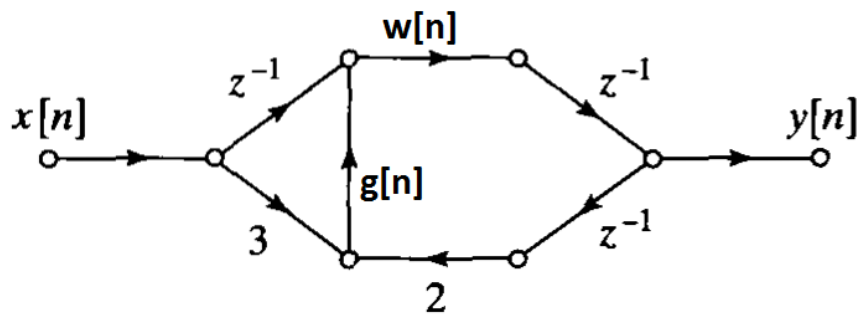


Σχήμα 11: Σχήμα Άσκησης 6

διαφορών που ικανοποιεί αυτό το γράφο.

Λύση:

Εισάγοντας επιπλέον μεταβλητές, θα έχουμε το γραφο Άρα θα έχουμε



Σχήμα 12: Σχήμα Άσκησης 6 - επιπλέον μεταβλητές

$$\begin{aligned}
 w[n] &= g[n] + x[n-1] \\
 g[n] &= 3x[n] + 2y[n-1] \\
 y[n] &= w[n-1]
 \end{aligned}$$

οι οποίες δίνουν μετ. Ζ

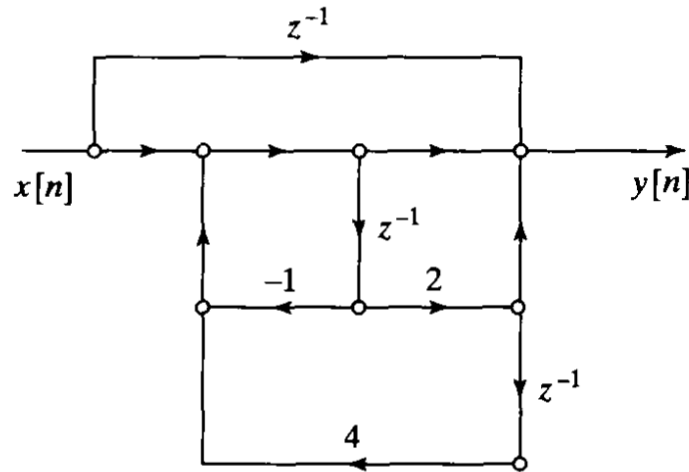
$$\begin{aligned}
 W(z) &= G(z) + z^{-1}X(z) \\
 G(z) &= 3X(z) + 2z^{-1}Y(z) \\
 Y(z) &= W(z)z^{-1} = G(z)z^{-1} + X(z)z^{-2} = 3X(z)z^{-1} + 2z^{-2}Y(z) + X(z)z^{-2} \\
 Y(z)(1 - 2z^{-2}) &= X(z)(3z^{-1} + z^{-2}) \\
 H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2z^{-2}}
 \end{aligned} \tag{14}$$

και εύκολα από την παραπάνω σχέση, έχουμε

$$y[n] - 2y[n-2] = 3x[n-1] + x[n-2] \tag{15}$$

που είναι και το ζητούμενο.

7. Έστω ο γράφος του Σχήματος 13 που αντιπροσωπεύει ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα.



Σχήμα 13: Σχήμα Άσκησης 7

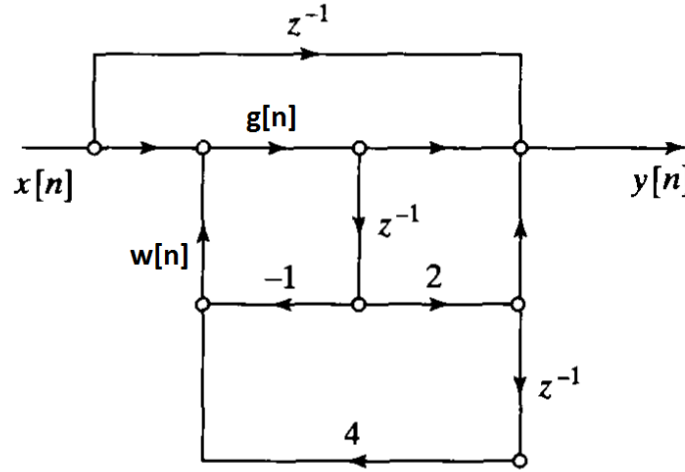
(α) Βρείτε την εξίσωση διαφορών που αντιστοιχεί σε αυτόν το γράφο.

(β) Βρείτε το $h[1]$.

Λύση:

(α) Βάζοντας επιπλέον μεταβλητές στο σχήμα, καταλήγουμε στο Σχήμα 14. Οι εξισώσεις που αντιπροσωπεύουν το σύστημα είναι οι

$$\begin{aligned}
 g[n] &= w[n] + x[n] \\
 y[n] &= x[n-1] + g[n] + 2g[n-1] \\
 w[n] &= 8g[n-2] - g[n-1]
 \end{aligned}$$



Σχήμα 14: Σχήμα Άσκησης 7 - επιπλέον μεταβλητές

οι οποίες δίνουν μετ. Z

$$\begin{aligned}
 G(z) &= W(z) + X(z) \\
 W(z) &= 8G(z)z^{-2} - G(z)z^{-1} = 8(W(z) + X(z))z^{-2} - (W(z) + X(z))z^{-1} \\
 &= 8W(z)z^{-2} + 8X(z)z^{-2} - W(z)z^{-1} - X(z)z^{-1} \\
 W(z) &= \frac{-z^{-1} + 8z^{-2}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}}X(z) \\
 Y(z) &= z^{-1}X(z) + G(z) + 2G(z)z^{-1} \\
 &= z^{-1}X(z) + W(z) + X(z) + 2z^{-1}(W(z) + X(z)) \\
 &= X(z)(1 + 3z^{-1}) + W(z)(1 + 2z^{-1}) \\
 &= X(z)(1 + 3z^{-1}) + \frac{-z^{-1} + 8z^{-2}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}}X(z)(1 + 2z^{-1}) \\
 &= X(z) \frac{(1 + 3z^{-1})(1 + z^{-1} - 8z^{-2}) + (-z^{-1} + 8z^{-2})(1 + 2z^{-1})}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}} \\
 &= X(z) \frac{1 + z^{-1} - 8z^{-2} + 3z^{-1} + 3z^{-2} - 24z^{-3} - z^{-1} - 2z^{-2} + 8z^{-2} + 16z^{-3}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}} \\
 &= X(z) \frac{1 + 3z^{-1} + z^{-2} - 8z^{-3}}{1 + z^{-1} - 8z^{-2}}
 \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned}
 Y(z)(1 + z^{-1} - 8z^{-2}) &= X(z)(1 + 3z^{-1} + z^{-2} - 8z^{-3}) \Leftrightarrow \\
 y[n] + y[n-1] - 8y[n-2] &= x[n] + 3x[n-1] + x[n-2] - 8x[n-3] \quad (16)
 \end{aligned}$$

(β) Από την παραπάνω εξίσωση διαφορών, και δεδομένου ότι το σύστημα είναι αιτιατό, δηλαδή $h[n] = 0$, $n < 0$, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 h[n] + h[n-1] - 8h[n-2] &= \delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2] - 8\delta[n-3] \\
 h[0] &= 1 \\
 h[1] + 1 &= 3 \Leftrightarrow h[1] = 2 \quad (17)
 \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο.

8. Έστω ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n]$ και συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{z(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

- (α) Σχεδιάστε το γραφο μορφής Direct Form II για το παραπάνω σύστημα.
 (β) Σχεδιάστε τον transposed γράφο του ερωτήματος α).

Λύση:

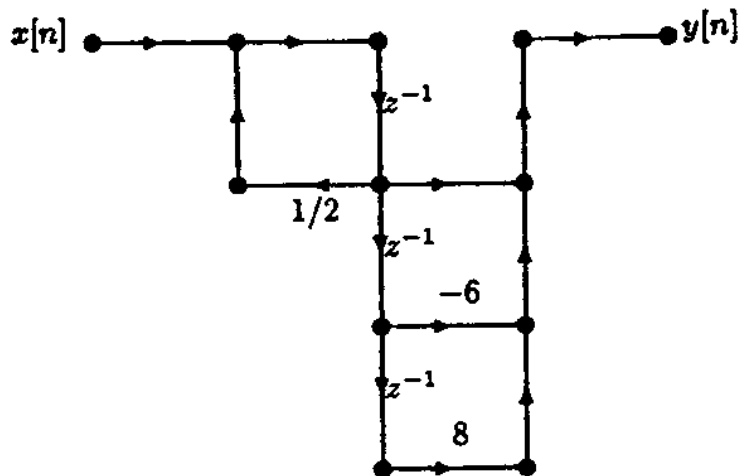
- (α) Το σύστημα $H(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{z^{-1}(1 - 2z^{-1})(1 - 4z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = \frac{z^{-1} - 6z^{-2} + 8z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

που είναι της μορφής

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

Άρα κατ' ευθείαν μπορούμε να σχεδιάσουμε το γραφο, σύμφωνα με τη θεωρία. Ο γράφος φαίνεται στο Σχήμα 15.



Σχήμα 15: Σχήμα Άσκησης 8α

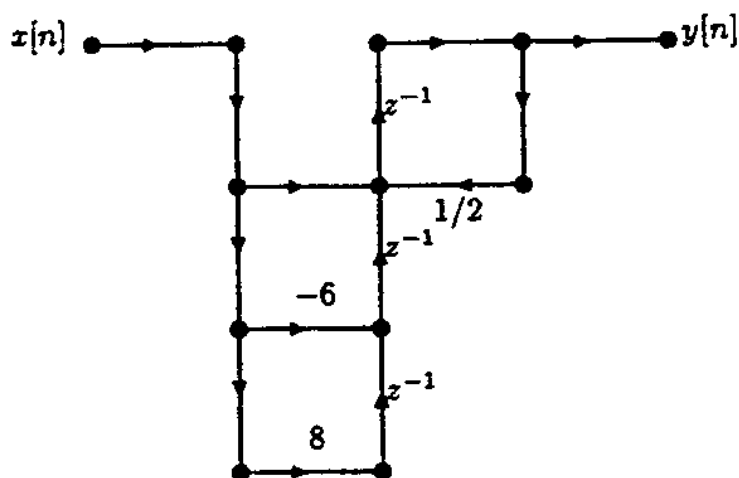
- (β) Για να σχεδιάσουμε τον transposed γράφο, αντιστρεφουμε τη φορά των βελών στο γράφο, και αλλάζουμε θέση την είσοδο με την έξοδο. Άρα ο ζητούμενος γράφος φαίνεται στο Σχήμα 16.

9. Σχεδιάστε τον Direct Form I γράφο του συστήματος

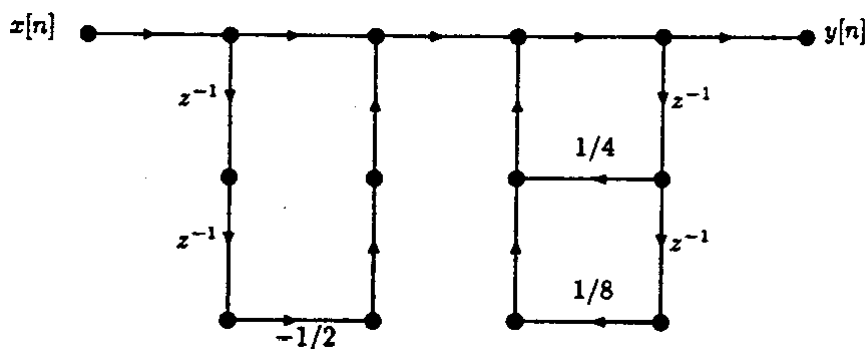
$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Λύση:

Το σύστημα είναι ήδη στη μορφή $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$, άρα μπορούμε κατ' ευθείαν να σχεδιάσουμε τον Direct Form I γράφο, όπως στο Σχήμα 17.



Σχήμα 16: Σχήμα Άσκησης 86



Σχήμα 17: Σχήμα Άσκησης 9

10. Σχεδιάστε τον Direct Form II γράφο του συστήματος

$$H(z) = \frac{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Λύση :

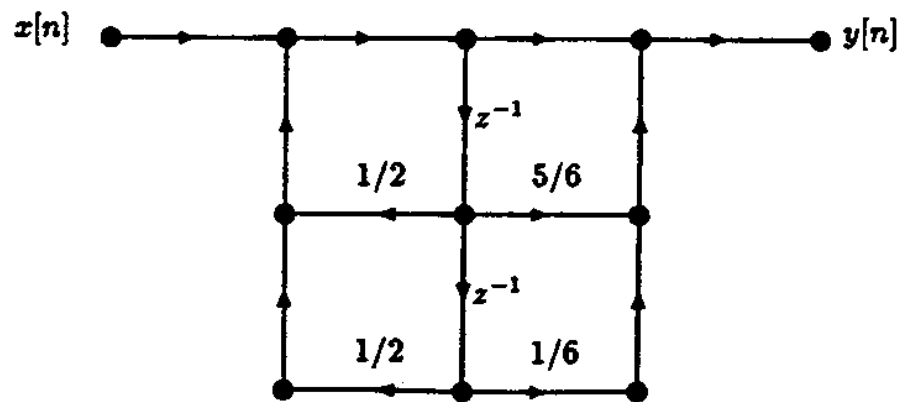
Ο Direct Form II γράφος προκύπτει εύκολα, μια και το $H(z)$ είναι στη μορφή που θέλουμε. Άρα ο γράφος είναι αυτός του Σχήματος 18.

11. Σχεδιάστε τον transposed Direct Form II γράφο του συστήματος

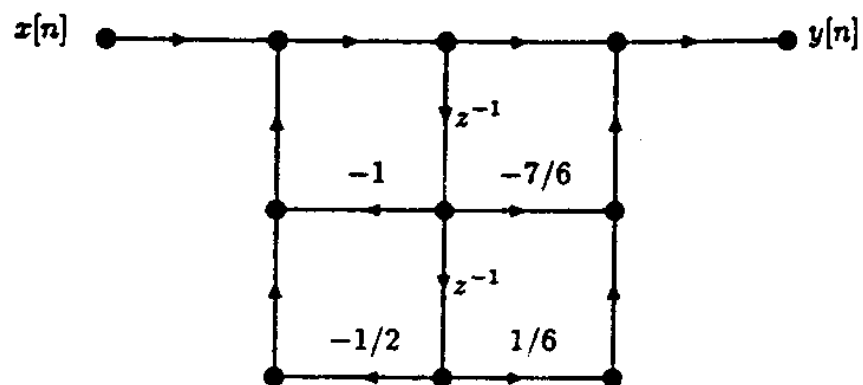
$$H(z) = \frac{1 - \frac{7}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}{1 + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Λύση :

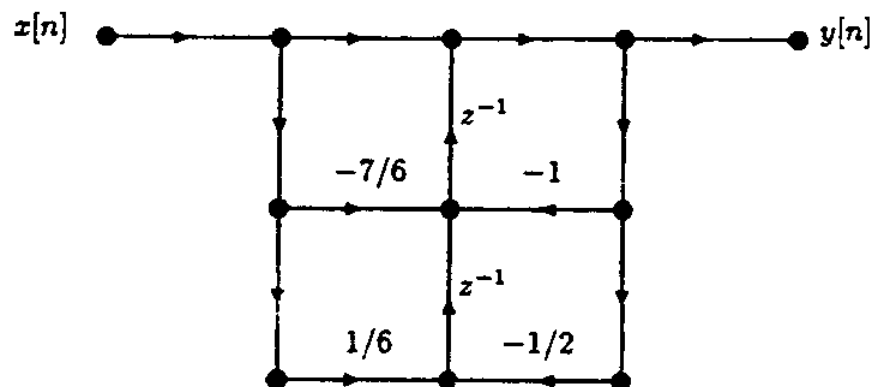
Για να σχεδιάσουμε τον transposed Direct Form II γράφο, πρέπει πρώτα να σχεδιάσουμε τον Direct Form II γράφο. Το $H(z)$ είναι στην κατάλληλη μορφή, και άρα ο γράφος θα είναι όπως στο Σχήμα 19. Η transposed μορφή του Direct Form II γράφου σχεδιάζεται αναστρέφοντας τη φορά των βελών στο γράφο, και αλλαζοντας την είσοδο με την έξοδο. Άρα θα είναι όπως στο Σχήμα 20.



Σχήμα 18: Σχήμα Άσκησης 10



Σχήμα 19: Σχήμα Άσκησης 11-Ι



Σχήμα 20: Σχήμα Άσκησης 11-II