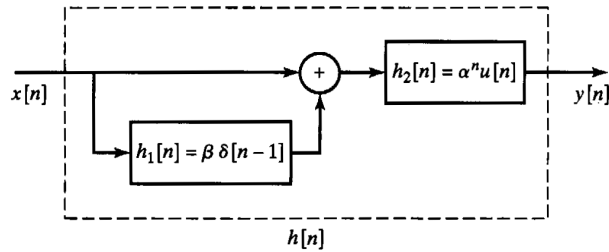


Ασκήσεις με το Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου

3 Νοεμβρίου 2018

1. Έστω το σύστημα του Σχήματος 1.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1

- (α') Βρείτε την χρονστική απόκριση $h[n]$ του συνολικού συστήματος.
- (β') Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα του συνολικού συστήματος.
- (γ') Βρείτε την εξίσωση διαφορών που σχετίζει την είσοδο με την έξοδο του συστήματος.
- (δ') Είναι το σύστημα αιτιατό; Είναι το σύστημα ευσταθές; Αν όχι, υπο ποιές συνθήκες μπορεί να είναι;

Λύση:

(α') Η έξοδος εκφράζεται ως

$$y[n] = h_2[n] * (h_1[n] * x[n] + x[n]) = h_2[n] * ((h_1[n] + \delta[n]) * x[n]) \quad (1)$$

$$= x[n] * (h_1[n] + \delta[n]) * h_2[n] \quad (2)$$

άρα είναι εμφανές ότι $h[n] = (h_1[n] + \delta[n]) * h_2[n] = a^n u[n] + \beta a^{n-1} u[n-1]$.

(β') Θα είναι, με χρήση γνωστών ζευγών και ιδιοτήτων,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \beta e^{-j\omega} = \frac{1 + \beta e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad |a| < 1 \quad (3)$$

(γ') Θα είναι

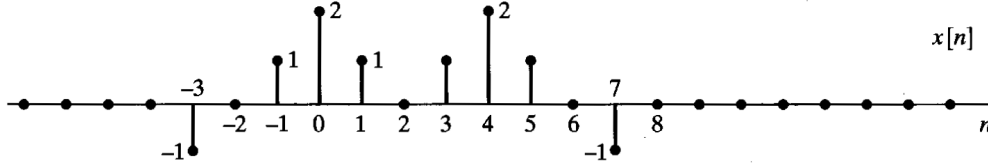
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 + \beta e^{-j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}} \iff \quad (4)$$

$$Y(e^{j\omega})(1 - ae^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})(1 + \beta e^{-j\omega}) \iff \quad (5)$$

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] + \beta x[n-1] \quad (6)$$

(δ') Επειδή από α) ερώτημα, ισχύει $h[n] = 0, n < 0$, το σύστημα είναι αιτιατό. Αν το σύστημα είναι ευσταθές, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier του. Από το β) ερώτημα, αυτό ισχύει μόνον όταν $|a| < 1$.

2. Έστω $X(e^{j\omega})$ ο μετασχηματισμός Fourier του $x[n]$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 2. Βρείτε τα παρακάτω,



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 2

ΧΩΡΙΣ να υπολογίσετε ρητά τον $X(e^{j\omega})$.

(α') $X(e^{j\omega})|_{\omega=0}$

(β') $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi}$

(γ') $\angle X(e^{j\omega})$

(δ') $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$

(ε') Βρείτε και σχεδιάστε το σήμα που έχει μετασχηματισμός Fourier τον $X(e^{-j\omega})$

(ς') Βρείτε και σχεδιάστε το σήμα που έχει μετασχηματισμός Fourier τον $\Re\{X(e^{j\omega})\}$

Λύση:

(α') $X(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sum_{n=-3}^7 x[n]e^{j\omega n}|_{\omega=0} = \sum_{n=-3}^7 x[n] = 6$

(β') $X(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-3}^7 x[n]e^{j\omega n}|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-3}^7 x[n]e^{-j\pi n} = \sum_{n=-3}^7 x[n](-1)^n = 2$

(γ') Το σήμα στο χρόνο είναι συμμετρικό ως προς $n = 2$. Αν ήταν συμμετρικό ως προς $n = 0$ (δηλ. άρτιο), η φάση του θα ήταν μηδέν. Έστω $y[n]$ αυτό το σήμα, με $x[n] = y[n - 2]$. Λόγω όμως της μετατόπισης κατά $n_0 = 2$ δεξιά, ο μετασχηματισμός Fourier θα είναι $X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega}$, και άρα η φάση θα είναι $\arg[X(e^{j\omega})] = -2\omega$.

(δ') $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega 0} d\omega = 2\pi x[0] = 4\pi$.

(ε') Ψάχνουμε ένα $y[n]$ που έχει μετασχηματισμός Fourier τον $X(e^{-j\omega})$. Είναι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} \quad (7)$$

Άρα $y[n] = x[-n]$, το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 3α'.

(ς') Δείξαμε προηγουμένως στο γ) ερώτημα ότι

$$X(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})e^{-j2\omega} \quad (8)$$

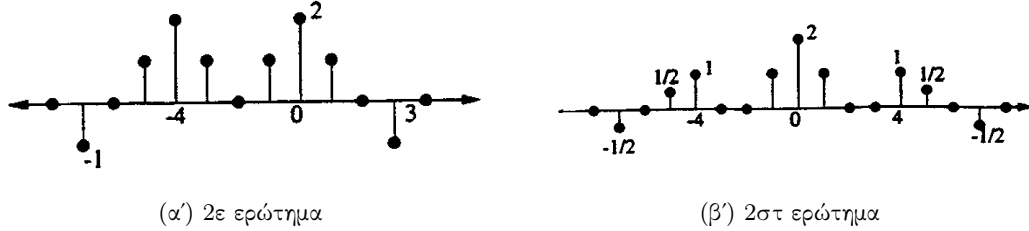
με $Y(e^{j\omega})$ το μετασχ. Fourier του σήματος $y[n]$, που είπαμε ότι είναι συμμετρικό ως προς $n = 0$. Άρα

$$\Re\{X(e^{j\omega})\} = X_R(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega}) \cos(2\omega) = \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) \quad (9)$$

Παίρνοντας αντίστροφο μετασχ. Fourier, θα έχουμε

$$F^{-1}\{\Re\{X(e^{j\omega})\}\} = \frac{1}{2}y[n+2] + \frac{1}{2}y[n-2] = \frac{1}{2}x[n+4] + \frac{1}{2}x[n] \quad (10)$$

και το οποίο φαίνεται στο Σχήμα 3β'.



Σχήμα 3: Σχήματα Άσκησης 2

3. Ένα ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad (11)$$

- (α') Βρείτε το $h[n]$, δηλ. την κρουστική απόκριση του συστήματος.
- (β') Είναι το σύστημα ευσταθές;
- (γ') Βρείτε το $H(e^{j\omega})$, την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος. Χρησιμοποιήστε τριγωνομετρικές ταυτότητες για να πάρετε μια απλή έκφραση για το $H(e^{j\omega})$.
- (δ') Σχεδιάστε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης σε συχνότητα.
- (ε') Θεωρήστε το νέο σύστημα $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$. Βρείτε το $h_1[n]$, δηλ. την κρουστική απόκριση του νέου συστήματος.

Λύση:

(α') Προφανώς $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$.

(β') Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί για $|x[n]| < B_x$ δίνει $|y[n]| < 4B_x = B_y$

(γ') Είναι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + 2X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + X(e^{j\omega})e^{-j2\omega} \quad (12)$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})(1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) \quad (13)$$

$$Y(e^{j\omega})/X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = H(e^{j\omega}) \quad (14)$$

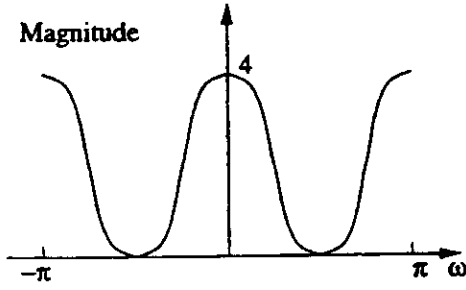
$$H(e^{j\omega}) = 2e^{-j\omega} \left(\frac{1}{2}e^{j\omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} \right) = 2e^{-j\omega}(\cos(\omega) + 1) \quad (15)$$

(δ') Το φάσμα πλάτους και φάσης φαίνεται στο Σχήμα 4. Προφανώς είναι $|H(e^{j\omega})| = |2e^{-j\omega}(\cos(\omega) + 1)| = 2|\cos(\omega) + 1|$ και $\angle H(e^{j\omega}) = -\omega$.

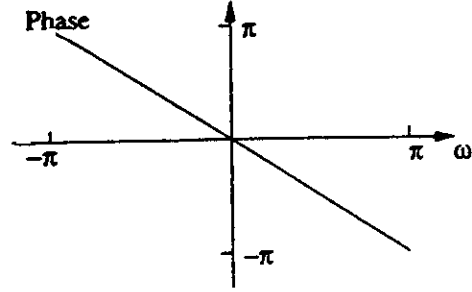
(ε') Προφανώς θα είναι

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)}) = 1 + 2e^{-j(\omega+\pi)} + e^{-j2(\omega+\pi)} = 1 + 2e^{-j\omega}e^{-j\pi} + e^{-j2\omega}e^{-j2\pi} \quad (16)$$

$$= 1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} \longleftrightarrow h_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \quad (17)$$



(α') Φάσμα πλάτους



(β') Φάσμα φάσης

Σχήμα 4: Φάσμα πλάτους και φάσης Άσκησης 3

4. Η απόκριση σε συχνότητα ενός ΓΧΑ συστήματος είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/4}, \quad -\pi < \omega \leq \pi \quad (18)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος, $y[n]$, όταν η είσοδος είναι $x[n] = \cos(5\pi n/2)$. Εκφράστε την απάντησή σας σε όσο πιο απλή μορφή γίνεται.

Λύση:

Η είσοδος μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \cos(5\pi n/2) = \cos((4\pi + \pi)n/2) = \cos(\pi n/2) = \frac{1}{2}e^{j\pi n/2} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n/2} \quad (19)$$

και γνωρίζουμε ότι τα εκθετικά της μορφής $e^{j\omega_0 n}$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος, άρα θα είναι:

$$y[n] = \frac{1}{2}H(e^{j\pi/2})e^{j\pi n/2} + \frac{1}{2}H(e^{-j\pi/2})e^{-j\pi n/2} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/8}e^{j\pi n/2} + \frac{1}{2}e^{j\pi/8}e^{-j\pi n/2} \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2}e^{j(\pi n/2 - \pi/8)} + \frac{1}{2}e^{-j(\pi n/2 - \pi/8)} = \cos\left(\pi\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{8}\right)\right) \quad (21)$$

$$(22)$$

5. Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης ενός σήματος $x[n]$ ορίζεται ως

$$R_x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[n+k] \quad (23)$$

(α') Δείξτε ότι υπάρχει σήμα $g[n]$ τέτοιο ώστε $R_x[n] = x[n] * g[n]$, και βρείτε αυτό το $g[n]$.

(β') Δείξτε ότι ο μετασχ. Fourier της $R_x[n]$ είναι ίσος με $|X(e^{j\omega})|$.

Λύση:

(α') Έχουμε

$$R_x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*[k]x[n+k] \quad (\text{θέτουμε } -r = k) \quad (24)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x^*[-r]x[n-r] = x^*[-n] * x[n] \quad (25)$$

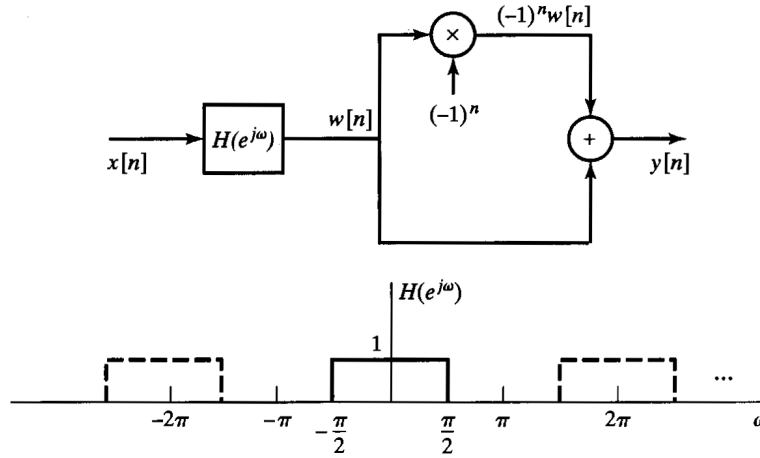
Άρα θα είναι $g[n] = x^*[-n]$.

(β') Θα είναι

$$R_X(e^{j\omega}) = F\{x^*[-n]\}F\{x[n]\} = X^*(\omega)X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2 \quad (26)$$

6. Για το σύστημα του Σχήματος 5, βρείτε την έξοδο $y[n]$ αν για την είσοδο $x[n] = \delta[n]$ και το $H(e^{j\omega})$ είναι ένα ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (27)$$



Σχήμα 5: Σχήμα Άσκησης 7

Λύση:

Ο μετασχ. Fourier του σήματος $x[n] = \delta[n]$ είναι $X(e^{j\omega}) = 1$, για κάθε ω , άρα όταν περάσει αυτό το σήμα μέσα από το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο $H(e^{j\omega})$, η έξοδος $w[n]$ θα είναι το ίδιο το φίλτρο, δηλ.

$$W(\omega) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (28)$$

Η έξοδος $y[n]$ θα ισούται με

$$y[n] = (-1)^n w[n] + w[n] = [(-1)^n + 1]w[n] = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττά} \\ 2w[n], & n \text{ άρτια} \end{cases} \quad (29)$$

Αρκεί να βρούμε το $w[n]$. Θα είναι

$$w[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jn} e^{j\omega n} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \quad (30)$$

$$= \frac{1}{j2\pi n} (e^{j\pi n/2} - e^{-j\pi n/2}) = \frac{1}{j2\pi n} 2j \sin(\pi n/2) \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n/2} = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \quad (32)$$

Όμως, παρατηρώντας τις τιμές του $w[n]$, βλέπουμε ότι

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 0 \\ (-1)^n / (\pi n), & n \text{ περιττά} \\ 0, & n \text{ άρτια} \end{cases} \quad (33)$$

Άρα συνολικά θα είναι

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττά} \\ 2w[n], & n \text{ άρτια} \end{cases} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \text{ άρτια}, n \neq 0 \\ 0, & n \text{ περιττά} \end{cases} \quad (34)$$

που ουσιαστικά είναι ο ορισμός της $\delta[n]$, άρα τελικά $y[n] = \delta[n]$.

Ένας άλλος τρόπος λύσης θα ήταν στο χώρο της συχνότητας. Μπορούμε να πούμε ότι

$$(-1)^n w[n] = e^{-j\pi n} w[n] \quad (35)$$

το οποίο έχει μετασχ. Fourier $W(\omega - \pi)$. Άρα η συνολική έξοδος $y[n]$ γράφεται

$$y[n] = e^{-j\pi n} w[n] + w[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = W(\omega - \pi) + W(\omega) = H(\omega - \pi) + H(e^{j\omega}) \quad (36)$$

Όμως εύκολα βλέπουμε ότι

$$H(\omega - \pi) = \begin{cases} 1, & |\omega - \pi| < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega - \pi| \leq \pi \end{cases} = \begin{cases} 1, & \pi/2 < \omega < 3\pi/2 \\ 0, & 3\pi/2 < \omega \leq 2\pi \end{cases} = \begin{cases} 1, & \pi/2 < |\omega| < \pi \\ 0, & |\omega| \leq \pi/2 \end{cases} \quad (37)$$

και

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (38)$$

οπότε το άθροισμά τους θα είναι

$$Y(e^{j\omega}) = H(\omega - \pi) + H(e^{j\omega}) = 1 \quad (39)$$

για κάθε ω . Άρα $y[n] = F^{-1}\{1\} = \delta[n]$.

7. Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/2}, \quad |\omega| < \pi \quad (40)$$

Αποφανθείτε αν το σύστημα είναι αιτιατό ή όχι. Δικαιολογήστε την απόφασή σας.

Λύση:

Ένα σύστημα είναι αιτιατό όταν για είσοδο $x[n] = 0, n < n_0$ τότε και η έξοδος είναι $y[n] = 0, n < n_0$. Άρα για μια είσοδο $x[n] = \delta[n - 1]$ θα πρέπει η έξοδος να είναι $y[n] = 0, n < 1$. Ξέρουμε ότι $x[n] = \delta[n - 1] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$, άρα

$$y[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j\omega}) d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) d\omega \quad (41)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega} e^{-j\omega/2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} e^{j3\omega/2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{3\pi} \quad (42)$$

που είναι $\neq 0$, οπότε το σύστημα είναι ΜΗ αιτιατό.

8. Μια συχνά χρησιμοποιούμενη αριθμητική πράξη είναι η λεγόμενη πρώτη διαφοράριση, και ουσιαστικά είναι η διακριτή έκδοση της παραγώγισης. Η πράξη αυτή ορίζεται ως

$$y[n] = \nabla(x[n]) = x[n] - x[n - 1] \quad (43)$$

όπου το $x[n]$ είναι η είσοδος και $y[n]$ είναι η έξοδος του συστήματος.

(α') Δείξτε ότι το σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο.

(β') Βρείτε την χρονστική απόκριση του συστήματος.

(γ') Βρείτε και σχεδιάστε την απόκριση σε συχνότητα (φάσμα πλάτους και φάσης).

(δ') Δείξτε ότι αν

$$x[n] = f[n] * g[n] \quad (44)$$

τοτε

$$\nabla(x[n]) = \nabla(f[n] * g[n]) = f[n] * \nabla(g[n]) = \nabla f[n] * g[n] \quad (45)$$

όπου $*$ δηλώνει τη συνέλιξη.

Λύση:

(α') Για είσοδο $ax_1[n]$ η έξοδος είναι

$$y_1[n] = ax_1[n] - ax_1[n-1]$$

ενώ για είσοδο $\beta x_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y_2[n] = \beta x_2[n] - \beta x_2[n-1]$$

Για είσοδο $ax_1[n] + \beta x_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$y[n] = ax_1[n] + \beta x_2[n] - ax_1[n-1] - \beta x_2[n-1]$$

που είναι το ίδιο με το άθροισμα των επιμέρους εξόδων, άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

Για είσοδο $x[n - n_0]$, η έξοδος είναι

$$y[n] = x[n - n_0] - x[n - n_0 - 1]$$

και η έξοδος

$$y[n - n_0] = x[n - n_0] - x[n - n_0 - 1]$$

άρα είναι χρονικά αμετάβλητο.

(β') Προφανώς, η χρονστική απόκριση υπολογίζεται θέτοντας $x[n] = \delta[n]$, και άρα είναι

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \Rightarrow h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

(γ') Είναι

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} \quad (46)$$

το οποίο γράφεται ως

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j \tan^{-1} \frac{\Im\{H(e^{j\omega})\}}{\Re\{H(e^{j\omega})\}}} \quad (47)$$

Είναι

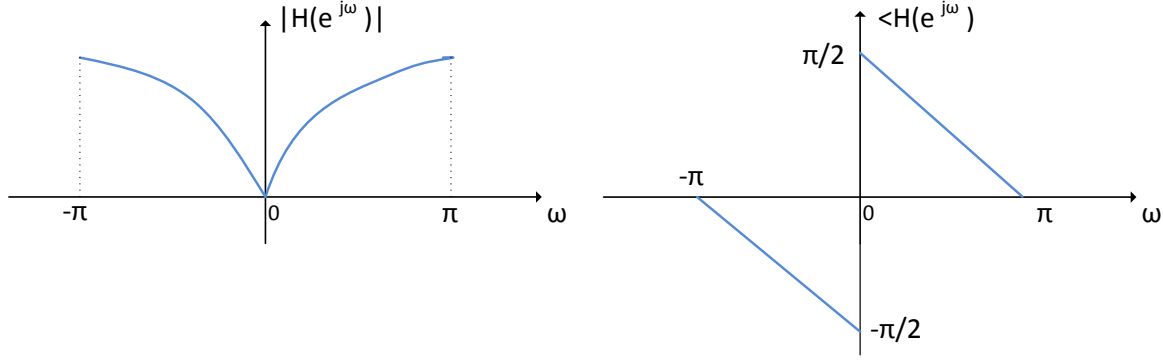
$$|H(e^{j\omega})| = |1 - e^{-j\omega}| = |1 - \cos(-\omega) - j \sin(-\omega)| = |(1 - \cos(\omega)) + j \sin(\omega)| \quad (48)$$

$$= \sqrt{1 - 2\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)} = \sqrt{2 - 2\cos(\omega)} \quad (49)$$

και

$$\angle H(e^{j\omega}) = \arctan \frac{\sin(\omega)}{1 - \cos(\omega)} \quad (50)$$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο Σχήμα 6.



Σχήμα 6: Σχήματα Άσκησης 9

(δ') Είδαμε ότι

$$\nabla x[n] = x[n] * h[n] = x[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = x[n] - x[n-1] \quad (51)$$

οπότε για $x[n] = f[n] * g[n]$ θα είναι

$$\nabla f[n] * g[n] = f[n] * g[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = f[n] * (g[n] - g[n-1]) = f[n] * \nabla g[n] \quad (52)$$

ή και

$$\nabla f[n] * g[n] = f[n] * g[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = (f[n] - f[n-1]) * g[n] = \nabla f[n] * g[n] \quad (53)$$

9. α) Βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του ΓΧΑ του οποίου η είσοδος και η έξοδος ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad (54)$$

- β) Βρείτε την εξίσωση διαφορών που χαρακτηρίζει το σύστημα με απόκριση σε συχνότητα

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}} \quad (55)$$

Λύση:

α) Είναι

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \longleftrightarrow \quad (56)$$

$$Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) + 2X(e^{j\omega})e^{-j\omega} + X(e^{j\omega})e^{-j2\omega} \quad (57)$$

$$Y(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})(1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) \quad (58)$$

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (59)$$

β) Είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}} \quad (60)$$

$$Y(e^{j\omega})(1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}) = X(e^{j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}) \quad (61)$$

$$Y(e^{j\omega}) + \frac{1}{2}e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + e^{-j3\omega}X(e^{j\omega}) \longleftrightarrow \quad (62)$$

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{3}{4}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] + x[n-3] \quad (63)$$

που είναι και το ζητούμενο.

10. Θεωρήστε ένα σύστημα με είσοδο $x[n]$ και έξοδο $y[n]$ που ικανοποιούν την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = ny[n-1] + x[n] \quad (64)$$

Το σύστημα είναι αιτιατό και ικανοποιεί τις συνθήκες αρχικής ηρεμίας, δηλ. $x[n] = 0$, $n < n_0$, τότε $y[n] = 0$, $n < n_0$.

(α') Αν $x[n] = \delta[n]$, βρείτε το $y[n]$ για κάθε n .

(β') Είναι το σύστημα γραμμικό; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(γ') Είναι το σύστημα χρονικά αμετάβλητο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση:

(α') Αν $x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$ τότε ξέρουμε ότι η έξοδος αποτελεί την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος. Άρα

$$y[n] = 0, \quad n < 0 \quad (65)$$

$$y[0] = 0y[-1] + 1 = 1 \quad (66)$$

$$y[1] = 1y[0] = 1 \quad (67)$$

$$y[2] = 2y[1] = 2 \quad (68)$$

$$y[3] = 3y[2] = 6 \quad (69)$$

$$y[4] = 4y[3] = 24 \quad (70)$$

$$y[5] = 5y[4] = 120 \quad (71)$$

$\vdots$

$$y[n] = h[n] = n!u[n] \quad (72)$$

(β') Έστω η είσοδος $x[n] = a\delta[n] + b\delta[n]$, τότε θα έχουμε

$$y[n] = 0, \quad n < 0 \quad (73)$$

$$y[0] = a + b \quad (74)$$

$$y[1] = a + b \quad (75)$$

$$y[2] = 2(a + b) \quad (76)$$

$$y[3] = 6(a + b) \quad (77)$$

$$y[4] = 24(a + b) \quad (78)$$

$\vdots$

Επειδή η έξοδος του αθροίσματος των δυο σημάτων εισόδου είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους εξόδων, το σύστημα είναι γραμμικό.

(γ') Έστω η είσοδος $x[n] = \delta[n-1]$, τότε η παραπάνω αναδρομή μας δίνει

$$y[n] = 0, \quad n < 0 \quad (79)$$

$$y[0] = 1 \quad (80)$$

$$y[1] = 2 \quad (81)$$

$$y[2] = 6 \quad (82)$$

$$y[3] = 24 \quad (83)$$

$\vdots$

Χρησιμοποιώντας την $h[n]$ από το α) ερώτημα, έχουμε ότι η $h[n-1]$ δίνει διαφορετική ακολουθία τιμών, άρα

$$h[n-1] = (n-1)!u[n-1] \neq y[n]|_{x[n]=\delta[n-1]} \quad (84)$$

και άρα το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

11. Θεωρήστε την εξίσωση διαφορών ενός ΓΧΑ αιτιατού συστήματος

$$y[n] - \frac{1}{a}y[n-1] = x[n-1] \quad (85)$$

(α') Βρείτε την χρουστική απόκριση του συστήματος, $h[n]$, ως συνάρτηση του a .

(β') Για ποιό εύρος τιμών του a είναι το σύστημα ευσταθές;

Λύση:

(α') Αφού το σύστημα είναι αιτιατό, τότε $h[n] = 0, n < 0$. Θεωρούμε την εξίσωση $h[n] = \frac{1}{a}h[n-1] + \delta[n-1]$, και είναι

$$h[0] = 0 \quad (86)$$

$$h[1] = 1 \quad (87)$$

$$h[2] = \frac{1}{a} \quad (88)$$

$$h[3] = \frac{1}{a^2} \quad (89)$$

$$h[4] = \frac{1}{a^3} \quad (90)$$

$\vdots$

$$h[n] = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u[n-1] \quad (91)$$

(β') Προφανώς το $h[n]$ πρέπει να είναι απολύτως αθροισμο για να είναι ευσταθές, δηλ.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |1/a^{n-1}| = \sum_{n=0}^{\infty} |1/a^n| = \frac{1}{1-1/a} \quad (92)$$

κι αυτό συμβαίνει μόνον όταν $|1/a| < 1 \Rightarrow |a| > 1$.

12. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier των παρακάτω σημάτων.

- $j \sin(\omega) \cos(5\omega)$
- $\cos^2(\omega) + \sin^2(3\omega)$
- $1 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} - 4e^{-j3\omega} + e^{-j10\omega}$

Λύση:

- Θα είναι

$$\begin{aligned} j \sin(\omega) \cos(5\omega) &= j \left(\frac{1}{2j} e^{j\omega} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega} \right) \left(\frac{1}{2} e^{j5\omega} + \frac{1}{2} e^{-j5\omega} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{j\omega} - \frac{1}{2} e^{-j\omega} \right) \left(\frac{1}{2} e^{j5\omega} + \frac{1}{2} e^{-j5\omega} \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{j6\omega} + \frac{1}{4} e^{-j4\omega} - \frac{1}{4} e^{j4\omega} - \frac{1}{4} e^{-j6\omega} \longleftrightarrow \\ &\longleftrightarrow \frac{1}{4} \delta[n+6] + \frac{1}{4} \delta[n-4] - \frac{1}{4} \delta[n+4] - \frac{1}{4} \delta[n-6] \end{aligned} \quad (93)$$

- Έχουμε

$$\begin{aligned}
\cos^2(\omega) + \sin^2(3\omega) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(6\omega) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cos(2\omega) - \frac{1}{2} \cos(6\omega) \\
&= 1 + \frac{1}{4} e^{j2\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega} - \frac{1}{4} e^{j6\omega} - \frac{1}{4} e^{-j6\omega} \longleftrightarrow \\
&\longleftrightarrow \delta[n] + \frac{1}{4} \delta[n+2] + \frac{1}{4} \delta[n-2] - \frac{1}{4} \delta[n+6] - \frac{1}{4} \delta[n-6] \quad (94)
\end{aligned}$$

- Είναι

$$1 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega} - 4e^{-j3\omega} + e^{-j10\omega} \longleftrightarrow \delta[n] + 3\delta[n-1] - 4\delta[n-3] + \delta[n-10] \quad (95)$$