

Κεφάλαιο 17

Συστήματα στο χώρο του Z

Στο προηγούμενο κεφάλαιο συζητήσαμε τη συμπεριφορά σημάτων και ΓΧΑ συστημάτων στο πεδίο του μετασχηματισμού Z. Η συζήτησή μας ήταν περισσότερο ποιοτική και διαισθητική, και λιγότερο ποσοτική. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα αναπτύξουμε τα εργαλεία για τη μελέτη σημάτων και ΓΧΑ συστημάτων στο πεδίο του μετασχη. Z με περισσότερη ακρίβεια, και θα γνωρίσουμε χρήσιμες κατηγορίες ΓΧΑ συστημάτων που προκύπτουν πολύ συχνά σε πρακτικές εφαρμογές.

17.1 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Σίγουρα γνωρίζετε το πολύ συνηθισμένο τεστ που κάνουμε για την καρδιά μας, το περίφημο ηλεκτροκαρδιογράφημα (electrocardiogram - ECG). Το ECG καταγράφει την ηλεκτρική δραστηριότητα της καρδιάς που μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια ενός καρδιακού κύκλου. Ένας καρδιακός κύκλος αναφέρεται σε έναν πλήρη χτύπο της καρδιάς, από την αρχή του έως τον επόμενο χτύπο, και περιλαμβάνει πολλαπλά επίπεδα πλήρωσης και εκκένωσης των τεσσάρων θαλάμων της καρδιάς. Η καταγραφή γίνεται ως εξής: ο καρδιολόγος τοποθετεί μεταλλικά ηλεκτρόδια επαλειμμένα με αγωγίμο gel σε διάφορες θέσεις στο σώμα ή γύρω από το στήθος, ώστε να “πιάσει” αυτά τα καρδιακά ηλεκτρικά σήματα που γεννιούνται από αποπολώσεις των μυών της καρδιάς, και οι οποίες διαδίδονται σε παλλόμενα ηλεκτρικά κύματα προς το δέρμα. Μια φορητή συσκευή ηλεκτροκαρδιογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 17.1.

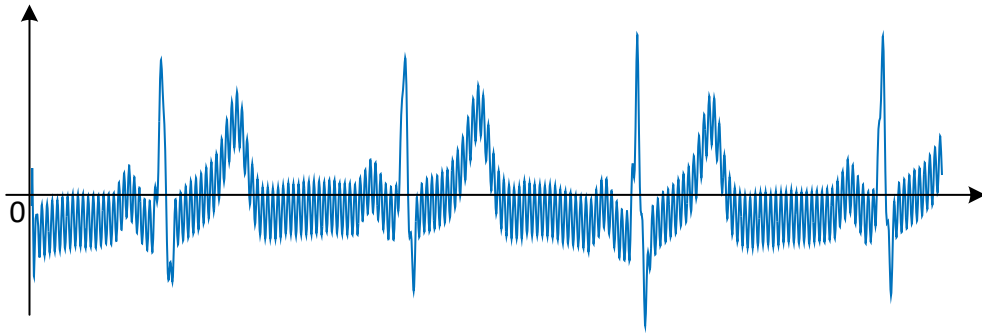


Σχήμα 17.1: Φορητή συσκευή ηλεκτροκαρδιογραφήματος.

Δυστυχώς, τα ηλεκτρόδια καταγράφουν επίσης σήματα από άλλες ηλεκτρικές πηγές, συνήθως αρμονικές στα 50 Hz, που είναι η συχνότητα των συσκευών που έχουμε στα σπίτι μας στην Ελλάδα (σε άλλες χώρες, η συχνότητα λειτουργίας τους είναι 60 Hz). Ένα παράδειγμα ενός “θορυβώδους” ηλεκτροκαρδιογραφήματος φαίνεται στο Σχήμα 17.2.

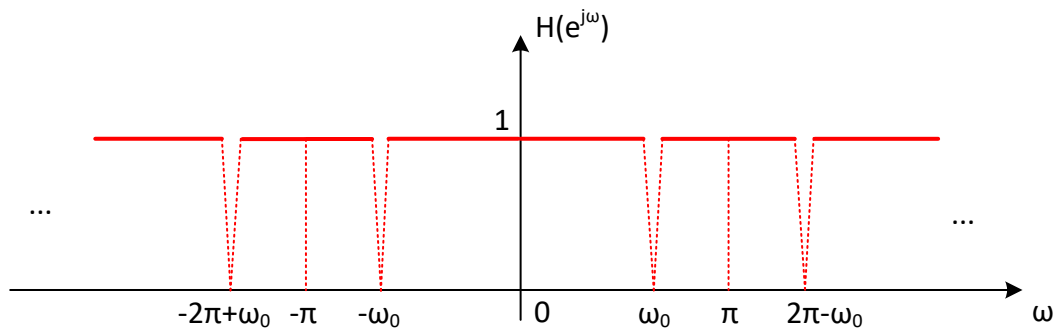
Θα επιθυμούσαμε να αφαιρέσουμε μια τέτοια ανεπιθύμητη παρεμβολή, ώστε να παραδίδεται στο γιατρό ένα καθαρό σήμα προς διάγνωση πιθανών καρδιολογικών προβλημάτων. Όμως θα θέλαμε ιδανικά να αφαιρεθεί μόνο το ανεπιθύμητο σήμα και τίποτε άλλο! Αυτό σημαίνει ότι απαιτείται η αφαίρεση μιας και μόνο συχνότητας, αυτής της ημιτονοειδούς παρεμβολής. Πρέπει να σας είναι προφανές ότι ένα τέτοιο ιδανικό σύστημα δεν είναι υλοποιήσιμο. Όμως, ένα ΓΧΑ σύστημα που αφαιρεί πολύ καλά την ημιτονοειδή παρεμβολή του Σχήματος 17.2 περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - 2\alpha \cos(\omega_0 n)y[n - 1] + \alpha^2 y[n - 2] = x[n] - 2\alpha \cos(\omega_0 n)x[n - 1] + x[n - 2] \quad (17.1)$$



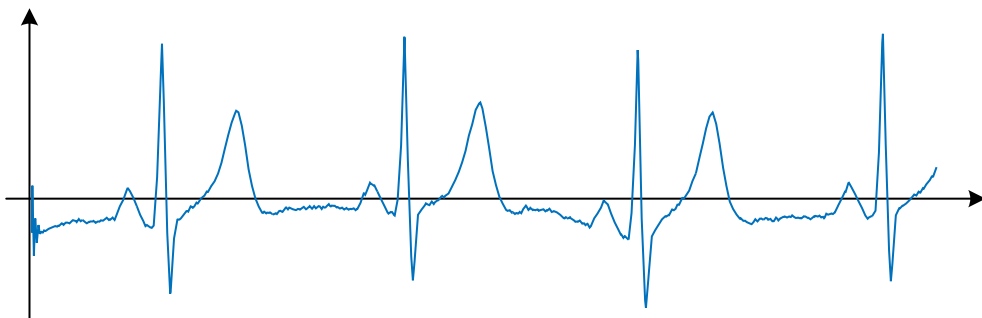
Σχήμα 17.2: Ηλεκτροκαρδιογράφημα με ημιτονοειδή θόρυβο.

με τιμές του α πολύ κοντά στη μονάδα και ω_0 την τιμή της συχνότητας που επιθυμούμε να αφαιρέσουμε. Τέτοια συστήματα ονομάζονται *notch φίλτρα*. Η απόκριση πλάτους ενός τέτοιου συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 17.3.



Σχήμα 17.3: Απόκριση πλάτους *notch* φίλτρου.

Βλέπετε ότι το φίλτρο εξουδετερώνει μια και μόνο συχνότητα, την ω_0 , ενώ αφήνει αναλλοίωτες όλες τις υπόλοιπες. Το αποτέλεσμα εφαρμογής του φίλτρου φαίνεται στο Σχήμα 17.4.



Σχήμα 17.4: Αποτέλεσμα αποθρομβοποίησης ηλεκτροκαρδιογραφήματος με *notch* φίλτρο.

Πώς μπορεί κανείς όμως να το σχεδιάσει από το μηδέν; Πώς προέκυψε η Σχέση (17.1); Πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε συστήματα με τέτοιες (ή άλλες) συχνотικές αποκρίσεις, κατάλληλες για συγκεκριμένες εφαρμογές; Τέτοια ερωτήματα θα μπορείτε να απαντήσετε όταν ολοκληρώσετε αυτό το κεφάλαιο.

17.2 Η Συνάρτηση Μεταφοράς

Σήματα της μορφής

$$x[n] = (re^{j\omega})^n = z^n, \quad -\infty < n < \infty, \quad r > 0 \quad (17.2)$$

όπου r, ω είναι σταθερές, αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος. Ας το δείξουμε.

Γνωρίζουμε επίσης ότι η έξοδος ενός συστήματος, $y[n]$, συνδέεται με την είσοδο αυτού, $x[n]$, και με την

κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος, με την πράξη της συνέλιξης:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = H(z)z^n \quad (17.3)$$

Άρα, η ιδιοτιμή, που συμβολίζουμε με $H(z)$, είναι η

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad (17.4)$$

που δεν είναι άλλη από το μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ του συστήματος. Παρατηρήστε την ομοιότητα με την περίπτωση του μετασχ. Fourier (Παράγραφος 15.2.1). Στην περίπτωση του μετασχ. Z, ο μετασχ. Z της κρουστικής απόκρισης λέγεται **Συνάρτηση Μεταφοράς - Transfer Function**, γιατί - προφανώς - μας μεταφέρει από το πεδίο του χρόνου στο χώρο του Z.

Από τον Πίνακα 16.1, παρατηρούμε ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος, που αποτελείται από τη συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης και της εισόδου στο πεδίο του χρόνου, μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο του Z, δηλ.

$$y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow Y(z) = X(z)H(z), \quad R_Y \supseteq R_X \cap R_H \quad (17.5)$$

Ως τώρα βλέπετε ότι τα πράγματα μοιάζουν πάρα πολύ με ό,τι κάναμε στο μετασχ. Fourier - και έτσι είναι, μια και ο τελευταίος είναι, όπως είπαμε (υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις βέβαια), “εξειδίκευση” του μετασχ. Z πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Θα ήταν πολύ χρήσιμο για τη μελέτη μας να διαχωρίσουμε τη μελέτη των συστημάτων στο χώρο του Z σε δυο κατηγορίες, σύμφωνα με τη διάρκεια της κρουστικής τους απόκρισης.

17.2.1 Συστήματα Άπειρης και Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης

Μια σημαντική κατηγοριοποίηση των ΓΧΑ συστημάτων έχει να κάνει με τη διάρκεια της κρουστικής απόκρισής τους, $h[n]$. Ας γνωρίσουμε αυτήν την κατηγοριοποίηση και ας δούμε τι συμβαίνει στο καθένα στο χώρο της συχνότητας (υπό τη γενική περιγραφή στο χώρο του Z).

17.2.2 Συστήματα Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης - Finite Impulse Response (FIR)

Συστήματα που περιγράφονται από κρουστική απόκριση η οποία έχει πεπερασμένη διάρκεια (δηλ. είναι μη μηδενική μόνο για συγκεκριμένο και πεπερασμένο διάστημα δειγμάτων $[n_1, n_2]$) λέγονται συστήματα *Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης*, ή πιο σύντομα, FIR συστήματα. Η γενική τους μορφή δίνεται ως

$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^{N_2} b_k \delta[n-k], \quad N_1, N_2 > 0 \quad (17.6)$$

δηλ. αποτελούν πεπερασμένο άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα. Στην ειδική περίπτωση που το σύστημα είναι αιτιατό, τότε

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N_2} b_k \delta[n-k], \quad N_2 > 0 \quad (17.7)$$

ενώ αν είναι αντι-αιτιατό, θα είναι

$$h[n] = \sum_{k=-N_1}^0 b_k \delta[n-k], \quad N_1 > 0 \quad (17.8)$$

Για παράδειγμα, το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση

$$h[n] = 3\delta[n-1] + 5\delta[n-2] - \frac{1}{2}\delta[n-5] \quad (17.9)$$

είναι ένα αιτιατό FIR σύστημα. Επίσης, το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = 2x[n] + 3x[n-2] \quad (17.10)$$

είναι ένα FIR σύστημα, γιατί αν θέσουμε $x[n] = \delta[n]$ και θεωρήσουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες, παίρνουμε $h[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n-2]$, που είναι προφανώς πεπερασμένης διάρκειας χροστική απόκριση. Θυμηθείτε ότι ο ορισμός της χροστικής απόκρισης είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται μια συνάρτηση Δέλτα, $\delta[n]$, και οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές.

Μεταφερόμενοι στο χώρο της συχνότητας, ένα αιτιατό FIR σύστημα εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση του $z-1$, ως

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_2} b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{N_2} \frac{b_k z^{N_2-k}}{z^{N_2}} \quad (17.11)$$

και πρέπει να σας είναι προφανές ότι έχει πόλους μόνο στη θέση $z = 0$, τάξης N_2 . Για παράδειγμα το παραπάνω σύστημα

$$h[n] = 3\delta[n-1] + 5\delta[n-2] - \frac{1}{2}\delta[n-5] \longleftrightarrow H(z) = 3z^{-1} + 5z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-5} = \frac{3z^4 + 5z^3 - \frac{1}{2}}{z^5} \quad (17.12)$$

βλέπετε ότι έχει 5 πόλους μόνο στο $z = 0$. Με την ίδια ακριβώς λογική μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση XXXX) ότι για ένα αντι-αιτιατό σύστημα, οι πόλοι του βρίσκονται μόνο στο $z = \infty$, ενώ για ένα μη αιτιατό, οι πόλοι του θα βρίσκονται μόνο στο $z = 0$ και στο $z = \infty$.

Τα παραπάνω αποτελούν κύριο χαρακτηριστικό των FIR συστημάτων: **οι πόλοι τους βρίσκονται είτε στο $z = 0$ είτε στο $z = \infty$, είτε και στα δυο.**

17.2.3 Συστήματα Άπειρης Χροστικής Απόκρισης - Infinite Impulse Response (IIR)

Υπάρχουν όμως και χροστικές αποκρίσεις που είναι άπειρες σε διάρκεια, και περιγράφονται εν γένει στο χώρο του μετασχ. Ζ ως λόγος πολωνύμων με μια συνάρτηση μεταφοράς που έχει πόλους και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο, δηλ.

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})}, \quad R_H \quad (17.13)$$

η οποία μπορεί να απλοποιηθεί ως

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-M} B_k z^{-k} + \sum_{k=1, k \neq i}^M \frac{A_k}{1 - a_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^S \frac{C_m}{(1 - a_i z^{-1})^m} \quad (17.14)$$

και αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε η Σχέση (17.14) δίνει την χροστική απόκριση $h[n]$ ως

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-M} B_k \delta[n-k] + \sum_{k=1, k \neq i}^M A_k a_k^n u[n] + \sum_{m=1}^S C_m \frac{(n+1) \cdots (n+m-1)}{(m-1)!} a_i^n u[n] \quad (17.15)$$

Ένα τέτοιο παράδειγμα χροστικής απόκρισης είναι η $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$. Τέτοια συστήματα λέγονται *Συστήματα Άπειρης Χροστικής Απόκρισης - Infinite Impulse Response*, και εκφράζονται στο χώρο του Ζ μέσω ρητών συναρτήσεων μεταφοράς (δηλ. λόγου πολωνύμων του z^{-1}) με πόλους και μηδενικά οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο.

Στη συνέχεια θα δούμε τι συμβαίνει όταν οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι ρητές, μέσω παραδειγμάτων, και πως τα αντιμετωπίζουμε.

17.3 Εξισώσεις Διαφορών και Μετασχηματισμός Ζ

Στο διακριτό χρόνο, θεωρούμε ότι τα συστήματα περιγράφονται από μια εξίσωση διαφορών. Εν γένει λοιπόν, ο μετασχ. Ζ μας επιτρέπει να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις διαφορών πολύ εύκολα, μετατρέποντάς τες σε απλές αλγεβρικές!

Πιο συγκεκριμένα λοιπόν, έστω το σύστημα που περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών με σταθερούς συ-

ντελεστές a_k, b_l ,

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (17.16)$$

Έχουμε δει σε προηγούμενα κεφάλαια τον τρόπο λύσης μιας τέτοιας εξίσωσης διαφορών τόσο στο πεδίο του διακριτού χρόνου, όσο και σε αυτόν της συχνότητας. Τα προβλήματα που συναντήσαμε - και λύσαμε - ήταν τα ακόλουθα:

(α') Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που δεν είναι ΓΧΑ, δηλ. που έχει μη μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος - όπως θα θυμάστε - αποτελείται από δυο συνιστώσες: την απόκριση μηδενικής εισόδου $y_{zi}[n]$ και την απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$. Όμως ο δίπλευρος μετασχ. Z δεν περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του, άρα δεν μπορεί να μας δώσει την απόκριση μηδενικής εισόδου. Αυτό όμως μπορεί να το κάνει ο μονόπλευρος μετασχ. Z, ο οποίος (δείτε τον Πίνακα 16.1) περιλαμβάνει αρχικές συνθήκες στον υπολογισμό του! Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$y[n-k] \longleftrightarrow \sum_{i=1}^k z^{i-k} y[-i] + z^{-k} Y(z) \quad (17.17)$$

από το μονόπλευρο μετασχ. Z, για να μετατρέψουμε την εξίσωση διαφορών σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Z της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει (Άσκηση XXXX) ότι ο μετασχ. Z της εξόδου $Y(z)$ δίνεται σε αυτήν την περίπτωση ως

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) \quad (17.18)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) + \frac{\sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^k z^{i-l} x[-i] + \sum_{l=0}^M \sum_{i=1}^l z^{i-l} y[-i]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (17.19)$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) + \frac{\sum_{k=0}^N \sum_{i=1}^k z^{i-k} y[-i]}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (17.20)$$

αφού η είσοδος εφαρμόζεται πάντα σε χρονικές στιγμές $n \geq 0$. Παρατηρήστε πόσο εύκολα διαχωρίζονται οι αποκρίσεις μηδενικής εισόδου και μηδενικής κατάστασης.

(β') Η εύρεση της εξόδου ενός συστήματος που είναι ΓΧΑ, δηλ. έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες. Σε αυτά τα συστήματα, η έξοδος αποτελείται μόνο από την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Αφού οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$y[n-k] \longleftrightarrow z^{-k} Y(z) \quad (17.21)$$

για να μετατρέψουμε την εξίσωση διαφορών σε αλγεβρική, να βρούμε το μετασχ. Z της εξόδου, και να τον αντιστρέψουμε πίσω στο χρόνο. Τότε η Σχέση (17.20) γίνεται

$$Y(z) = Y_{zs}(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} Y(z) \quad (17.22)$$

(γ') Η εύρεση της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ ενός συστήματος. Στο χώρο του Z αυτό γίνεται μέσω της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ που χαρακτηρίζει το σύστημα. Τότε θεωρούμε ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές και χρησιμοποιούμε ξανά τη σχέση

$$x[n-k] \longleftrightarrow z^{-k} X(z) \quad (17.23)$$

για να μετατρέψουμε την εξίσωση διαφορών σε αλγεβρική και να κατασκευάσουμε το λόγο $Y(z)/X(z)$ που θα μας δώσει τη συνάρτηση μεταφοράς. Από τη Σχέση (17.22), θα έχουμε

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (17.24)$$

Η ίδια σχέση λαμβάνεται απ' ευθείας από τη Σχέση (17.22), αφού γνωρίζουμε ότι η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος αποτελείται από τη συνέλιξη της εισόδου και της κρουστικής απόκρισης του συστήματος. Στο χώρο του Z, η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ και του μετασχ. Z της εισόδου $X(z)$. Με το ίδιο σκεπτικό, μπορούσαμε να λάβουμε την ίδια σχέση από τη Σχέση (17.20), αφού η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται ξανά από την ίδια πράξη της συνέλιξης που αναφέραμε μόλις.

Παρατηρήστε ότι για ένα σύστημα που περιγράφεται από εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές, η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση πολυωνύμων του z^{-1} . Αυτό είναι χαρακτηριστικό των ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές.

Ας δούμε δυο παραδείγματα που δείχνουν χαρακτηριστικά πώς ο μετασχ. Z μπορεί να μας διευκολύνει όταν έχουμε να κάνουμε με συστήματα. Ας υποθέσουμε ότι, όπως και όταν δουλεύαμε στο πεδίο του χρόνου, οι λύσεις μας θα είναι αιτιατές.

Παράδειγμα 17.1:

Έστω το αιτιατό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (17.25)$$

με αρχική συνθήκη $y[-1] = 4$. Βρείτε την συνολική έξοδο του συστήματος για είσοδο $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

Λύση:

Με χρήση του μονόπλευρου μετασχ. Z , θα έχουμε

$$Y(z) - \frac{1}{2}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) = X(z) \quad (17.26)$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) - \frac{1}{2}y[-1] = X(z) \quad (17.27)$$

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}y[-1]}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.28)$$

$$= X(z)H(z) + Y_{zi}(z) \quad (17.29)$$

$$= Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) \quad (17.30)$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά τους δυο μετασχηματισμούς Z της εξόδου, έχουμε

$$Y_{zs}(z) = X(z) \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{A}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.31)$$

με

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=4} = -1 \quad (17.32)$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = 2 \quad (17.33)$$

Οπότε

$$Y_{zs}(z) = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \longleftrightarrow y_{zs}[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (17.34)$$

Αντίστοιχα,

$$Y_{zi}(z) = \frac{\frac{1}{2}y[-1]}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \longleftrightarrow y_{zi}[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (17.35)$$

Άρα η συνολική έξοδος δίνεται ως

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (17.36)$$

■

Παρατηρήστε πόσο γρηγορότερα υπολογίσαμε τη συνολική έξοδο του συστήματος σε σχέση με το πεδίο του χρόνου, ενώ έχουμε διαθέσιμη και την συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ως παράπλευρο αποτέλεσμα της όλης διαδικασίας. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε το παραπάνω αποτέλεσμα λύνοντας την άσκηση στο πεδίο του χρόνου;

Παράδειγμα 17.2:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] - 2x[n-1] \quad (17.37)$$

με αρχικές συνθήκες $y[-1] = 2$, $y[-2] = 0$. Βρείτε την συνολική έξοδο του συστήματος για είσοδο $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$

Λύση:

Εφαρμόζοντας μονόπλευρο μετασχ. Z θα έχουμε

$$Y(z) + \frac{1}{2}(z^{-1}Y(z) + y[-1]) - \frac{1}{2}(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]) = X(z) - 2(z^{-1}X(z) + x[-1]) \quad (17.38)$$

$$\frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}X(z) - \frac{2x[-1] + \frac{1}{2}y[-1] - \frac{1}{2}y[-2] - \frac{1}{2}z^{-1}y[-1]}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} = Y(z) \quad (17.39)$$

$$\frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}X(z) - \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} = Y(z) \quad (17.40)$$

$$H(z)X(z) + Y_{zi}(z) = Y(z) \quad (17.41)$$

$$Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z) = Y(z) \quad (17.42)$$

Υπολογίζοντας ξεχωριστά τους επιμέρους μετασχηματισμούς, έχουμε

$$Y_{zi}(z) = -\frac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{-1+z^{-1}}{(1+z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})} \quad (17.43)$$

το οποίο αναπτύσσεται σε μερικά κλάσματα ως

$$Y_{zi}(z) = \frac{A}{1+z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.44)$$

με

$$A = \frac{-1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-1} = -\frac{4}{3} \quad (17.45)$$

$$B = \frac{-1+z^{-1}}{1+z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{3} \quad (17.46)$$

Οπότε

$$Y_{zi}(z) = -\frac{4}{3} \frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.47)$$

και από γνωστά ζεύγη έχουμε

$$y_{zi}[n] = -\frac{4}{3}(-1)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (17.48)$$

Επιπλέον,

$$Y_{zs}(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}X(z) = \frac{1-2z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad (17.49)$$

$$= \frac{(1-2z^{-1})\left(-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1+z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1+z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad (17.50)$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα την παραπάνω έκφραση, έχουμε

$$Y_{zs}(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+z^{-1}} + \frac{C}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.51)$$

με

$$A = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}{(1+z^{-1})\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1}{2} \quad (17.52)$$

$$B = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \Big|_{z^{-1}=-1} = 2 \quad (17.53)$$

$$C = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1+z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=-2} = -\frac{5}{2} \quad (17.54)$$

Οπότε

$$Y_{zs}(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + 2 \frac{1}{1+z^{-1}} - \frac{5}{2} \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.55)$$

και από τα γνωστά ζεύγη έχουμε

$$y_{zs}[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2(-1)^n u[n] - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (17.56)$$

Τέλος, η συνολική έξοδος γράφεται ως

$$y[n] = -\frac{4}{3}(-1)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 2(-1)^n u[n] - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (17.57)$$

$$= \frac{2}{3}(-1)^n u[n] + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{5}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (17.58)$$

■

17.4 ΓΧΑ Συστήματα στο χώρο του μετασχ. Z

Ας επικεντρώσουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στα ΓΧΑ συστήματα, αυτή τη φορά από τη σκοπιά του μετασχηματισμού Z, όπως κάναμε και για τον μετασχ. Fourier. Τα ΓΧΑ συστήματα, όπως έχουμε δει, περιγράφονται με τρεις τρόπους:

1. με μια εξίσωση εισόδου-εξόδου

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (17.59)$$

με μηδενικές αρχικές συνθήκες

2. με την κρουστική απόκρισή τους, $h[n]$
3. με την απόκριση σε συχνότητά τους, $H(e^{j\omega})$
4. πλέον, και με τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(z)$

Εδώ, θα δούμε τα συστήματα από τη σκοπιά του Z και θα δούμε πόσο πιο απλά γίνονται τα πράγματα μερικές φορές στο χώρο του μετασχ. Z. Στην ανάλυση που ακολουθεί, θα διαπιστώσετε μεγάλη ομοιότητα με τη αντίστοιχη που κάναμε για το μετασχ. Fourier, γι' αυτό και θα ακολουθήσουμε το ίδιο μοτίβο.

Πριν όμως, ας συζητήσουμε για λίγο τη χρησιμότητα αναπαράστασης συστημάτων στο χώρο του Z. Ο κυριότερος λόγος μιας τέτοιας προσέγγισης είναι η ευελιξία σχεδίασης ΓΧΑ συστημάτων. Θυμίζουμε ότι τα συστήματα έχουν ως σκοπό την επεξεργασία (με οποιονδήποτε τρόπο) των σημάτων που παρουσιάζονται στην είσοδό τους. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να σχεδιάσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα που θα εκτελεί μια συγκεκριμένη τροποποίηση στο σήμα εισόδου του. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να το κατασκευάσουμε με βάση τα επιθυμητά για εμάς χαρακτηριστικά της απόκρισης σε συχνότητα του, $H(e^{j\omega})$ - προφανώς θα επεξεργαστούμε πραγματικό σήμα εισόδου, το οποίο θα αναλύεται σε πραγματικές συχνότητες μέσω του μετασχ. Fourier. Είδαμε νωρίτερα, και μέσω παραδειγμάτων, ότι η θέση των πόλων και των μηδενικών καθορίζει σχεδόν απόλυτα τη συμπεριφορά ενός σήματος στο χώρο του Z, και κατά συνέπεια τη μορφή του μετασχ. Fourier του μέσω της μορφής του μετασχηματισμού Z επάνω από το μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου. Αν λοιπόν τοποθετήσουμε κατάλληλα τους πόλους ή/και τα μηδενικά

στο μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε να κατασκευάσουμε συστήματα με επιθυμητές αποκρίσεις σε συχνότητα. Αυτές οι αποκρίσεις μπορούν να υπολογιστούν από το μετασχ. Z θέτοντας $z = e^{j\omega}$, και με τις τεχνικές υπολογισμού αντιστρόφου μετασχηματισμού που γνωρίζουμε, να βρούμε την χρουστική απόκρισή τους.

Παρ' όλο που ως τώρα συζητάμε την επιρροή του μετασχ. Z στο φάσμα πλάτους ενός σήματος, στην πραγματικότητα με όμοιο τρόπο επηρεάζεται και το φάσμα φάσης από την παρουσία των πόλων και των μηδενικών. Γνωρίζουμε ότι η φάση συνδέεται με τη θέση των επιμέρους συνιστωσών, ή αλλιώς τη χρονική δομή του σήματος ή του συστήματος στο χρόνο. Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε έννοιες και εργαλεία για τον κατάλληλο έλεγχο της φάσης μέσω της θέσης των πόλων και των μηδενικών. Προς το παρόν, θα συνεχίσουμε να αγνοούμε την επίδραση του μετασχ. Z στο φάσμα φάσης ενός σήματος ή συστήματος.

Ένας άλλος λόγος είναι ότι μέσω του μετασχ. Z μπορούμε να αναλύσουμε σήματα και συστήματα που δεν έχουν μετασχ. Fourier. Με άλλα λόγια, μπορούμε να αναλύσουμε συστήματα που είναι ασταθή. Σίγουρα θα σκεφτήκατε ότι ασταθή συστήματα δεν έχουν κάποια πρακτική χρησιμότητα. Παρ' όλα αυτά, ασταθή συστήματα παρουσιάζονται πολύ συχνά στη μηχανική, και για να μπορούμε να χειριστούμε την αστάθειά τους, πρέπει να μπορούμε να τα μελετήσουμε. Περισσότερα για αυτό θα δούμε σύντομα.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για το πως δουλεύουμε στο χώρο του μετασχ. Z.

Παράδειγμα 17.3:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με τη μορφή εξίσωσης διαφορών

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2] \quad (17.60)$$

και μας ζητείται να βρούμε το $h[n]$, δηλ. την χρουστική απόκριση του συστήματος.

Λύση:

Ας δούμε λίγο τη Σχέση (17.5). Αν λύσουμε ως προς $H(z)$, θα πάρουμε:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (17.61)$$

Ας το εφαρμόσουμε στο παράδειγμά μας:

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] - 3x[n-2] \longleftrightarrow Y(z) = X(z) + 2X(z)z^{-1} - 3X(z)z^{-2} \quad (17.62)$$

$$= X(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) \quad (17.63)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} \quad (17.64)$$

$$H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} \quad (17.65)$$

Άρα τελικά $H(z) = 1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}$. Η χρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος μπορεί να βρεθεί από τους Πίνακες 16.2, 16.1, και είναι η:

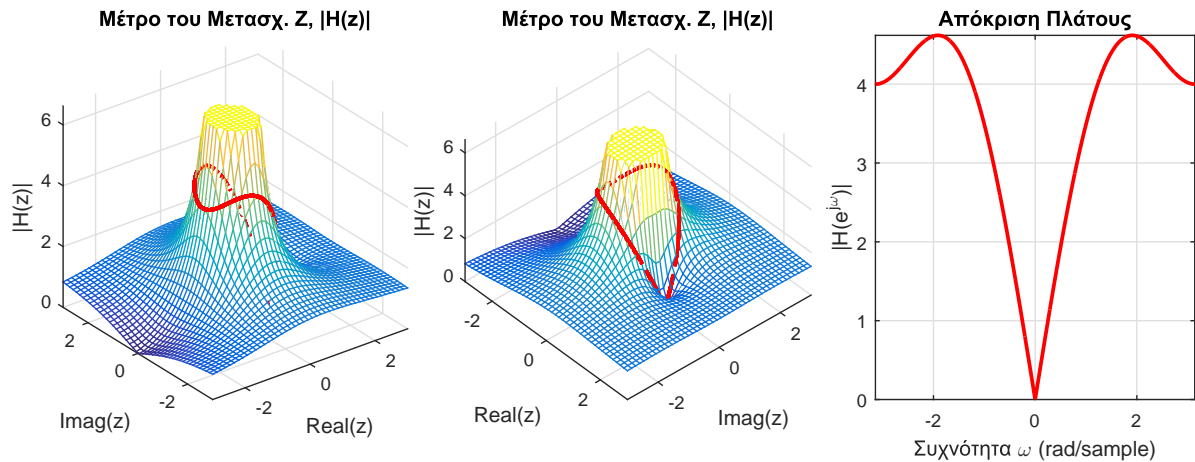
$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2] \quad (17.66)$$

Παρατηρήστε ότι το σύστημα είναι αιτιατό, και το πεδίο σύγκλισης του είναι το $|z| > 0$. Από τη μορφή της συνάρτησης μεταφοράς, βλέπουμε ότι αν τη γράψουμε στη μορφή

$$H(z) = 1 + 2\frac{1}{z} - 3\frac{1}{z^2} = \frac{z^2 + 2z - 3}{z^2} \quad (17.67)$$

θα βρούμε ότι έχει δυο πόλους στη θέση $z = 0$ (διπλός πόλος) και δυο μηδενικά στις θέσεις $z = -3, z = 1$. Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε διαισθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας την απόκριση πλάτους στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Το μηδενικό στη θέση $z = -3$ βρίσκεται “μακριά” από το μοναδιαίο κύκλο, οπότε θα έχει μικρή επίδραση στις συχνότητες κοντά στα $\omega = \pm\pi$. Αντίθετα, το μηδενικό $z = 1$ βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, άρα θα μηδενίσει απόλυτα το πλάτος της συχνότητας $\omega = 0$, και θα μειώσει σημαντικά το πλάτος των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως υψιπερατής φύσεως. Το Σχήμα 17.5 επιβεβαιώνει τα προηγούμενα. ■

Το παραπάνω παράδειγμα ήταν σχετικά απλό, και μπορούσε να λυθεί στο χώρο του χρόνου πιο εύκολα και γρήγορα. Πώς; Απλά θέτοντας $x[n] = \delta[n]$, και παίρνοντας $y[n] = h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$. Απλά



Σχήμα 17.5: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - 3\delta[n-2]$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

δείξαμε τον τρόπο που χρησιμοποιείται το πεδίο της συχνότητας και ο μετασχ. Z για να βρούμε την κρουστική απόκριση. Σε άλλα, πιο σύνθετα παραδείγματα συστημάτων, επιβάλλεται η χρήση του μετασχ. Z αν θέλουμε να γλιτώσουμε κόπο και χρόνο. Τέτοια παραδείγματα θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα.

Παράδειγμα 17.4:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4] \quad (17.68)$$

Να βρεθεί:

(α') η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, $H(z)$

(β') η κρουστική του απόκριση, $h[n]$

(γ') η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανιστεί το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1]$.

Λύση:

(α') Θα είναι:

$$y[n] = \frac{1}{2}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}x[n-3] - \frac{2}{3}x[n-4] \longleftrightarrow Y(z) = \frac{1}{2}X(z) - \frac{2}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{2}X(z)z^{-3} - \frac{2}{3}X(z)z^{-4} \quad (17.69)$$

και άρα

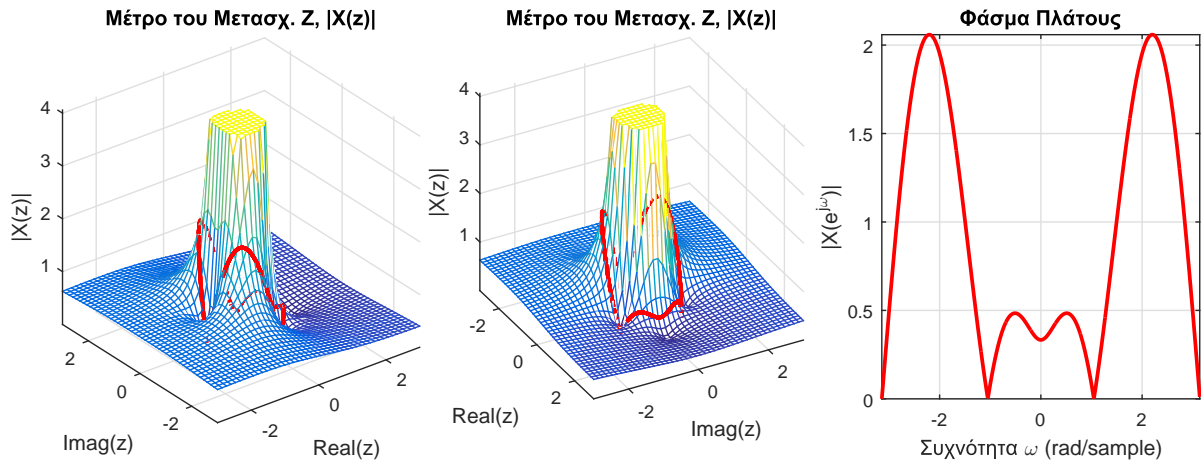
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4} \quad (17.70)$$

Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^4 - \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}}{z^4} \quad (17.71)$$

βλέπουμε ότι έχει τέσσερις πόλους στη θέση $z = 0$ και τέσσερα μηδενικά στις θέσεις $z = -1$, $z = 4/3$, $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Παρατηρήστε ότι τα δυο τελευταία μηδενικά είναι συζυγή. Ας προσπαθήσουμε και σε αυτό το παράδειγμα να καταλάβουμε διαισθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας ξανά την απόκριση πλάτους στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Το μηδενικό στη θέση $z = 4/3$ βρίσκεται “αρκετά κοντά” στο μοναδιαίο κύκλο, οπότε θα έχει μια επίδραση στις συχνότητες κοντά στα $\omega = 0$, χαμηλώνοντας τις τιμές του φάσματος πλάτους. Αντίθετα, το μηδενικό $z = -1$ βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο

κύκλο, άρα θα μηδενίσει απόλυτα το πλάτος της συχνότητας $\omega = \pm\pi$, και θα μειώσει σημαντικά το πλάτος των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Το μηδενικό $z = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ βρίσκεται υπό γωνία $\theta = \tan^{-1} \sqrt{3} = \pi/3$ σε σχέση με τον άξονα των πραγματικών, και έχει μέτρο $|z| = 1$, άρα βρίσκεται ακριβώς επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Ως αποτέλεσμα, μηδενίζει τη συχνότητα $\omega = \pi/3$ rad/sample. Το συζυγές μηδενικό, $z = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ βρίσκεται υπό γωνία $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\pi/3$ σε σχέση με τον άξονα των πραγματικών, και έχει επίσης μέτρο $|z| = 1$, άρα βρίσκεται κι αυτό επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μηδενίζοντας απόλυτα τη συχνότητα $\omega = -\pi/3$ rad/sample. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως ζωνοπερατής φύσεως. Το Σχήμα 17.6 επιβεβαιώνει την ανάλυσή μας.



Σχήμα 17.6: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $H(z) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

(β') Η κρουστική απόκριση είναι ο αντίστροφος μετασχ. Z της συνάρτησης μεταφοράς που μόλις βρήκαμε. Άρα θα είναι:

$$h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4] \quad (17.72)$$

Φυσικά θα μπορούσαμε να βρούμε την κρουστική απόκριση θέτοντας απλά $h[n] = \delta[n]$ στην εξίσωση διαφορών. Θα παίρναμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, και μάλιστα πιο εύκολα.

(γ') Η εύκολη λύση δίνεται στο πεδίο του χρόνου, αφού η είσοδός μας είναι απλά συναρτήσεις Δέλτα. Θα είναι

$$y[n] = x[n] * h[n] = \left(\frac{1}{2}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-3] - \frac{2}{3}\delta[n-4]\right) * \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n-1] \quad (17.73)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n (u[n-1] + 64u[n-4]) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (u[n-2] + 64u[n-5]) \quad (17.74)$$

Ας δούμε να παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα στο χώρο του μετασχ. Z. Η συνέλιξη μετατρέπεται σε γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών, οπότε

$$Y(z) = X(z)H(z) = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{2}{3}z^{-4}\right) \frac{1}{4} \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (17.75)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{6} \frac{z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{8} \frac{z^{-4}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} - \frac{1}{6} \frac{z^{-5}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad (17.76)$$

Με χρήση των Πινάκων 16.1, 16.2, διαπιστώνουμε ότι

$$y[n] = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2] + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-4} u[n-4] - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-5} u[n-5] \quad (17.77)$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τη Σχέση (17.74).

Τέλος, ένα ακόμα παράδειγμα. ■

Παράδειγμα 17.5:

Έστω το απλό αιτιατό σύστημα

$$y[n] - y[n-1] = x[n] - x[n-2]. \quad (17.78)$$

του οποίου ζητούμε:

- (α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$
- (β') την κρουστική απόκριση $h[n]$
- (γ') την έξοδο του συστήματος, $y[n]$, για είσοδο $x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-3]$.

Λύση:

- (α') Αναζητούμε λοιπόν αρχικά τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ του απλού συστήματος που περιγράψαμε παραπάνω. Κάνουμε μετασχ. Z στην εξίσωση:

$$Y(z) - Y(z)z^{-1} = X(z) - X(z)z^{-2} \quad (17.79)$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)(1 - z^{-2}) \quad (17.80)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} \quad (17.81)$$

Να λοιπόν εδώ που έχουμε μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς που δεν έχει πόλους μόνο στο μηδέν. Σε πρώτη σκέψη, ίσως το σύστημά μας δεν είναι FIR, καθώς τα προηγούμενα παραδείγματα δεν ήταν τέτοιας μορφής. Ας το δούμε.

- (β') Κατ' αρχάς, εδώ δεν μπορούμε να βρούμε γρήγορα την κρουστική απόκριση θέτοντας $x[n] = \delta[n]$ και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, γιατί τότε παίρνουμε

$$h[n] - h[n-1] = \delta[n] - \delta[n-2] \quad (17.82)$$

που δεν οδηγεί άμεσα σε κλειστό τύπο του $h[n]$. Χρειάζεται να εφαρμόσουμε τις τεχνικές που είδαμε στην ανάλυσή μας στο πεδίο του χρόνου. Για να το αποφυγούμε, βλέπουμε ότι ο αριθμητής είναι διαφορά τετραγώνων και άρα

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad (17.83)$$

πολύ εύκολα και πολύ γρήγορα, αφού γνωρίζουμε ότι το σύστημά μας είναι αιτιατό \odot . Βλέπουμε λοιπόν ότι το σύστημά μας είναι τελικά FIR.

Ένας εναλλακτικός τρόπος εύρεσης της κρουστικής απόκρισης θα ήταν να εφαρμόσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, αλλά επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή είναι μικρότερος από του αριθμητή, θα χρειαστεί να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων. Μετά τη διαίρεση, το $H(z)$, και κατά συνέπεια το $h[n]$, γράφεται ως

$$H(z) = 1 + z^{-1} \longleftrightarrow h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \quad (17.84)$$

Ας υποθέσουμε όμως ότι δε θέλουμε να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, αν και σε πολλές περιπτώσεις είναι απαραίτητη. Τι άλλο θα μπορούσαμε να κάνουμε στο συγκεκριμένο παράδειγμα; Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-2} \quad (17.85)$$

Αν συμβουλευτούμε τον Πίνακα 16.2 με τα ζεύγη μετασχηματισμών Z, θα δούμε ότι ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στο ζεύγος:

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (17.86)$$

με ROC $|z| > 1$, γιατί το σύστημα είναι αιτιατό. Άρα ο αντίστοχος μετασχ. Z του πρώτου όρου είναι η βηματική συνάρτηση $u[n]$. Από τον Πίνακα 16.1 και τον Πίνακα 16.2, εύκολα βρίσκουμε ότι ο δεύτερος όρος

είναι η καθυστερημένη βηματική κατά $n_0 = 2$, δηλ. η $u[n - 2]$. Άρα τελικά η κρουστική απόκριση θα είναι

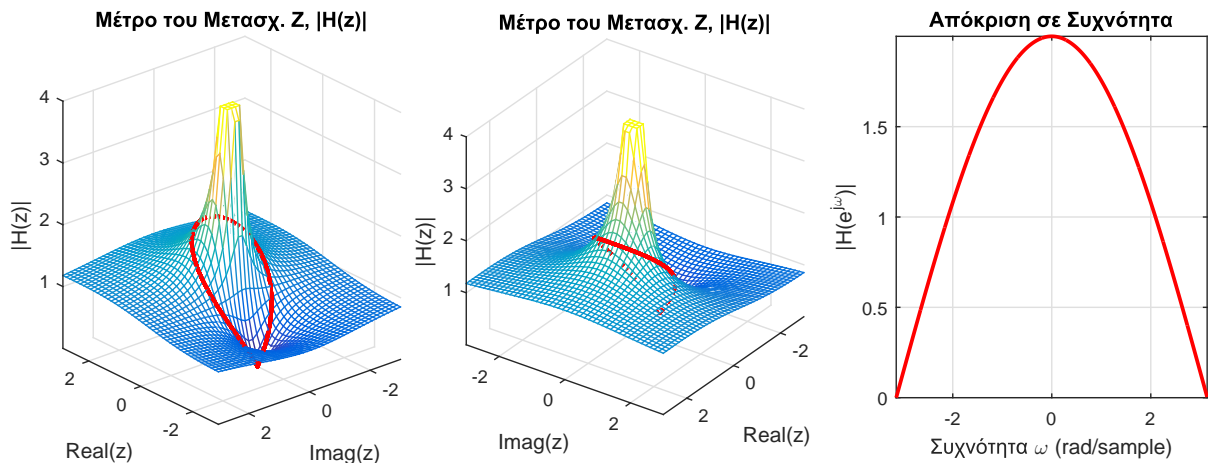
$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}z^{-2} \longleftrightarrow h[n] = u[n] - u[n - 2] \quad (17.87)$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε διαφορετικό αποτέλεσμα σε σχέση με πριν; Ασφαλώς όχι. Προσέξτε ότι η $h[n] = u[n] - u[n - 2]$ είναι ουσιαστικά η $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$ - σχεδιάστε τη διαφορά των δυο βηματικών για να το δείτε.

Ας δούμε πως συμπεριφέρεται το σύστημα μας. Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(z) = 1 + z^{-1} = \frac{z + 1}{z} \quad (17.88)$$

βλέπουμε ότι έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0$ και ένα μηδενικό στη θέση $z = -1$. Ας προσπαθήσουμε και σε αυτό το παράδειγμα να καταλάβουμε διαισθητικά και ποιοτικά τη συμπεριφορά του συστήματος αυτού, θεωρώντας ξανά την απόκριση πλάτους στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Το μηδενικό $z = -1$ βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, άρα θα μηδενίσει απόλυτα το πλάτος της συχνότητας $\omega = \pm\pi$, και θα μειώσει σημαντικά το πλάτος των γειτονικών συχνοτήτων γύρω από αυτήν. Θα μπορούσαμε λοιπόν να χαρακτηρίσουμε το σύστημα ως χαμηλοπερατής φύσεως. Το Σχήμα 17.7 επιβεβαιώνει την ανάλυσή μας.



Σχήμα 17.7: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

(γ') Αφού η είσοδος μας είναι ένα άθροισμα από συναρτήσεις Δέλτα, η έξοδος βρίσκεται πολύ εύκολα κατ' ευθείαν στο πεδίο του χρόνου, ως

$$y[n] = x[n] * h[n] = (u[n] - u[n - 2]) * (\delta[n] - 2\delta[n - 3]) \quad (17.89)$$

$$= u[n] * \delta[n] - 2u[n] * \delta[n - 3] - u[n - 2] * \delta[n] + 2u[n - 2] * \delta[n - 3] \quad (17.90)$$

$$= u[n] - 2u[n - 3] - u[n - 2] + 2u[n - 5] \quad (17.91)$$

$$= u[n] - u[n - 2] - 2u[n - 3] + 2u[n - 5] \quad (17.92)$$

που σχεδιάζοντας τις βηματικές συναρτήσεις στο χρόνο, βλέπουμε ότι γράφεται ως

$$y[n] = \delta[n] + \delta[n - 1] - 2\delta[n - 3] - 2\delta[n - 4] \quad (17.93)$$

Στο ίδιο θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τη μορφή του $h[n] = \delta[n] + \delta[n - 1]$ (κάντε το!).

Ας δούμε τώρα το ίδιο στο χώρο του μετασχ. Z. Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n - 3] \longleftrightarrow X(z) = 1 - 2z^{-3} \quad (17.94)$$

και έτσι

$$Y(z) = H(z)X(z) = \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - z^{-1}}z^{-2} \right) (1 - 2z^{-3}) \quad (17.95)$$

$$= \frac{1 - 2z^{-3}}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - 2z^{-3}}{1 - z^{-1}}z^{-2} \quad (17.96)$$

Για να βρούμε τώρα την έξοδο $y[n]$, θα δουλέψουμε όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Θα χωρίσουμε τις επιμέρους ρητές συναρτήσεις του z^{-1} σε πιο απλές, θα συμβουλευτούμε τους Πίνακες 16.2, 16.1, και ελπίζουμε © να βρούμε τα κατάλληλα ζεύγη που θα μας μεταφέρουν εύκολα και γρήγορα στο πεδίο του χρόνου.

$$Y(z) = \frac{1 - 2z^{-3}}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - 2z^{-3}}{1 - z^{-1}} z^{-2} \quad (17.97)$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} - 2 \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-3} - \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-2} + 2 \frac{1}{1 - z^{-1}} z^{-5} \quad (17.98)$$

Με χρήση πινάκων και ιδιοτήτων, η έξοδος του συστήματος, $y[n]$, θα είναι η:

$$y[n] = u[n] - 2u[n - 3] - u[n - 2] + 2u[n - 5] = u[n] - u[n - 2] - 2u[n - 3] + 2u[n - 5] \quad (17.99)$$

■

Παράδειγμα 17.6:

Έστω το αιτιατό σύστημα

$$y[n] + 2y[n - 1] - 3y[n - 2] = x[n] - 2x[n - 1]. \quad (17.100)$$

του οποίου ζητούμε:

- (α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$
- (β') την κρουστική απόκριση $h[n]$

Λύση:

(α') Κάνουμε μετασχ. Z στην εξίσωση διαφορών, έχουμε

$$Y(z) + 2Y(z)z^{-1} - 3Y(z)z^{-2} = X(z) - 2X(z)z^{-1} \quad (17.101)$$

$$Y(z)(1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1}) \quad (17.102)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} \quad (17.103)$$

με πεδίο σύγκλισης $|z| > 3$, λόγω αιτιατότητας, αφού οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $z_1 = 1, z_2 = -3$.

(β') Ας παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή.

$$1 + 2z^{-1} - 3z^{-2} = (1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1}) \quad (17.104)$$

Τώρα λοιπόν θα έχουμε, αντικαθιστώντας:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 2z^{-1} - 3z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (17.105)$$

Οπότε θα είναι

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + 3z^{-1}} \quad (17.106)$$

με

$$A = H(z)(1 - z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 + 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=1} = -\frac{1}{4} \quad (17.107)$$

$$B = H(z)(1 + 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=-\frac{1}{3}} = \frac{5}{4} \quad (17.108)$$

και άρα

$$H(z) = -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{5}{4} \frac{1}{1 + 3z^{-1}} \quad (17.109)$$

Εύκολα λοιπόν καταλήγουμε, σύμφωνα και με τον Πίνακα 16.2, ότι

$$h[n] = -\frac{1}{4}u[n] + \frac{5}{4}3^n u[n] \quad (17.110)$$

αφού το σύστημά μας είναι αιτιατό από εκφώνηση. Παρατηρήστε ότι ο όρος $3^n u[n]$ οδηγεί τις τιμές της κρουστικής απόκρισης στο $+\infty$, όταν $n \rightarrow +\infty$, άρα το σύστημά μας δεν είναι ευσταθές. Αυτό επιβεβαιώνεται και από την παρουσία ενός πόλου στη θέση $z = 1$, δηλ. επάνω στο μοναδιαίο κύκλο όπου ορίζεται ο μετασχ. Fourier, πράγμα που τον οδηγεί στο να μη συγκλίνει.

■

Παράδειγμα 17.7:

Έστω το αντι-αιτιατό σύστημα

$$y[n] - 7y[n-1] + 12y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]. \quad (17.111)$$

του οποίου ζητούμε:

(α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$

(β') την κρουστική απόκριση $h[n]$

Λύση:

(α') Κάνουμε μετασχ. Z στην εξίσωση διαφορών και έχουμε

$$Y(z) - 7Y(z)z^{-1} + 12Y(z)z^{-2} = X(z) - 2X(z)z^{-1} \quad (17.112)$$

$$Y(z)(1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}) = X(z)(1 - 2z^{-1}) \quad (17.113)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} \quad (17.114)$$

Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι $z_1 = 3$, $z_2 = 4$, άρα το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| < 3$, αφού το σύστημα είναι αντι-αιτιατό.

(β') Εδώ πρέπει να παραγοντοποιήσουμε τον παρονομαστή, και να χρησιμοποιήσουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος απ' το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή, οπότε μπορούμε να την εφαρμόσουμε. Ο παρονομαστής θα γράφεται ως

$$1 - 7z^{-1} + 12z^{-2} = (1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1}) \quad (17.115)$$

Άρα

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 7z^{-1} + 12z^{-2}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 3z^{-1})(1 - 4z^{-1})} \quad (17.116)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{A}{1 - 3z^{-1}} + \frac{B}{1 - 4z^{-1}} \quad (17.117)$$

με

$$A = H(z)(1 - 3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 4z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{3}} = -1 \quad (17.118)$$

$$B = H(z)(1 - 4z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{4}} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1}} \Big|_{z^{-1}=\frac{1}{4}} = 2 \quad (17.119)$$

$$(17.120)$$

Οπότε το $H(z)$ γράφεται ως

$$H(z) = -\frac{1}{1 - 3z^{-1}} + 2\frac{1}{1 - 4z^{-1}} \quad (17.121)$$

και συμβουλευόμενοι τον Πίνακα 16.2 και δεδομένου ότι το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, θα είναι

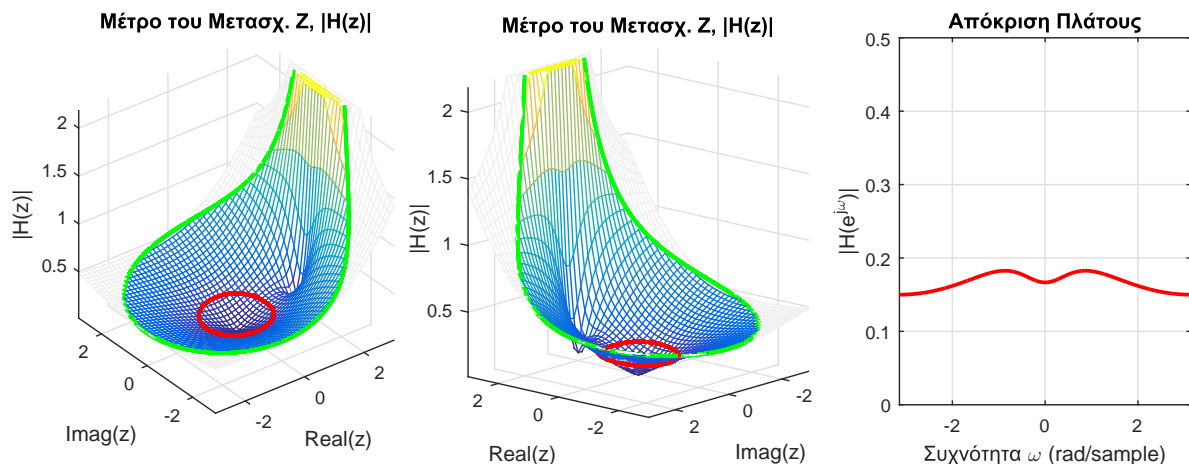
$$h[n] = 3^n u[-n - 1] - 2(4)^n u[-n - 1] \quad (17.122)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Ας δούμε πως συμπεριφέρεται το σύστημα μας. Παρατηρήστε ότι το πεδίο σύγκλισης Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ως

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z}{z^2 - 7z + 12} = \frac{z(z - 2)}{(z - 3)(z - 4)} \quad (17.123)$$

βλέπουμε ότι έχει δυο πόλους στις θέσεις $z = 3$, $z = 4$ και δυο μηδενικά στις θέσεις $z = 0$, $z = 2$. Θεωρώντας ξανά την απόκριση πλάτους στο διάστημα $[-\pi, \pi)$, παρατηρούμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά βρίσκονται “σχετικά μακριά” από το μοναδιαίο κύκλο, και άρα η επιρροή τους θα είναι μικρή. Λόγω του μηδενικού στη θέση $z = 0$, οι τιμές της απόκρισης πλάτους θα είναι χαμηλές, αλλά δεν υπάρχει καταστολή κάποιας συγκεκριμένης συχνότητας. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το σύστημα επιτρέπει τη διέλευση όλων των συχνοτήτων μέσα από αυτό. Το Σχήμα 17.8 επιβεβαιώνει την παρατήρησή μας.



Σχήμα 17.8: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $h[n] = 3^n u[-n - 1] - 2(4)^n u[-n - 1]$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους.

Παράδειγμα 17.8:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από

$$H(z) = \frac{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \quad (17.124)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης.

Λύση:

Το πολυώνυμο του αριθμητή είναι μεγαλύτερης τάξης από του παρονομαστή, άρα δεν μπορεί να γίνει απ' ευθείας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα. Πρέπει αναγκαστικά να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, η οποία μας δίνει

$$H(z) = 4 - 8z^{-1} + \frac{5}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \quad (17.125)$$

Από τους πίνακές μας, έχουμε κατ' ευθείαν ότι αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε

$$h[n] = 4\delta[n] - 8\delta[n - 1] + 5\left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] \quad (17.126)$$

με $|z| > \frac{3}{4}$, ενώ αν το σύστημα είναι αντι-αιτιατό, τότε

$$h[n] = 4\delta[n] - 8\delta[n-1] - 5\left(\frac{3}{4}\right)^n u[-n-1] \quad (17.127)$$

με $|z| < \frac{3}{4}$.

■

Παράδειγμα 17.9:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα του οποίου η χροστική απόκριση δίνεται παρακάτω:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3^{n-2} u[n-4]. \quad (17.128)$$

του οποίου ζητούμε:

- (α') τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$
- (β') την εξίσωση διαφορών που περιγράφει το σύστημα

Λύση:

(α') Η χροστική απόκριση μπορεί να γραφεί ως

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3^{n-2} u[n-4] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (3^2)(3^{-2})3^{n-2} u[n-4] \quad (17.129)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - (3^2)3^{n-4} u[n-4] \quad (17.130)$$

Κάνοντας μετασχ. Z στην χροστική απόκριση, παίρνουμε

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 9\frac{1}{1 - 3z^{-1}}z^{-4}, \quad |z| > 3 \quad (17.131)$$

αφού το σύστημα δίνεται ως αιτιατό.

(β') Προφανώς

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - 9\frac{1}{1 - 3z^{-1}}z^{-4} = \frac{1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \quad (17.132)$$

και άρα θα έχουμε

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} \quad (17.133)$$

$$X(z)\left(1 - 3z^{-1} - 9z^{-4} + \frac{9}{2}z^{-5}\right) = Y(z)\left(1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}\right) \quad (17.134)$$

και τελικά με αντίστροφο μετασχ. Z έχουμε

$$Y(z) - \frac{7}{2}Y(z)z^{-1} + \frac{3}{2}Y(z)z^{-2} = X(z) - 3X(z)z^{-1} - 9X(z)z^{-4} + \frac{9}{2}X(z)z^{-5} \quad (17.135)$$

και

$$y[n] - \frac{7}{2}y[n-1] + \frac{3}{2}y[n-2] = x[n] - 3x[n-1] - 9x[n-4] + \frac{9}{2}x[n-5] \quad (17.136)$$

■

Παράδειγμα 17.10:

Έστω το αιτιατό σύστημα $H(z)$ που δίνεται ως

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\pi/4}z^{-1})(1 - re^{-j\pi/4}z^{-1})} \quad (17.137)$$

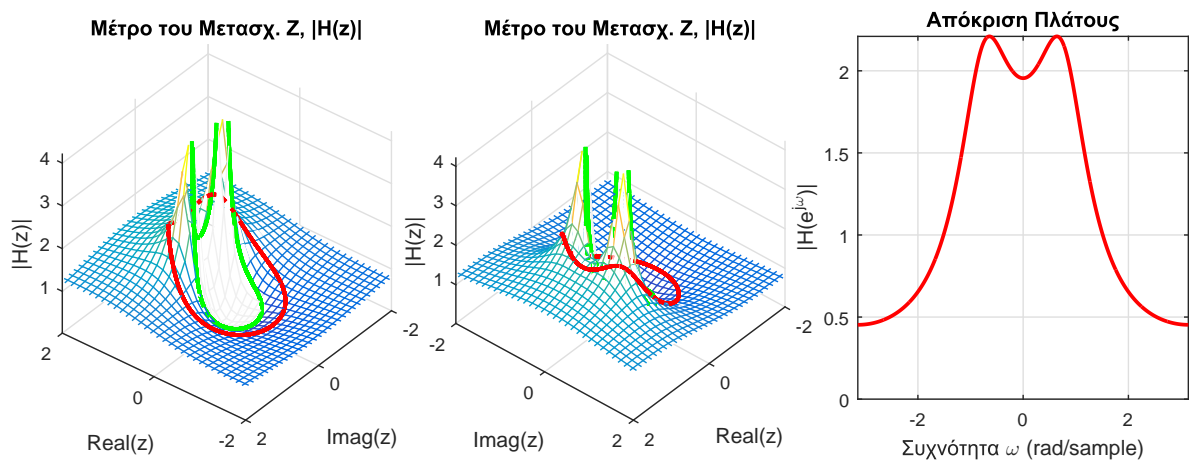
Μελετήστε ποιοτικά τη συμπεριφορά του φάσματος πλάτους του συστήματος για $r = 0.6$ και $r = 0.9$ και βρείτε την χρονική του απόκριση $h[n]$.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι το σύστημα γράφεται ως

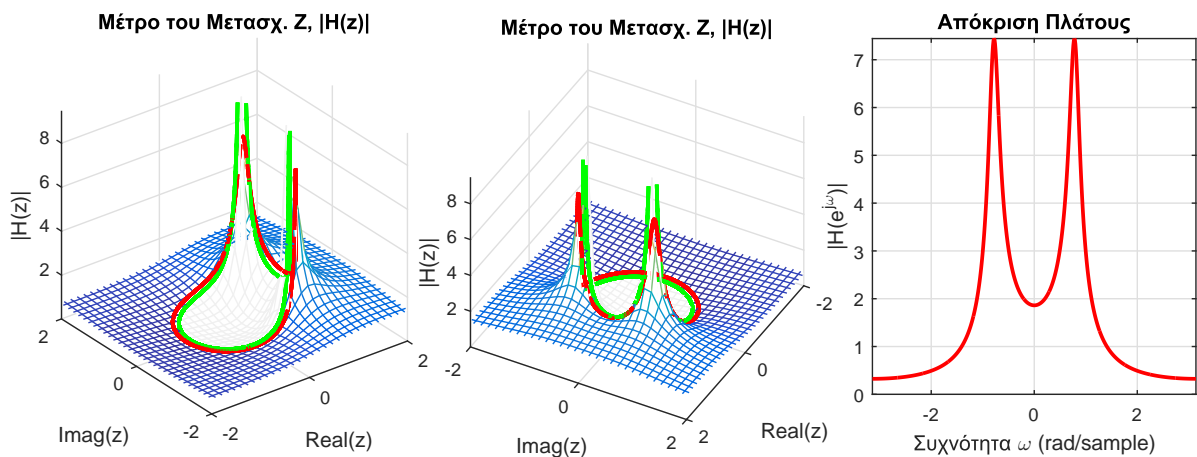
$$H(z) = \frac{z^2}{(z - re^{j\pi/4})(z - re^{-j\pi/4})} \quad (17.138)$$

και άρα έχει δυο μηδενικά στη θέση $z = 0$, και δυο πόλους στις θέσεις $z = re^{\pm j\pi/4}$. Η παρουσία πόλων για



Σχήμα 17.9: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\pi/4}z^{-1})(1 - re^{-j\pi/4}z^{-1})}$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για $r = 0.6$.

$\omega = \pm\pi/4$ θα αυξήσει τις τιμές του φάσματος πλάτους γύρω από αυτές τις συχνότητες. Στην περίπτωση που $r = 0.6$, η αύξηση θα είναι μικρή και πιο ομαλή, αφού οι πόλοι βρίσκονται “μακριά” από το μοναδιαίο κύκλο, ενώ για $r = 0.9$, η αύξηση θα είναι μεγαλύτερη και πιο απότομη, αφού οι πόλοι βρίσκονται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο. Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται από τα Σχήματα 17.9 και 17.10. Η χρονική απόκριση δίνεται



Σχήμα 17.10: Μέτρο μετασχ. Z συστήματος $H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\pi/4}z^{-1})(1 - re^{-j\pi/4}z^{-1})}$ και η αντίστοιχη απόκριση πλάτους για $r = 0.9$.

αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα τη ρητή συνάρτηση μεταφοράς. Είναι

$$H(z) = \frac{A}{1 - re^{j\pi/4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - re^{-j\pi/4}z^{-1}} \quad (17.139)$$

με

$$A = (1 - re^{j\pi/4}z^{-1})H(z) \Big|_{z=re^{j\pi/4}} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2} \quad (17.140)$$

$$B = (1 - re^{-j\pi/4}z^{-1})H(z) \Big|_{z=re^{-j\pi/4}} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \quad (17.141)$$

τα οποία είναι μιγαδικοί συντελεστές και μπορούν να γραφούν σε πολική μορφή ως

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4} \quad (17.142)$$

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4} \quad (17.143)$$

Άρα μέσω αντιστροφού μετασχ. Z θα έχουμε

$$H(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4} \frac{1}{1 - re^{j\pi/4}z^{-1}} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4} \frac{1}{1 - re^{-j\pi/4}z^{-1}} \quad (17.144)$$

$$h[n] = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}(re^{j\pi/4})^n u[n] + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}(re^{-j\pi/4})^n u[n] \quad (17.145)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}r^n (e^{j\pi(n-1)/4} + e^{-j\pi(n-1)/4})u[n] \quad (17.146)$$

$$= \sqrt{2}r^n \cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right)u[n] \quad (17.147)$$

Μπορούμε λοιπόν να πούμε εν γένει ότι

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος στο Χώρο του Μετ. Z - I

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος

$$h[n] \longleftrightarrow H(z)$$

είναι της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k (a_k)^n u[n] - \sum_{l=1}^M B_l (b_l)^n u[-n-1] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1 - a_k z^{-1}} + \sum_{l=1}^M B_l \frac{1}{1 - b_l z^{-1}}$$

με $\text{ROC}_k : |z| > |a_k|$ και $\text{ROC}_l : |z| < |b_l|$ και $\max_k\{|a_k|\} < |z| < \min_l\{|b_l|\}$ τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

και εφαρμόζοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $y[n]$.

και

Έξοδος ΓΧΑ Συστήματος στο Χώρο του Μετ. Z - II

Αν ένα σύστημα περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών ως

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \longleftrightarrow H(z) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

τότε χρησιμοποιούμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα για να αναλύσουμε τη Συνάρτηση Μεταφοράς $H(z)$ σε απλά κλάσματα και να βρούμε με χρήση Πινάκων την κρουστική απόκριση $h[n]$.

17.4.1 Ευστάθεια στο χώρο του Z και Περιοχή Σύγκλισης

Ας μιλήσουμε τέλος για την ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος στο χώρο του Μετασχ. Z . Για να είναι ένα ΓΧΑ σύστημα ευσταθές, πρέπει για φραγμένη είσοδο, το σύστημα να παράγει φραγμένη έξοδο, δηλ.

$$|x[n]| < M_x \implies |y[n]| < M_y, \quad M_x, M_y \in \mathfrak{R} \quad (17.148)$$

Αν πάρουμε το άθροισμα της συνέλιξης, θα έχουμε

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]h[n-k]| \quad (17.149)$$

Όμως $|x[n]| < M_x$, άρα

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]h[n-k]| < \sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_x |h[n-k]| = M_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| \quad (17.150)$$

Άρα για να είναι φραγμένη η έξοδος πρέπει να ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \quad (17.151)$$

Όμως αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχει ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου της κρουστικής απόκρισης $h[n]$. Όμως είπαμε ότι ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου ορίζεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο! Άρα τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι πρέπει ο μοναδιαίος κυκλος να περιέχεται στο πεδίο σύγκλισης του μετασχ. Z !

Ας δούμε μερικά παραδείγματα που συνοψίζουν όλα τα παραπάνω.

Παράδειγμα 17.11:

Έστω η κρουστική απόκριση $h[n]$ με μετασχ. Z

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (17.152)$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$ για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης, και χαρακτηρίστε το σύστημα που περιγράφει ως προς την ευστάθεια και την αιτιατότητα.

Λύση:

Αν γράψουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ σε μορφή δυνάμεων του z , θα έχουμε

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} = \frac{z^2(z + 1)}{(z - 1)(z - \frac{1}{2})(z + 3)} \quad (17.153)$$

και βλέπουμε ότι έχει τρεις πόλους, στις θέσεις $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$. Επίσης, βλέπουμε ότι έχει τρία μηδενικά, στις θέσεις $z_0 = -1, z_1 = z_2 = 0$. Οπότε τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι

(α') $|z| > 3$

(β') $|z| < \frac{1}{2}$

(γ') $\frac{1}{2} < |z| < 1$

(δ') $1 < |z| < 3$

Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να αναπτυχθεί με τη γνωστή σας διαδικασία του Αναπτύγματος σε Μερικά Κλάσματα. Έχουμε

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \quad (17.154)$$

$$= A \frac{1}{1-z^{-1}} + B \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + C \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad (17.155)$$

με

$$A = H(z)(1-z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+3z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=1} = 1 \quad (17.156)$$

$$B = H(z)(1-\frac{1}{2}z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=2} = \frac{1+z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+3z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=2} = -\frac{3}{7} \quad (17.157)$$

$$C = H(z)(1+3z^{-1}) \Big|_{z^{-1}=-1/3} = \frac{1+z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} \Big|_{z^{-1}=-1/3} = \frac{3}{7} \quad (17.158)$$

Άρα η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad (17.159)$$

Για κάθε ένα από τα παραπάνω πεδία σύγκλισης, θα έχουμε

(α') Το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| > 3$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι δεξιόπλευρο, οπότε από τον Πίνακα 16.2, η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad (17.160)$$

θα οδηγήει στην χροστική απόκριση

$$h[n] = u[n] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[n] \quad (17.161)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισης του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι αιτιατό, από τη μορφή του $h[n]$.

(β') Το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| < 1/2$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι αριστερόπλευρο, οπότε από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad (17.162)$$

θα οδηγήσει στην χροστική απόκριση

$$h[n] = -u[-n-1] + \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (17.163)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισης του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι αντι-αιτιατό, από τη μορφή του $h[n]$.

(γ') Το πεδίο σύγκλισης είναι $1/2 < |z| < 1$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι αμφίπλευρο. Για να προκύψει αυτός ο δακτύλιος ως τομή κάποιων επιμέρους πεδίων σύγκλισης που ορίζονται από τους πόλους $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$, θα πρέπει αυτά τα επιμέρους πεδία να είναι τα

$$\{|z| < 3\} \cap \{|z| > 1/2\} \cap \{|z| < 1\} = \{1/2 < |z| < 1\} \quad (17.164)$$

Οπότε από τον Πίνακα 16.2 και τα επιμέρους πεδία σύγκλισης παραπάνω, έχουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad (17.165)$$

οδηγήει στην χροστική απόκριση

$$h[n] = -u[-n-1] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (17.166)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισης

του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι μη αιτιατό, από τη μορφή του $h[n]$.

(δ') Το πεδίο σύγκλισης είναι $1 < |z| < 3$, άρα το σήμα στο χρόνο θα είναι αμφίπλευρο. Για να προκύψει αυτός ο δακτύλιος ως τομή κάποιων επιμέρους πεδίων σύγκλισης που ορίζονται από τους πόλους $p_0 = 1, p_1 = 1/2, p_2 = -3$, θα πρέπει αυτά τα επιμέρους πεδία να είναι τα

$$\{|z| < 3\} \cap \{|z| > 1/2\} \cap \{|z| > 1\} = \{1 < |z| < 3\} \quad (17.167)$$

Οπότε από τον Πίνακα 16.2 και τα επιμέρους πεδία σύγκλισης παραπάνω, έχουμε

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{3}{7} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{7} \frac{1}{1+3z^{-1}} \quad (17.168)$$

που δίνει

$$h[n] = u[n] - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{3}{7} (-3)^n u[-n-1] \quad (17.169)$$

Παρατηρούμε ότι το σήμα είναι μη ευσταθές γιατί δεν περιέχεται ο μοναδιαίος κύκλος στο πεδίο σύγκλισής του. Παρατηρούμε επίσης ότι το σήμα είναι μη αιτιατό, από τη μορφή του $h[n]$.

Στο παραπάνω παράδειγμα, καμιά από τις περιοχές σύγκλισης δεν περιλάμβανε το μοναδιαίο κύκλο, οπότε καμιά κρουστική απόκριση δεν περιέγραφε ένα ευσταθές σύστημα. Αυτό ήταν αναμενόμενο, μια και υπάρχει πόλος στη θέση $z = 1$, δηλ. ακριβώς επάνω στο μοναδιαίο κύκλο!

■

Παράδειγμα 17.12:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (17.170)$$

στην περίπτωση που το σύστημα είναι

(α') ευσταθές

(β') αιτιατό

Γράψτε την εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Λύση:

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$H(z) = \frac{A}{1-2z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.171)$$

με

$$A = (1 - 2z^{-1})H(z) \Big|_{z=2} = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=2} = 1 \quad (17.172)$$

$$B = (1 + \frac{1}{2}z^{-1})H(z) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 1 \quad (17.173)$$

Οπότε

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.174)$$

Οι πόλοι του συστήματος βρίσκονται στις θέσεις $z = 2, z = -1/2$, και τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι τα

- $|z| > 2$
- $1/2 < |z| < 2$

- $|z| > 2$

(α') Αν το σύστημα είναι ευσταθές, τότε το πεδίο σύγκλισης πρέπει να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Το μόνο πιθανό πεδίο σύγκλισης που ικανοποιεί την απαίτηση αυτή είναι το $1/2 < |z| < 2$. Σε αυτήν την περίπτωση, τα επιμέρους πεδία σύγκλισης είναι $|z| > 1/2$ και $|z| < 2$. Με χρήση των Πινάκων 16.1, 16.2, έχουμε

$$h[n] = -2^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (17.175)$$

(β') Αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε το πεδίο σύγκλισης πρέπει να είναι εξωστρεφές. Το μόνο τέτοιο πεδίο είναι το $|z| > 2$, το οποίο προκύπτει ως η τομή των $|z| > 1/2$ και $|z| > 2$. Συμβουλευόμενοι τους πίνακες, έχουμε

$$h[n] = 2^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (17.176)$$

Η εξίσωση διαφορών δίνεται με αντίστροφο μετασχ. Z στη συνάρτηση μεταφοράς. Άρα

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - \frac{3}{2}z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (17.177)$$

$$Y(z)(1 - 2z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1}) = X(z)(2 - \frac{3}{2}z^{-1}) \quad (17.178)$$

$$y[n] - \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - \frac{3}{2}x[n-1] \quad (17.179)$$

Παράδειγμα 17.13:

Ένα σύστημα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Το σύστημα είναι αιτιατό
- Η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πραγματική
- Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = \frac{j}{2}$ και ακριβώς ένα μηδενικό
- Η συνάρτηση μεταφοράς $1/H(z)$ έχει δυο μηδενικά.
- $\sum_{n=0}^{+\infty} h[n]2^{-n} = 0$
- $h[0] = 1$

Βρείτε την κρουστική απόκριση και ελέγξτε την ευστάθεια του συστήματος.

Λύση:

Αφού η κρουστική απόκριση είναι πραγματική και το $H(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = j/2$, θα έχει υποχρεωτικά κι έναν πόλο στη θέση $z = -j/2$. Αφού η συνάρτηση $1/H(z)$ έχει δυο μηδενικά, θα πρέπει η $H(z)$ να έχει δυο πόλους, όχι περισσότερους ή λιγότερους. Άρα η μορφή της ζητούμενης συνάρτησης μεταφοράς θα είναι

$$H(z) = \frac{A(1 - az^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})} = \frac{A(1 - az^{-1})}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \quad (17.180)$$

Η Σχέση

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h[n]2^{-n} = 0 \quad (17.181)$$

υποδηλώνει ότι

$$H(z)|_{z=2} = 0 \quad (17.182)$$

Αντικαθιστώντας και λύνοντας, έχουμε

$$\left. \frac{A(1 - az^{-1})}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \right|_{z=2} = 0 \iff A\left(1 - \frac{a}{2}\right) = 0 \iff a = 2 \quad (17.183)$$

Άρα

$$H(z) = A \frac{(1 - 2z^{-1})}{(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})} = A \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \cos(\pi/2)z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \quad (17.184)$$

Με χρήση του Πίνακα 16.2, έχουμε

$$h[n] = A \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \cos \left(\frac{\pi}{2}n \right) - 2A \left(\frac{1}{2} \right)^n \sin \left(\frac{\pi}{2}n \right) \right) u[n] \quad (17.185)$$

Αφού $h[0] = 1$, βλέπουμε ότι $A = 1$, άρα η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n \cos \left(\frac{\pi}{2}n \right) - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n \sin \left(\frac{\pi}{2}n \right) \right) u[n] \quad (17.186)$$

Η ευστάθεια επιβεβαιώνεται από δυο στοιχεία: πρώτον, οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, και εφόσον το σύστημα είναι αιτιατό, το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Δεύτερον, η μορφή της κρουστικής απόκρισης τείνει στο μηδέν όσο $n \rightarrow \infty$, άρα θα ικανοποιηθεί η συνθήκη ευστάθειας.



teaching the 'Z-TRANSFORM'...

Σχήμα 17.11: Διδάσκοντας τον Μετασχηματισμό Z... :-)

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος και Αιτιατότητα

Ένα αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν το πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς έχει όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου, ενώ ένα αντι-αιτιατό σύστημα είναι ευσταθές - και άρα έχει μετασχ. Fourier - όταν έχει όλους τους πόλους του εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Οπότε τα παραπάνω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

Ευστάθεια ΓΧΑ Συστήματος

Κριτήριο ευστάθειας (και άρα ύπαρξης του μετασχ. Fourier) για οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα είναι η συμπεριληψη του μοναδιαίου κύκλου $|z| = 1$ μέσα στο πεδίο σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς.

Οι δυο πρώτες παρατηρήσεις ίσως σας φαίνονται περίεργες. Γιατί η αιτιατότητα να έχει να κάνει με τη θέση των πόλων; Αφού μόλις πριν λίγο είπαμε - και γράψαμε μόλις δυο σειρές πιο πάνω - ότι κριτήριο ευστάθειας είναι

μόνον η συμπερίληψη του μοναδιαίου κύκλου στο πεδίο σύγκλισης. Πράγματι, έτσι είναι, απλώς οι δυο πρώτες παρατηρήσεις είναι μια επαναδιατύπωση του κριτηρίου αυτού σε σχέση με την αιτιατότητα ή μη ενός συστήματος.

Σκεφτείτε το λίγο.... αν ένα σύστημα είναι αιτιατό, τότε έχει εξωστρεφές πεδίο σύγκλισης, με όριο τον πόλο με το μεγαλύτερο μέτρο, έστω $|a_i|$ αυτός. Άρα το πεδίο σύγκλισης είναι $|z| > |a_i|$. Όμως αν όλοι οι πόλοι είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε και αυτός ο πόλος θα είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου, άρα $|a_i| < 1$, και έτσι το πεδίο σύγκλισης αυτόματα περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο. Άρα είναι ευσταθές! :-). Με παρόμοια λογική αποδεικνύεται και το αντίστοιχο για τα αντι-αιτιατά συστήματα.

17.4.2 Διάταξη Συστημάτων

Η διάταξη σε σειρά και σε παραλληλία έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο περί Μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου. Συστήματα σε σειρά εκφράζονται ως η συνέλιξη των επιμέρους συστημάτων στο χρόνο (και άρα σε γινόμενο των μετασχ. Z τους), ενώ συστήματα σε παραλληλία εκφράζονται σε άθροισμα των επιμέρους συστημάτων τόσο στο χώρο του χρόνου όσο και σε αυτόν του μετασχ. Z.

17.5 Η Απόκριση σε Συχνότητα ΓΧΑ Συστημάτων

Ανακεφαλαιώνοντας εν τάχει τα προηγούμενα, γνωρίζουμε ότι, δεδομένου ενός ΓΧΑ συστήματος με κρουστική απόκριση $h[n]$, η είσοδος και η έξοδος σχετίζονται με τη σχέση της συνέλιξης

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (17.187)$$

Όπως έχουμε ήδη δει, η σχέση αυτή μεταφερόμενη στο πεδίο της συχνότητας συνεπάγεται ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (17.188)$$

όπου $H(e^{j\omega})$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος. Η σχέση αυτή μπορεί να εκφραστεί στο χώρο του Z ως

$$Y(z) = X(z)H(z), \quad R_Y \supseteq R_X \cap R_H \quad (17.189)$$

όπου $H(z)$ ο μετασχ. Z του $h[n]$, που φέρει το όνομα *συνάρτηση μεταφοράς* του συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι πολύ χρήσιμη στην περιγραφή και την ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων.

Αν αναλύσουμε σε πολική μορφή την απόκριση σε συχνότητα της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος, εκφρασμένη όπως στη Σχέση (17.188, βλέπουμε ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (17.190)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}|H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (17.191)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}))} \quad (17.192)$$

και άρα

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})| \quad (17.193)$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}) \quad (17.194)$$

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ λέγεται *απόκριση πλάτους* (magnitude response) ή *κέρδος* (gain) του συστήματος, και η συνάρτηση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$ λέγεται *απόκριση φάσης* (phase response) του συστήματος. Τονίζεται ξανά εδώ ότι η απόκριση πλάτους της εξόδου αποτελείται από το *γινόμενο* των αποκρίσεων πλάτους της εισόδου και του συστήματος, ενώ η απόκριση φάσης της εξόδου αποτελείται από το *άθροισμα* των αποκρίσεων φάσης της εισόδου και του συστήματος.

Αυτές οι σχέσεις επιδρούν στην είσοδο του συστήματος και τη μεταβάλλουν, είτε με επιθυμητό είτε με ανεπιθύμητο τρόπο. Όσον αφορά το τελευταίο, τότε οι αντίστοιχες σχέσεις αποκαλούνται *διαταραχές πλάτους και φάσης*, αντίστοιχα.

17.5.1 Απόκριση Φάσης

Όσον αφορά την απόκριση πλάτους ενός ΓΧΑ συστήματος, τα πράγματα είναι σχετικά ξεκάθαρα. Το γινόμενο της απόκρισης πλάτους του συστήματος και του φάσματος πλάτους της εισόδου δίνει το φάσμα πλάτους της

εξόδου. Τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα αν θέλουμε να δούμε πως μεταβάλλεται η απόκριση φάσης, και ποιά είναι η επιρροή της στο φάσμα φάσης της εξόδου. Υπενθυμίζεται ότι η φάση σχετίζεται με τη χρονική δομή ενός σήματος, και υπό την οπτική του ΓΧΑ συστήματος, η απόκριση φάσης σχετίζεται με τη διατήρηση ή μη της αρχικής χρονικής δομής του σήματος εισόδου στην έξοδο.

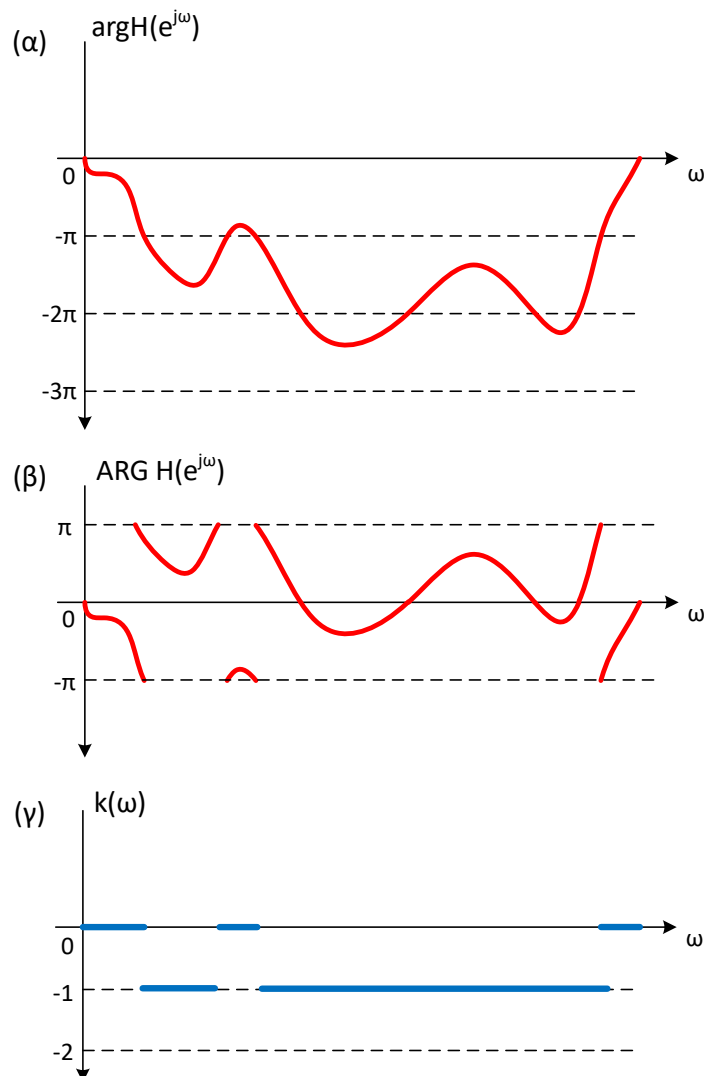
Γνωρίζετε ότι η φάση ενός οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού δεν ορίζεται μονοσήμαντα, αφού αν προσθέσουμε έναν αριθμό $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, το αποτέλεσμα της φάσης παραμένει αμετάβλητο (όπως και ο ίδιος ο μιγαδικός). Όταν υπολογίζουμε τη φάση μέσω ενός προγράμματος ή μιας αριθμομηχανής, το αποτέλεσμα εμφανίζεται πάντα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Αυτή η τιμή της φάσης λέγεται **πρωτεύουσα τιμή φάσης (principal value)**, και θα τη συμβολίζουμε ως

$$-\pi < \text{ARG}[H(e^{j\omega})] \leq \pi \quad (17.195)$$

Οποιαδήποτε άλλη γωνία που δίνει ορθό αποτέλεσμα για τη μιγαδική τιμή της συνάρτησης $H(e^{j\omega})$ μπορεί να αναπαρασταθεί με όρους πρωτεύουσας τιμής ως

$$\angle H(e^{j\omega}) = \text{ARG}[H(e^{j\omega})] + 2\pi k(\omega) \quad (17.196)$$

όπου $k(\omega)$ είναι ένας θετικός ή αρνητικός ακέραιος που διαφέρει για κάθε τιμή του ω . Θα χρησιμοποιούμε γενικά τη γραφή $\angle H(e^{j\omega})$ ή $\arg[H(e^{j\omega})]$ για να δηλώσουμε μη πρωτεύουσα τιμή της φάσης.



Σχήμα 17.12: (α) Συνεχής και (β) πρωτεύουσα τιμή φάσης.

Σε πολλές περιπτώσεις, η πρωτεύουσα τιμή φάσης παρουσιάζει 2π -ασυνέχειες όταν τη βλέπουμε ως συνάρτηση του ω . Το Σχήμα 17.12 δείχνει μια συνάρτηση φάσης που είναι συνεχής, $\arg[H(e^{j\omega})]$, και την πρωτεύουσα τιμή της, $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$ στο διάστημα $-\pi < \omega \leq \pi$. Η συνάρτηση φάσης του Σχήματος 17.12(α) εκτείνεται πέρα από το διάστημα $(-\pi, \pi]$. Η πρωτεύουσα τιμή φάσης του Σχήματος 17.12(β) έχει “άλματα” κατά πολλαπλάσια του

2π , λόγω της αφαίρεσης πολλαπλασίων του 2π που έλαβαν χώρα ώστε να βρεθεί κάθε τιμή της στο διάστημα $(-\pi, \pi]$. Τέλος, το Σχήμα 17.12(γ) δείχνει την τιμή του $k(\omega)$ για κάθε διάστημα, δηλ. πόσα πολλαπλάσια του 2π απαιτούνται για το “ξετύλιγμα” (unwrapping) της φάσης εκτός του διαστήματος $(-\pi, \pi]$. Γι’ αυτό άλλωστε και η διαδικασία μετατροπής της πρωτεύουσας φάσης σε συνεχή συνάρτηση του ω μέσω προσθήκης πολλαπλασίων του 2π λέγεται **ξετύλιγμα φάσης - phase unwrapping**, και η αντίστοιχη συνάρτηση **ξετυλιγμένη φάση - unwrapped phase**.

17.5.2 Καθυστέρηση Φάσης και Καθυστέρηση Ομάδας - Phase and Group Delay

Θα ήταν ενδιαφέρον λοιπόν να μελετήσουμε τη φάση μέσω κάποιων νέων ορισμών. Έστω η έξοδος $y[n]$ ενός ΓΧΑ συστήματος με φασματική απόκριση $H(e^{j\omega})$. Σύμφωνα με την αρχική ανάλυσή μας, το σύστημα θα εφαρμόσει κάποια καθυστέρηση στην έξοδο σε σχέση με την είσοδο $x[n]$, η οποία οφείλεται σε μια, πιθανότατα, μη γραμμική απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega}) = \theta(\omega)$ του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση όπου η είσοδος είναι ένα απλό ημίτονο

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (17.197)$$

Ξέρουμε ότι η έξοδος θα είναι επίσης ημιτονοειδούς μορφής, και συγκεκριμένα

$$y[n] = A |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta(\omega_0)) = A |H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0 \left(n + \frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0}\right) + \phi\right) \quad (17.198)$$

Η ποσότητα $\frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0}$ μας υποδεικνύει τη χρονική καθυστέρηση (μετατόπιση), σε δείγματα, του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου. Η συνάρτηση

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad (17.199)$$

ονομάζεται **καθυστέρηση φάσης - phase delay**.

Θεωρήστε τώρα ότι το σήμα εισόδου αποτελείται από πολλά ημίτονα, διαφορετικής συχνότητας το καθένα. Καταλαβαίνετε ότι κάθε τέτοιο ημίτονο θα υποστεί διαφορετική καθυστέρηση φάσης από κάθε άλλο όταν περάσει από ένα ΓΧΑ σύστημα, και το σήμα εξόδου $y[n]$ θα είναι, εν γένει, διαφορετικό στη μορφή του σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου $x[n]$. Σε τέτοιες περιπτώσεις μας είναι χρήσιμη μια διαφορετική παράμετρος, που θα την αναπτύξουμε παρακάτω, μέσω ενός παραδείγματος.

Έστω ένα σήμα

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n) \cos(\omega_c n) \quad (17.200)$$

με $\omega_c > \omega_0$. Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **διαμόρφωση πλάτους - Amplitude Modulation (AM)** και ήταν μια πρώτης μορφής ραδιοφωνική μετάδοση. Το σήμα χαμηλής συχνότητας ω_0 λέγεται **περιβάλλουσα** (ή σήμα πληροφορίας - το χρήσιμο σήμα που θέλουμε να μεταδοθεί), ενώ το σήμα συχνότητας ω_c λέγεται **φέρων σήμα**, αφού φέρει την πληροφορία στο πλάτος του. Με τις σχέσεις του Euler, αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \frac{A}{2} \cos((\omega_c + \omega_0)n) + \frac{A}{2} \cos((\omega_c - \omega_0)n) = \frac{A}{2} \cos(\omega_l n) + \frac{A}{2} \cos(\omega_u n) \quad (17.201)$$

με $\omega_l = \omega_c - \omega_0$ και $\omega_u = \omega_c + \omega_0$. Άρα στο σήμα απλής AM διαμόρφωσης της Σχέσης (17.200) υπάρχουν δυο συχνότητες, οι ω_l, ω_u , και οι δυο γύρω από τη φέρουσα συχνότητα ω_c . Αν το παραπάνω σήμα παρουσιαστεί ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα με φασματική απόκριση

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \quad (17.202)$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = |H(e^{j\omega_l})| \frac{A}{2} \cos(\omega_l n + \theta(\omega_l)) + |H(e^{j\omega_u})| \frac{A}{2} \cos(\omega_u n + \theta(\omega_u)) \quad (17.203)$$

$$= A \cos\left(\omega_c n + \frac{\theta(\omega_u) + \theta(\omega_l)}{2}\right) \cos\left(\omega_0 n + \frac{\theta(\omega_u) - \theta(\omega_l)}{2}\right) \quad (17.204)$$

θεωρώντας για ευκολία ότι $|H(e^{j\omega})| \approx 1$ στο διάστημα $\omega_l \leq \omega \leq \omega_u$, και χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες. Έτσι, βλέπουμε ότι η έξοδος είναι επίσης στη μορφή γινομένου δυο ημιτόνων με συχνότητες ω_c και

ω_0 , όμως το καθένα έχει διαφορετική φάση μετατόπισης, και άρα διαφορετική καθυστέρηση σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου οι συχνότητες ω_u, ω_l είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, δηλαδή $\omega_c \gg \omega_0$, οπότε $\omega_u \approx \omega_c$ και $\omega_l \approx \omega_c$. Σε ένα μικρό εύρος συχνοτήτων γύρω από το ω_c , μπορούμε να εκφράσουμε την ξετυλιγμένη φάση $\theta_c(\omega)$ του ΓΧΑ συστήματος με χρήση αναπτύγματος Taylor ως¹

$$\theta_c(\omega) \approx \theta_c(\omega_c) + \left. \frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} (\omega - \omega_c) \quad (17.205)$$

κρατώντας μόνο τους δυο πρώτους όρους του αναπτύγματος. Με χρήση του αναπτύγματος, μπορούμε να βρούμε τις χρονικές καθυστερήσεις του σήματος συχνότητας ω_c και αυτού συχνότητας ω_0 της Σχέσης (17.204). Για το σήμα συχνότητας ω_c , η φάση μετατόπισής του είναι

$$-\frac{\theta_c(\omega_u) + \theta_c(\omega_l)}{2\omega_c} \approx -\frac{2\theta_c(\omega_c)}{2\omega_c} = -\frac{\theta_c(\omega_c)}{\omega_c} \quad (17.206)$$

που είναι το ίδιο με την καθυστέρηση φάσης του σήματος συχνότητας ω_c , σαν να περνούσε μόνο αυτό μέσα από το σύστημα. Για το σήμα συχνότητας ω_0 , η χρονική καθυστέρηση είναι

$$-\frac{\theta_c(\omega_u) - \theta_c(\omega_l)}{2\omega_0} = -\frac{\theta_c(\omega_u) - \theta_c(\omega_l)}{\omega_u - \omega_l} \approx -\left. \frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (17.207)$$

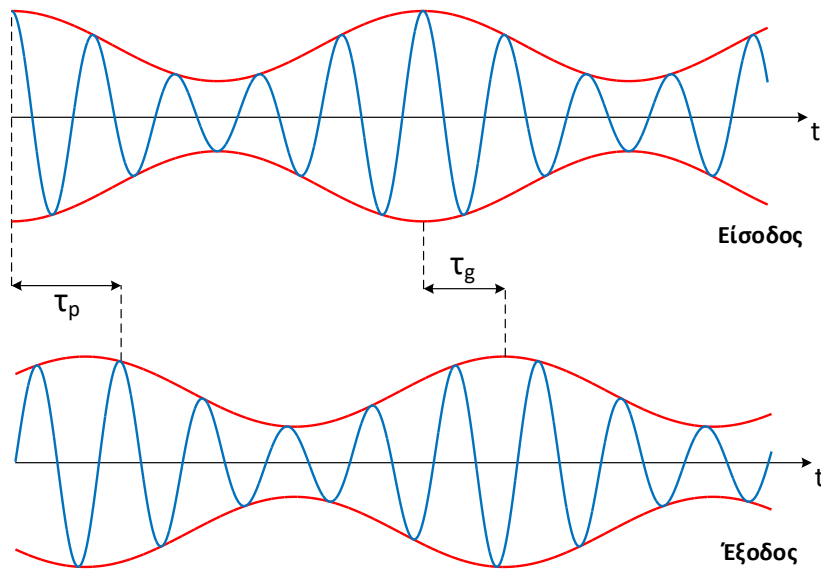
Η παράμετρος

$$\tau_g(\omega_c) = -\left. \frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (17.208)$$

λέγεται **καθυστέρηση ομάδας - group delay** που προκαλείται από το σύστημα στη θέση $\omega = \omega_c$. Στη γενική μορφή, η συνάρτηση είναι της μορφής

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \quad (17.209)$$

Στο εξής, ως καθυστέρηση ομάδας ορίζεται η αρνητική παράγωγος της φάσης,



Σχήμα 17.13: Καθυστέρηση φάσης t_p και καθυστέρηση ομάδας t_g για το σήμα $y[n]$.

$$\tau_g(\omega) = \text{grd} [H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega} \{ \angle H(e^{j\omega}) \} = -\frac{d}{d\omega} \{ \arg \{ H(e^{j\omega}) \} \} \quad (17.210)$$

¹ Ανάπτυγμα Taylor γύρω από $x = a$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

και αφορά την καθυστέρηση που υπόκειται η περιβάλλουσα της εισόδου στο χρόνο λόγω της επίδρασης της απόκρισης φάσης του ΓΧΑ συστήματος. Μια σχηματική απεικόνιση της καθυστέρησης φάσης και της καθυστέρησης ομάδας για το παραπάνω παράδειγμα βλέπετε στο Σχήμα 17.13. Με άλλα λόγια, μας δίνει την καθυστέρηση μιας ομάδας συχνοτήτων στενής ζώνης (narrowband). Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας μας δίνει ένα μέτρο της γραμμικότητας (ή μη) της φάσης ως συνάρτηση της συχνότητας ω . Στο παραπάνω παράδειγμα, θεωρήσαμε ότι το σήμα μας είναι στενής ζώνης, δηλ. μη μηδενικό για $\omega \in [\omega_c - \epsilon, \omega_c + \epsilon]$, αλλά μπορούμε να σκεφτούμε ότι οποιοδήποτε σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα τέτοιων σημάτων, διαφορετικής ω_c για το καθένα. Αν η καθυστέρηση ομάδας είναι σταθερή ως προς τη συχνότητα, τότε κάθε συνιστώσα στενής ζώνης θα υποστεί την ίδια καθυστέρηση. Αν η καθυστέρηση ομάδας δεν είναι σταθερή, τότε θα υπάρχουν διαφορετικές καθυστερήσεις για διαφορετικά “πακέτα” συχνοτήτων, με αποτέλεσμα τη διασπορά στο χρόνο της ενέργειας του σήματος στην έξοδο του συστήματος. Έτσι, η μη γραμμικότητα στη φάση ή, ισοδυνάμως, η μη σταθερή καθυστέρηση ομάδας συνεπάγεται διασπορά σήματος στο χρόνο.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια της καθυστέρησης ομάδας, ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 17.14:

Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα ιδανικής καθυστέρησης, με χρονική απόκριση

$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d] \quad (17.211)$$

και βρείτε την καθυστέρηση ομάδας του.

Λύση:

Το σύστημα έχει φασματική απόκριση

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad (17.212)$$

η οποία σε πολική μορφή γράφεται ως

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1 \quad (17.213)$$

$$\angle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega n_d, \quad |\omega| < \pi \quad (17.214)$$

Παρατηρήστε ότι η χρονική καθυστέρηση (ή προήγηση, αν $n_d < 0$) σχετίζεται με τη φάση, η οποία είναι γραμμική ως προς τη συχνότητα. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{\arg\{H(e^{j\omega})\}\} = -\frac{d}{d\omega}(-\omega n_d) = n_d \quad (17.215)$$

και

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\arg\{H(e^{j\omega})\}}{\omega} = -\frac{-\omega n_d}{\omega} = n_d \quad (17.216)$$

Στην περίπτωση της γραμμικής φάσης, η καθυστέρηση ομάδας συμπίπτει με την καθυστέρηση φάσης. Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας είναι σταθερή όταν η απόκριση φάσης είναι γραμμική, και ισούται με τον αριθμό των δειγμάτων που καθυστερεί το σήμα εξόδου σε σχέση με το σήμα εισόδου. ■

Σε πολλές εφαρμογές, η διαταραχή φάσης σε μορφή καθυστέρησης θεωρείται αρκετά ήπια μορφή διαταραχής, μια και απλά μετατοπίζει το σήμα στο χρόνο, χωρίς κανένα άλλο ανεπιθύμητο πρόβλημα. Έτσι, σε πολλές περιπτώσεις σχεδίασης φίλτρων ή ΓΧΑ συστημάτων, η γραμμική φάση είναι αποδεκτή ως μορφή διαταραχής φάσης. Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα όπου η καθυστέρηση ομάδας δεν είναι σταθερή.

Παράδειγμα 17.15:

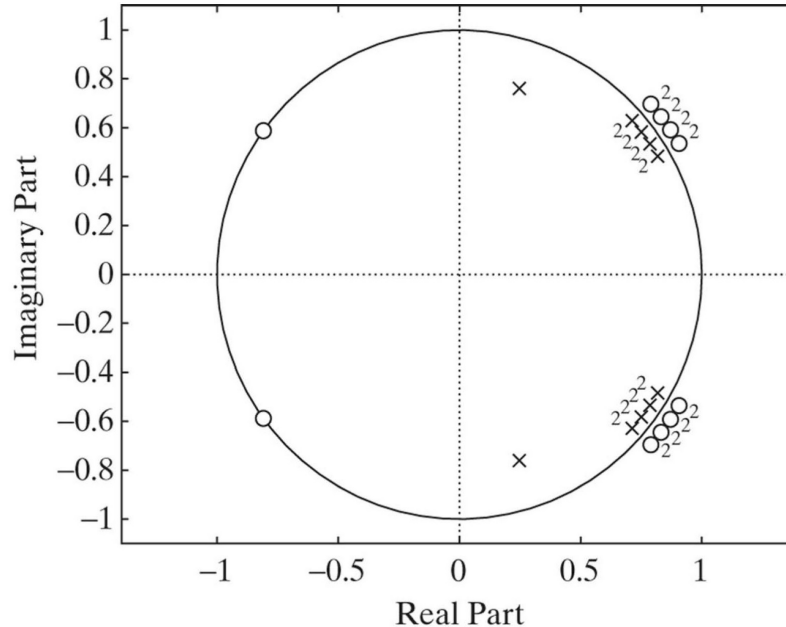
Θεωρήστε το σύστημα

$$H(z) = \left(\frac{(1 - 0.98e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.98e^{-j0.8\pi}z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j0.4\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.4\pi}z^{-1})} \right) \prod_{k=1}^4 \left(\frac{(c_k^* - z^{-1})(c_k - z^{-1})}{(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})} \right)^2 = H_1(z)H_2(z) \quad (17.217)$$

Μελετήστε τη συμπεριφορά του ως προς την καθυστέρηση ομάδας.

Λύση:

Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του παραπάνω συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 17.14. Το υποσύστημα $H_1(z)$



Σχήμα 17.14: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών συστήματος $H(z) = H_1(z)H_2(z)$.

συνεισφέρει το συζυγές ζεύγος πόλων $z = 0.8e^{\pm j0.4\pi}$, όπως και το ζεύγος μηδενικών κοντά στο μοναδιαίο κύκλο στις θέσεις $z = 0.98e^{\pm j0.8\pi}$. Το υποσύστημα $H_2(z)$ συνεισφέρει τα ζεύγη πόλων και μηδενικών δεύτερης τάξης στις θέσεις $c_k = 0.95e^{\pm j(0.15\pi + 0.02\pi k)}$ και $1/c_k = (1/0.95)e^{\mp j(0.15\pi + 0.02\pi k)}$, με $k = 1, 2, 3, 4$. Το $H_2(z)$ ονομάζεται *all-pass* σύστημα, γιατί $H_2(e^{j\omega}) = 1$, $\forall \omega$. Θα μελετήσουμε σύντομα τα *all-pass* συστήματα, και θα δούμε ότι μπορούν να εισάγουν μεγάλη καθυστέρηση ομάδας σε μια στενή ζώνη συχνοτήτων, χωρίς να επηρεάζουν το πλάτος τους.

Η φασματικές αποκρίσεις (πλάτους και φάσης) του συνολικού συστήματος φαίνονται στο Σχήμα 17.15 και στο Σχήμα 17.16. Αρχικά, παρατηρήστε το Σχήμα 17.15. Βλέπετε ότι αρχικά η φάση έχει υπολογιστεί στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ (πρωτεύουσα φάση), με αποτέλεσμα να έχει 2π -ασυνέχειες, οι οποίες στη συνέχεια αφαιρούνται, όταν προσθέσουμε κατάλληλα πολλαπλάσια του 2π στην πρωτεύουσα φάση, καταλήγοντας στην ζετυλιγμένη φάση.

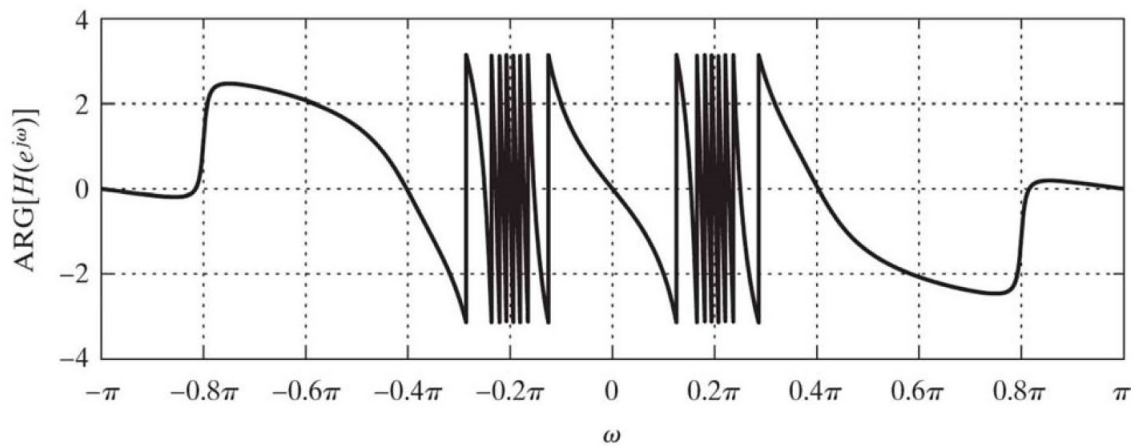
Στο Σχήμα 17.16, βλέπετε την καθυστέρηση ομάδας και το φάσμα πλάτους του συστήματος. Παρατηρήστε αρχικά ότι η ζετυλιγμένη φάση είναι μονότονη συνάρτηση, και μάλιστα φθίνουσα, εκτός από μια μικρή περιοχή γύρω από τη συχνότητα $\omega = \pm 0.8\pi$. Έτσι, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι θετική παντού εκτός αυτής της μικρής περιοχής γύρω από το $\omega = \pm 0.8\pi$. Επίσης, δείτε ότι η καθυστέρηση ομάδας έχει μεγάλες τιμές γύρω από τις συχνότητες $0.17\pi < |\omega| < 0.23\pi$, όπου εκεί η ζετυλιγμένη φάση έχει μέγιστη αρνητική κλίση. Αυτές οι συχνότητες αντιστοιχούν στις συχνότητες των ομάδων πόλων-μηδενικών που συζητήσαμε νωρίτερα. Επίσης, προσέξτε το αρνητικό “βύθισμα” στη συχνότητα $\omega = \pm 0.8\pi$, όπου η φάση έχει θετική κλίση. Είπαμε νωρίτερα ότι το $H_2(z)$ είναι ένα *all-pass* σύστημα, άρα το φάσμα πλάτους καθορίζεται απόλυτα από τις θέσεις των πόλων και μηδενικών του συστήματος $H_1(z)$. Έτσι, αφού ξέρουμε ότι η φασματική απόκριση δεν είναι τίποτε άλλο παρά η εκτίμηση του $H(z)$ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο $z = e^{j\omega}$, τα μηδενικά στις θέσεις $z = 0.98e^{\pm j0.8\pi}$ είναι η αιτία που το φάσμα πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ έχει πολύ μικρές τιμές, σχεδόν μηδενικές, κοντά στο $\omega = \pm 0.8\pi$. Αντίστοιχα, οι πόλοι στις θέσεις $z = 0.8e^{\pm j0.4\pi}$ είναι η αιτία που το φάσμα πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ έχει υψηλές τιμές κοντά στο $\omega = \pm 0.4\pi$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι στο παραπάνω σύστημα εμφανίζεται ως είσοδος το σήμα του Σχήματος 17.17. Όπως βλέπετε, το σήμα αποτελείται από τρεις παλμούς στενής ζώνης, οι οποίοι είναι διαχωρισμένοι στο χρόνο για ευκολία εποπτείας τους. Το φάσμα πλάτους του σήματος φαίνεται επίσης στο ίδιο Σχήμα. Η μαθηματική μορφή των παλμών είναι η

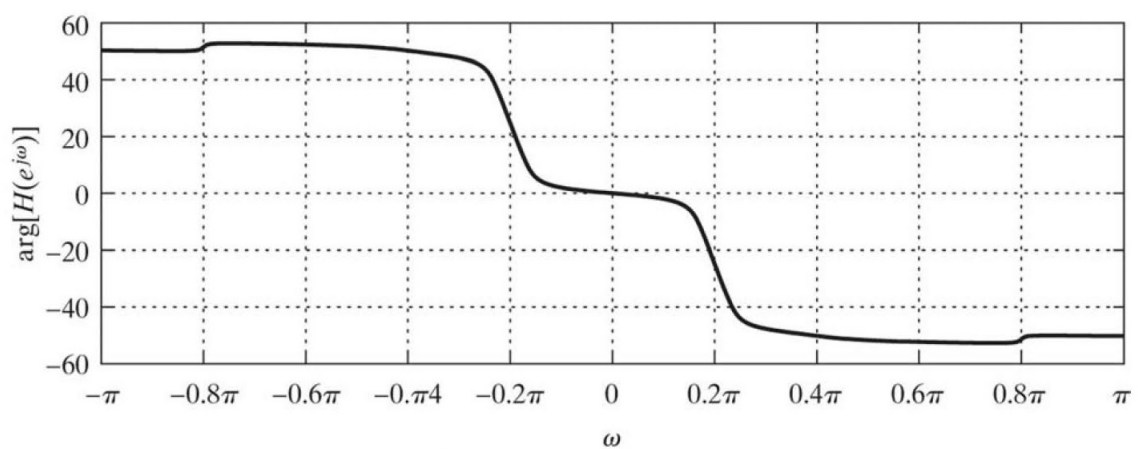
$$x_1[n] = w[n] \cos(0.2\pi n) \quad (17.218)$$

$$x_2[n] = w[n] \cos(0.4\pi n - \pi/2) \quad (17.219)$$

$$x_3[n] = w[n] \cos(0.8\pi n + \pi/5) \quad (17.220)$$



(a) Principle Value of Phase Response



(b) Unwrapped Phase Response

Σχήμα 17.15: (a) Πρωτεύουσα φάση και (b) ξετυλιγμένη φάση συστήματος $H(z) = H_1(z)H_2(z)$.

με $w[n]$ να είναι ένας πεπερασμένης διάρκειας παλμός που δίνεται ως

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (17.221)$$

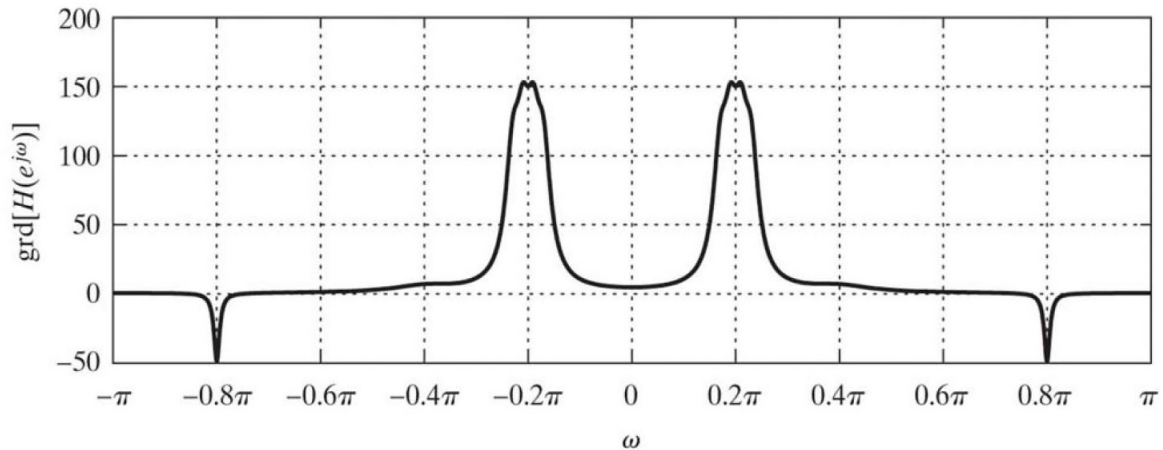
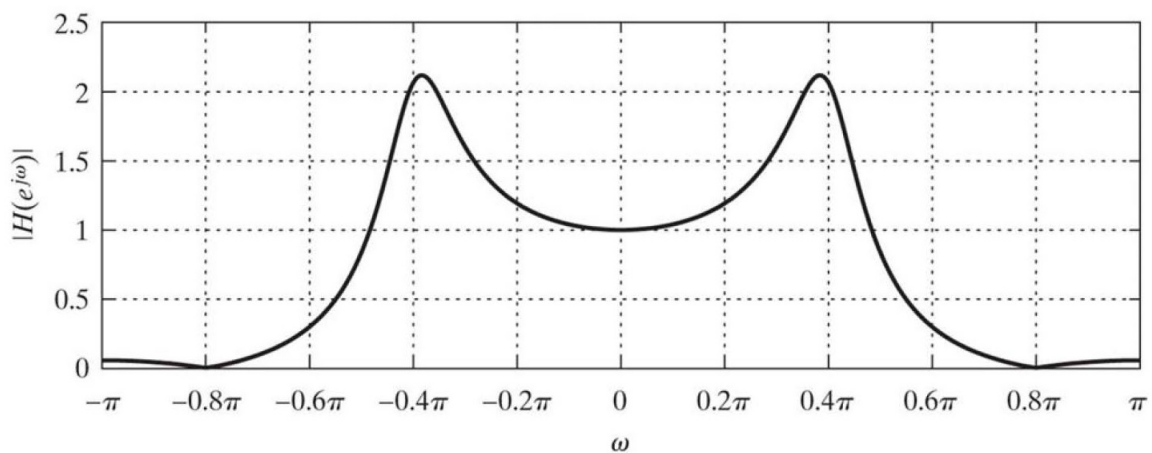
με $M = 60^2$. Άρα το συνολικό σήμα εισόδου περιγράφεται από τη σχέση

$$x[n] = x_3[n] + x_1[n - (M + 1)] + x_2[n - 2(M + 1)] \quad (17.222)$$

δηλ. όπως φαίνεται και στο Σχήμα 17.17, η υψηλότερη συχνότητα εμφανίζεται πρώτη, η χαμηλότερη συχνότητα εμφανίζεται δεύτερη, και ακολουθεί η μεσαία συχνότητα. Κοιτάζοντας το φάσμα πλάτους $|X(e^{j\omega})|$ μπορεί να αναρωτηθεί κανείς που βρέθηκαν αυτοί οι λοβοί γύρω από τις συχνότητες $\omega = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$. Θα περίμενε κανείς να συναντήσει συναρτήσεις Δέλτα σε αυτές τις συχνότητες, μια και αυτές αποτελούν το μετασχ. Fourier σημάτων συνημιτόνου όπως αυτά που έχουμε στην είσοδο. Ο λόγος που εμφανίζονται αυτοί οι λοβοί σε αυτές τις συχνότητες γίνονται κατανοητοί αν λάβουμε υπόψη μας τον όρο $w[n]$ και σκεφτούμε πώς “μεταφράζεται” το γινόμενο $w[n]$ επί $\cos(\omega_0 n)$ στο χώρο της συχνότητας. Όπως ήδη ξέρετε, το γινόμενο στο χρόνο γίνεται συνέλιξη στη συχνότητα, και άρα

$$w[n] \cos(\omega_0 n) \longleftrightarrow W(e^{j\omega}) * (\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)) = \pi W(e^{j(\omega - \omega_0)}) + \pi W(e^{j(\omega + \omega_0)}) \quad (17.223)$$

²Το σήμα αυτό λέγεται παράθυρο *Hamming*, και είναι σημαντικό στην επεξεργασία σήματος.

(a) Group delay of $H(z)$ 

(b) Magnitude of Frequency Response

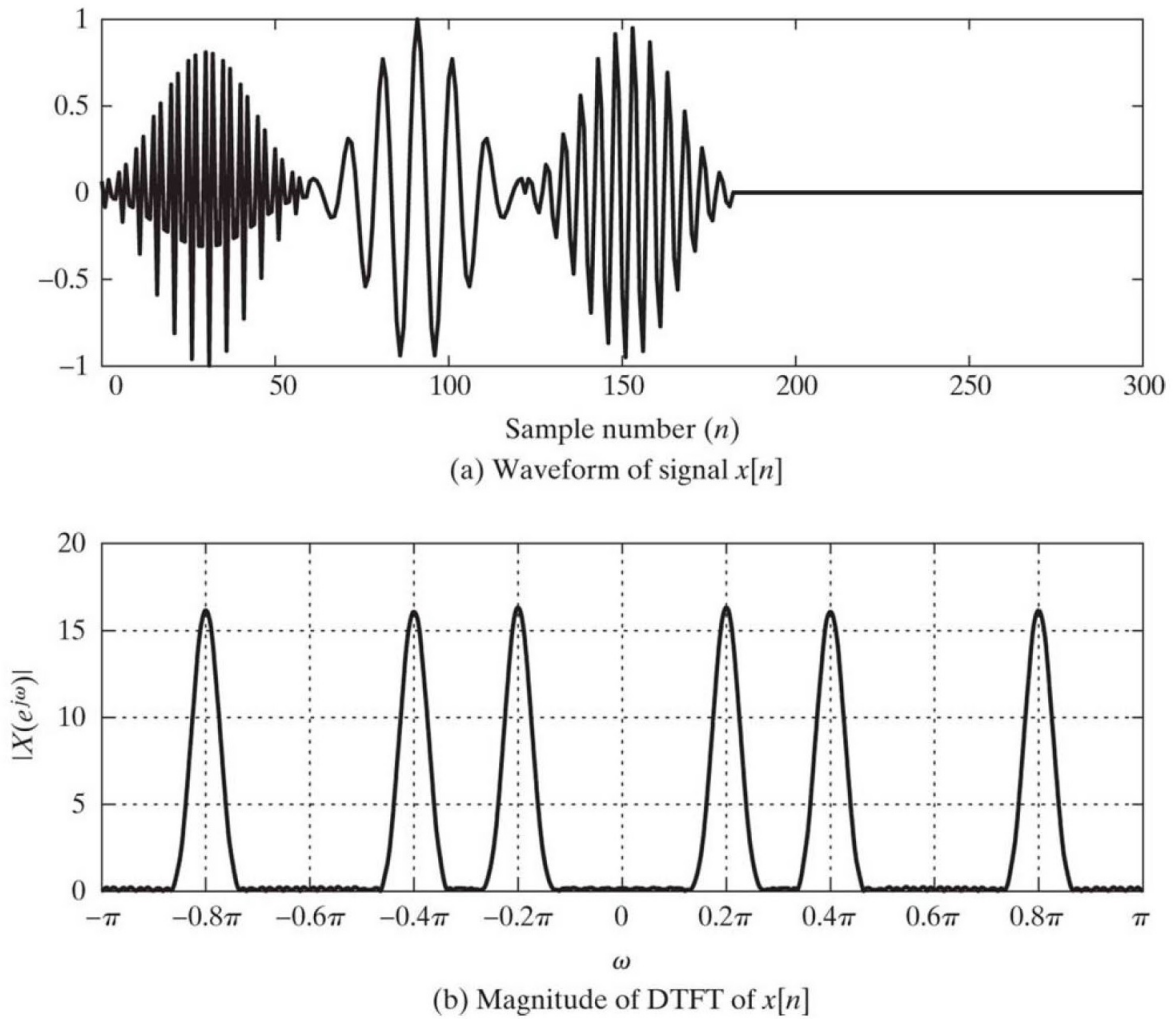
Σχήμα 17.16: (a) Καθυστέρηση ομάδας και (b) φάσμα πλάτους συστήματος $H(z) = H_1(z)H_2(z)$.

Άρα ουσιαστικά αυτό που βλέπουμε στο φάσμα πλάτους $|X(e^{j\omega})|$ για κάθε ημίτονο της εισόδου είναι ο μετασχ. Fourier $W(e^{j(\omega \pm \omega_0)})$ του παραθύρου $w[n]$ γύρω από τις συχνότητες $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$! Γι' αυτό και αντί για συναρτήσεις Δέλτα στις συχνότητες $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ (δηλ. ενέργεια ακριβώς και μόνο σε αυτές τις συχνότητες), βλέπουμε σημαντική ενέργεια γύρω από αυτές τις συχνότητες, σε ένα μικρό εύρος συχνοτήτων, που εξαρτάται από το είδος και τη διάρκεια του παραθύρου. Έστω ότι αυτό το εύρος έχει διάρκεια $2B$ rad/sample. Κάθε παλμός λοιπόν συνεισφέρει ένα σύνολο από συχνότητες $(\omega_0 - B, \omega_0 + B)$, όπου $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$, ή αλλιώς ένα εύρος από συχνότητες που έχουν κέντρο τις συχνότητες $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$.

Όταν λοιπόν το παραπάνω σήμα παρουσιαστεί ως είσοδος στο ΓΧΑ σύστημα $H(z)$, κάθε ένα από τα συχνοτικά “πακέτα” ή αλλιώς, κάθε μια από τις συχνοτικές “ομάδες” που σχετίζεται με καθέναν απ' τους παλμούς στενής ζώνης, θα επηρεαστεί από την απόκριση πλάτους του συστήματος, καθώς και από την καθυστέρηση ομάδας στο εύρος συχνοτήτων της κάθε συχνοτικής “ομάδας”. Από την απόκριση πλάτους του συστήματος, βλέπουμε ότι η συχνοτική “ομάδα” γύρω από τη συχνότητα $\omega_1 = 0.2\pi$ θα λάβει ένα μικρό κέρδος στο πλάτος της, και η “ομάδα” γύρω από τη συχνότητα $\omega_2 = 0.4\pi$ θα λάβει κέρδος στο πλάτος της περίπου ίσο με 2. Όσο για την “ομάδα” γύρω από τη συχνότητα $\omega_3 = 0.8\pi$, αφού η απόκριση πλάτους του συστήματος είναι πολύ μικρή γύρω από αυτή τη συχνότητα, ο παλμός υψηλότερης συχνότητας θα κατασταλεί σχεδόν πλήρως.

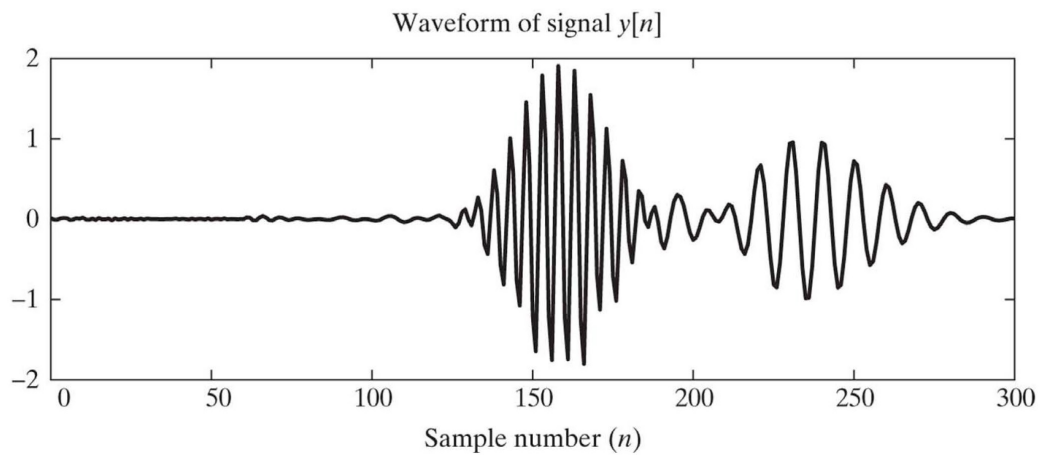
Κάνοντας την ίδια εξέταση για την καθυστέρηση ομάδας του συστήματος, θα δούμε ότι η καθυστέρηση ομάδας γύρω από τη συχνότητα $\omega_1 = 0.2\pi$ θα είναι σημαντικά μεγαλύτερη από αυτή είτε της συχνότητας $\omega_2 = 0.4\pi$ είτε της συχνότητας $\omega_3 = 0.8\pi$, και κατά συνέπεια ο παλμος με τη χαμηλότερη συχνότητα θα λάβει τη μεγαλύτερη καθυστέρηση μέσω του συστήματος.

Το σήμα εξόδου δίνεται στο Σχήμα 17.18. Ο παλμός συχνότητας $\omega_3 = 0.8\pi$ έχει ουσιαστικά εξουδετερωθεί. Οι άλλοι δυο παλμοί έχουν ενισχυθεί και καθυστερήσει: ο παλμός συχνότητας $\omega_1 = 0.2\pi$ είναι ελαφρώς μεγαλύτερου πλάτους, και έχει καθυστερήσει κατά 150 δείγματα περίπου, ενώ ο παλμός συχνότητας $\omega_2 = 0.4\pi$ είναι σχεδόν



Σχήμα 17.17: Σήμα (a) στο χρόνο και (b) φάσμα πλάτους σήματος εισόδου $x[n]$ του συστήματος $H(z) = H_1(z)H_2(z)$.

διπλάσιου πλάτους, και έχει καθυστερήσει κατά 10 δείγματα περίπου.



Σχήμα 17.18: Σήμα εξόδου $y[n]$ του συστήματος $H(z) = H_1(z)H_2(z)$.

Η υποενότητα αυτή έδειξε πως τα ΓΧΑ συστήματα τροποποιούν τα σήματα εισόδου τους μέσω του συνδυασμού της απόκρισης πλάτους και της απόκρισης φάσης. Για το τελευταίο παράδειγμα, όπου το σήμα εισόδου αποτελούνταν από συνιστώσες στενής ζώνης, ήταν εύκολο να βρούμε τις συνέπειες σε κάθε παλμό ξεχωριστά. Αυτό συνέβη γιατί

οι συναρτήσεις φασματικής απόκρισης (πλάτους, φάσης, καθυστέρηση ομάδας) ήταν ομαλές και μεταβάλλονται ελάχιστα γύρω από το μικρό εύρος συχνοτήτων που εμφανίζονταν οι συνιστώσες της εισόδου. Έτσι, όλες οι συχνότητες που σχετίζονται με ένα δεδομένο παλμό υπέστησαν περίπου την ίδια καθυστέρηση και το ίδιο κέρδος στο πλάτος τους, με αποτέλεσμα την αναπαραγωγή των συχνοτήτων στην έξοδο, σε διαφορετική θέση και με διαφορετικό πλάτος.

Για σήματα που δεν είναι στενής ζώνης, αλλά ευρείας ζώνης (wideband signals), το παραπάνω δε θα ήταν γενικά αληθές, γιατί διαφορετικά τμήματα του φάσματος θα τροποποιούνταν διαφορετικά από το σύστημα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα αναγνωρίσιμα χαρακτηριστικά της εισόδου, όπως το σχήμα του παλμού, δε θα είναι εμφανή στην έξοδο, και ξεχωριστές ομάδες παλμών στο χρόνο στην είσοδο μπορεί να καταλήξουν να είναι επικαλύψεις παλμών στην έξοδο.

17.6 Ευστάθεια και Αιτιατότητα

Επιθυμητά χαρακτηριστικά των ΓΧΑ συστημάτων που εξετάζουμε είναι η *ευστάθεια* και η *αιτιατότητα*: οι δυο αυτές επιθυμητές ιδιότητες επιβάλλουν κάποιους σημαντικούς περιορισμούς στη συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος.

17.6.0.1 Ευσταθεια

Γνωρίζουμε ότι η κρουστική απόκριση $h[n]$ ενός ευσταθούς συστήματος πρέπει να είναι απολύτως αθροίσιμη:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (17.224)$$

Προσέξτε ότι αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|z^{-n} < \infty \quad (17.225)$$

για $|z| = 1$, που σημαίνει ότι η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, αν και μόνο αν το σύστημα είναι ευσταθές. Άρα για κάθε αιτιατό σύστημα, απαιτείται οι παρουσία όλων των πόλων εντός του μοναδιαίου κύκλου ώστε να καταστεί αυτό ευσταθές.

17.6.0.2 Αιτιατότητα

Επειδή η κρουστική απόκριση $h[n]$ ενός αιτιατού συστήματος είναι δεξιόπλευρο σήμα, το πεδίο σύγκλισης του $H(z)$ θα είναι εξωστρεφές, δηλ. θα είναι της μορφής $|z| > |a|$, με a τον πόλο της $H(z)$ με το μεγαλύτερο μέτρο. Όμως εξωστρεφή πεδία σύγκλισης έχουν και δεξιόπλευρα σήματα που δεν είναι αιτιατά! Για παράδειγμα, το σύστημα

$$h[n] = u[n + 1] \quad (17.226)$$

είναι δεξιόπλευρο και έχει μετασχ. Ζ

$$H(z) = \frac{z}{1 - z^{-1}} \quad (17.227)$$

με πεδίο σύγκλισης $|z| > 1$. Άρα πως διαχωρίζει κανείς τα αιτιατά από τα δεξιόπλευρα σήματα; Μια διαισθητική απάντηση μπορεί να έρθει από το παραπάνω παράδειγμα. Μπορείτε εύκολα να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα έχει δυο μηδενικά στο $z = 0$ (διπλή ρίζα) και έναν πόλο στο $z = 1$. Αναζητώντας τον εναπομείναντα πόλο, βρίσχετε ότι

$$\lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \infty \quad (17.228)$$

και άρα υπάρχει ένας πόλος στο $z = \infty$. Άρα λοιπόν το πεδίο σύγκλισης - ως ένα τμήμα του μιγαδικού επιπέδου που δεν περιέχει πόλους - δεν πρέπει να περιέχει το άπειρο εντός του!

Ας μετατοπίσουμε κατά ένα δείγμα το παραπάνω σύστημα προς τα δεξιά, ώστε να το κάνουμε αιτιατό, κι ας παρατηρήσουμε τι θα αλλάξει. Έχουμε

$$h_c[n] = u[n] \longleftrightarrow H_c(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (17.229)$$

Παρατηρήστε ότι υπάρχει ένα μηδενικό στο $z = 0$ και ένας πόλος στο $z = 1$, και άρα το πεδίο σύγκλισης είναι το $|z| > 1$, το οποίο περιλαμβάνει και το άπειρο! Οπότε μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι η ύπαρξη πόλου - ή πόλων -

στο άπειρο είναι μια ένδειξη ότι το σύστημα δεν είναι αιτιατό.

Υπενθυμίζεται ότι στην περίπτωση που το ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l] \quad (17.230)$$

τότε η αιτιατότητα εγγυάται από τις συνθήκες αρχικής ηρεμίας, που σημαίνουν ότι

$$\text{αν } x[n] = 0, \quad n < n_0 \quad \text{τοτε } y[n] = 0, \quad n < n_0 \quad (17.231)$$

Η παραπάνω συνθήκη εξασφαλίζει ότι η χρονική απόκριση του συστήματος θα είναι αιτιατό σήμα, και κατά συνέπεια δε θα υπάρχει κάποιος πόλος στο άπειρο.

Η αιτιατότητα επιβάλλει κάποιους περιορισμούς στην απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος. Ένας απ' αυτούς εκφράζεται με το θεώρημα **Paley-Wiener**:

Αν $h[n] = 0, \quad n < 0$, και $h[n]$ έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln |H(e^{j\omega})|| d\omega < \infty \quad (17.232)$$

Κατά συνέπεια, η απόκριση σε συχνότητα ενός ευσταθούς και αιτιατού συστήματος δεν μπορεί να είναι ποτέ μηδενική για κάποια πεπερασμένη ζώνη συχνοτήτων. Έτσι, οποιοδήποτε ευσταθές ιδανικό φίλτρο επιλογής συχνοτήτες (χαμηλοπερατό, ζωνοπερατό, υψιπερατό) - τα οποία είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο - θα είναι αναγκαστικά μη αιτιατό.

17.7 Αντίστροφα Συστήματα

Για ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, το **αντίστροφο σύστημα** ορίζεται ως το σύστημα που έχει συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$, τέτοια ώστε

$$H(z)G(z) = 1 \leftrightarrow h[n] * g[n] = \delta[n] \quad (17.233)$$

Συνήθως το αντίστροφο σύστημα συμβολίζεται με το δείκτη i , ως $H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$. Ένα ερώτημα που μπορεί να τεθεί είναι τι συμβαίνει με το πεδίο σύγκλισης του αντιστρόφου συστήματος. Αν $\text{ROC}_H = R_H$, τότε ποιό είναι το πεδίο σύγκλισης του αντιστρόφου συστήματος, $\text{ROC}_H = R_{H_i}$; Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα μας δίνει το θεώρημα της συνέλιξης, το οποίο - όπως γνωρίζετε - λέει ότι τα σήματα $H(z)$ και $G(z) = H_i(z)$ πρέπει να έχουν επικαλυπτόμενα πεδία σύγκλισης.

Για παράδειγμα, αν το $H(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς του z , όπως στη Σχέση (17.233), το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$G(z) = H_i(z) = \frac{1 \prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})}{A \prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})} \quad (17.234)$$

δηλ. οι πόλοι του $H(z)$ γίνονται μηδενικά για το αντίστροφο σύστημα, ενώ τα μηδενικά γίνονται πόλοι. Συστήματα που έχουν όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου λέγονται **Συστήματα Ελάχιστης Φάσης**, και θα τα μελετήσουμε πολύ σύντομα.. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 17.16:

Έστω

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}, \quad |z| > 0.8 \quad (17.235)$$

Υπολογίστε το αντίστροφο σύστημα αυτού.

Λύση:

Το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \quad (17.236)$$

Όμως, για το πεδίο σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: $i) |z| > 0.5$, $ii) |z| < 0.5$. Από αυτά τα δυο πεδία, αυτό που επικαλύπτεται με το πεδίο σύγκλισης του $H(z)$ είναι το $|z| > 0.5$. Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την χρονική

απόκριση, η οποία είναι

$$h_i[n] = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right\} - Z^{-1}\left\{\frac{0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 0.8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (17.237)$$

το οποίο είναι αιτιατό και ευσταθές.

Παράδειγμα 17.17:

Έστω το σύστημα

$$H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}, \quad |z| > 0.8 \quad (17.238)$$

Βρείτε το αντίστροφο σύστημα.

Λύση:

Σε αυτήν την περίπτωση, το αντίστροφο σύστημα είναι

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}} = 2 \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \quad (17.239)$$

το οποίο έχει δυο πιθανά πεδία σύγκλισης, το $|z| > 2$ και το $|z| < 2$. Παρατηρήστε ότι και τα δύο πεδία σύγκλισης επικαλύπτονται με το πεδίο σύγκλισης του $H(z)$. Έτσι, και τα δυο είναι έγκυρα αντίστροφα συστήματα, μόνο που ανταποκρίνονται σε διαφορετικά σήματα στο χρόνο. Για αυτό με πεδίο σύγκλισης το $|z| > 2$, η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h_i[n] = 2(2)^n u[n] - 1.6(2)^{n-1} u[n-1] \quad (17.240)$$

το οποίο είναι αιτιατό αλλά ασταθές. Αυτό με πεδίο σύγκλισης το $|z| < 2$ έχει κρουστική απόκριση

$$h_i[n] = -2(2)^n u[-n-1] + 1.6(2)^{n-1} u[-n] \quad (17.241)$$

το οποίο είναι ευσταθές αλλά όχι αιτιατό!

17.8 Απόκριση σε Συχνότητα ΓΧΑ Συστημάτων με Χρήση Διαγράμματος Διανυσμάτων

Ας θυμηθούμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})} \quad (17.242)$$

Γνωρίζουμε ότι η απόκριση σε συχνότητα ενός συστήματος μπορεί να υπολογιστεί αν εκτιμήσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (17.243)$$

υπό την προϋπόθεση ότι το πεδίο σύγκλισης της περιέχει το μοναδιαίο κύκλο. Ένα σημαντικό ερώτημα - που το απαντήσαμε εν μέρει και ποιοτικά για την απόκριση πλάτους στο προηγούμενο κεφάλαιο - είναι τι επιρροή έχουν οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$ στη μορφή της φασματικής απόκρισης $H(e^{j\omega})$. Για ρητές συναρτήσεις μεταφοράς, η απόκριση σε συχνότητα μπορεί να βρεθεί γεωμετρικά από τους πόλους και τα μηδενικά του $H(z)$. Ας δούμε πως.

Το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα δίνεται από τη Σχέση (;;), αν θέσουμε $z = e^{j\omega}$ και πάρουμε το μέτρο:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^N |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^M |1 - a_k e^{-j\omega}|} \quad (17.244)$$

ενώ η φάση δίνεται από τη σχέση

$$\angle H(e^{j\omega}) = \arg\left[\frac{b_0}{a_0}\right] + \sum_{k=1}^M \arg[1 - b_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^N \arg[1 - a_k e^{-j\omega}] \quad (17.245)$$

όπου $\arg H(e^{j\omega})$ είναι η ζετυλιγμένη φάση. Τέλος, η καθυστέρηση ομάδας δίνεται ως

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \arg[1 - a_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega} \arg[1 - b_k e^{-j\omega}] \quad (17.246)$$

Μια εναλλακτική έκφραση για την καθυστέρηση ομάδας είναι

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{|a_k|^2 - \Re\{a_k e^{-j\omega}\}}{1 + |a_k|^2 - 2\Re\{a_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=1}^M \frac{|b_k|^2 - \Re\{b_k e^{-j\omega}\}}{1 + |b_k|^2 - 2\Re\{b_k e^{-j\omega}\}} \quad (17.247)$$

Παρατηρήστε ότι οι Σχέσεις (17.244, 17.245, 17.246) εκφράζονται ως άθροισμα από τις συνεισφορές των πόλων των και των μηδενικών σε πλάτος, φάση, και καθυστέρηση ομάδας. Αυτό είναι ενδιαφέρον, γιατί για να καταλάβουμε πώς οι πόλοι και τα μηδενικά επηρεάζουν τη φασματική απόκριση σε πραγματικά συστήματα μεγάλης τάξης, πρέπει να καταλάβουμε σε βάθος πως λειτουργούν συστήματα μικρής τάξης, όπως π.χ. πρώτης και δεύτερης τάξης, σε σχέση με τη θέση των πόλων και των μηδενικών τους. Μπορούμε τώρα να μελετήσουμε τη γεωμετρική σχέση πόλων-μηδενικών και απόκρισης σε συχνότητα, χρησιμοποιώντας **διαγράμματα διανυσμάτων**.

Ας επιστρέψουμε στη σχέση

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^N |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^M |1 - a_k e^{-j\omega}|} \quad (17.248)$$

Βλέπετε ότι το $|H(e^{j\omega})|$ είναι $|b_0/a_0|$ φορές το γινόμενο των όρων $|1 - b_k e^{-j\omega}|$ δια το γινόμενο των όρων $|1 - a_k e^{-j\omega}|$. Κάθε όρος στον αριθμητή

$$|1 - b_k e^{-j\omega}| = \frac{|e^{j\omega} - b_k|}{|e^{j\omega}|} = |e^{j\omega} - b_k| \quad (17.249)$$

είναι το μήκος του διανύσματος u_k από το μηδενικό στη θέση $z = b_k$ ως το μοναδιαίο κύκλο στο $z = e^{j\omega}$. Όμοια ακριβώς, κάθε όρος στον παρονομαστή

$$|1 - a_k e^{-j\omega}| = \frac{|e^{j\omega} - a_k|}{|e^{j\omega}|} = |e^{j\omega} - a_k| \quad (17.250)$$

είναι το μήκος του διανύσματος u_k από τον πόλο στη θέση $z = a_k$ ως το μοναδιαίο κύκλο στο $z = e^{j\omega}$. Ας δούμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού απόκρισης πλάτους από το διάγραμμα διανυσμάτων.

17.8.1 Συστήματα Πρώτης Τάξης

Ας ξεκινήσουμε με μερικά απλά συστήματα πρώτης τάξης.

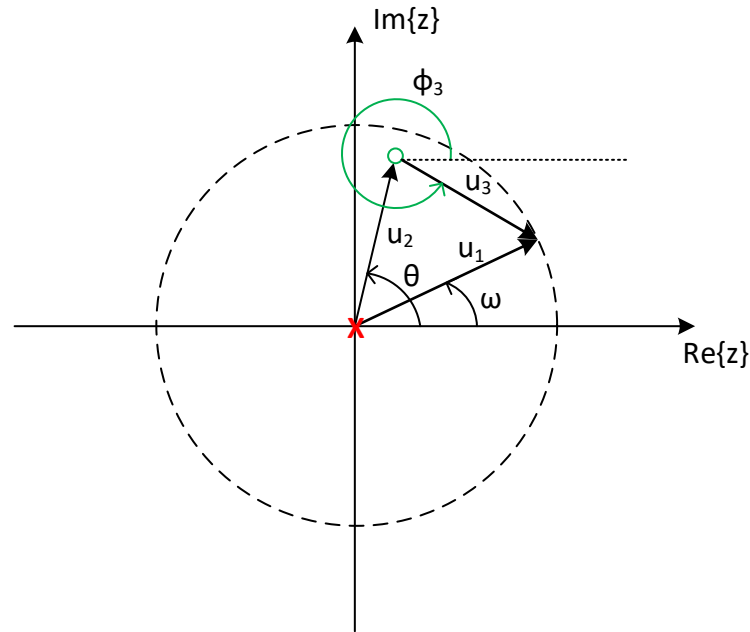
Παράδειγμα 17.18:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = b_k = r e^{j\theta}$ και, αναπόφευκτα, θα έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0$, όπως στο Σχήμα 17.19. Σχεδιάστε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και καθυστέρησης ομάδας.

Λύση:

Το διάνυσμα από το μηδενικό ως το μοναδιαίο κύκλο συμβολίζεται με u_3 , ενώ το διάνυσμα u_1 είναι το διάνυσμα του μεταβαλλόμενου μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$, και τέλος το διάνυσμα u_2 είναι το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων ως τη θέση του μηδενικού. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι

$$H(z) = (1 - r e^{j\theta} z^{-1}) = \frac{z - r e^{j\theta}}{z} \quad (17.251)$$



Σχήμα 17.19: Διάγραμμα Διανυσμάτων συστήματος πρώτης τάξης με ένα μηδενικό.

και άρα η φασματική απόκριση είναι

$$H(e^{j\omega}) = (1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}} \quad (17.252)$$

Η πρωτεύουσα φάση θα είναι

$$\text{ARG}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (17.253)$$

Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι

$$\text{grd}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (17.254)$$

Η απόκριση πλάτους θα είναι, όπως είδαμε πιο πάνω, ίση με

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}} \right| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}| \quad (17.255)$$

Όμως αυτό το μέτρο είναι το μέτρο του διανύσματος u_3 , δηλ. η απόκριση πλάτους εξαρτάται μόνο από το μέτρο του διανύσματος u_3 ! Όταν το διάνυσμα u_1 αρχίζει να “τρέχει” επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μεταβάλλοντας τη γωνία ω του, το μέτρο του u_3 μεταβάλλεται, δίνοντάς μας τις τιμές της $|H(e^{j\omega})|$ για κάθε ω . Ας δούμε πως, εξετάζοντας μια πλήρη περιστροφή του u_1 :

- Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ θα ξεκινά από μια τιμή στο $\omega = 0$, έστω $|H(e^{j0})|$.
- Προσέξτε ότι το $|u_3|$ μικραίνει όσο το $\omega \rightarrow \theta$, και θα γίνει ελάχιστο όταν $\omega = \theta$. Άρα η απόκριση πλάτους θα φθίνει μέχρι το $\omega = \theta$, όπου η $|H(e^{j\omega})|$ θα γίνει ελάχιστη.
- Μετά, το διάνυσμα $|u_3|$ θα αρχίσει να μεγαλώνει ξανά, άρα η $|H(e^{j\omega})|$ θα αυξάνει και πάλι μέχρι $\omega = \pi + \theta$, όπου θα γίνει μέγιστη.
- Όσο $\omega \rightarrow 2\pi$, το $|u_3|$ θα φθίνει και πάλι, άρα η $|H(e^{j\omega})|$ θα μικραίνει ξανά, μέχρι να επανέλθει στην ίδια τιμή $|H(e^{j0})|$ που είχε όταν $\omega = 0$, αφού τώρα έχει συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.

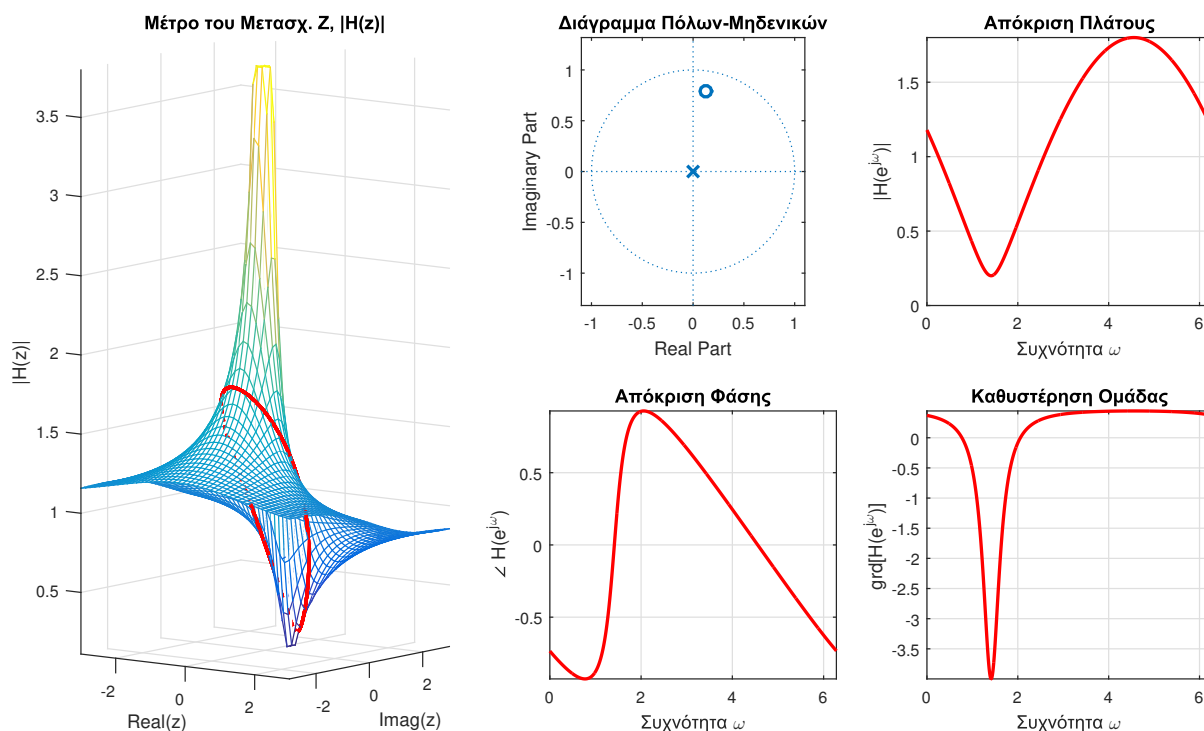
Για την απόκριση φάσης, έχουμε ότι

$$\angle(1 - re^{j\theta}) = \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \angle e^{j\omega} = \angle u_3 - \angle u_1 = \phi_3 - \phi_1 = \phi_3 - \omega \tag{17.256}$$

Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση φάσης ισούται με τη διαφορά της γωνίας ϕ_3 , δηλ. της γωνίας του διανύσματος u_3 μείον τη γωνία του διανύσματος u_1 . Ας κάνουμε παρόμοια ανάλυση κι εδώ, με βάση το Σχήμα 17.19:

- Όταν $\omega = 0$, η απόκριση φάσης έχει μια τιμή, έστω $\angle H(e^{j\omega}) = \phi_3$, η οποία όμως είναι αρνητική, γιατί η ϕ_3 είναι μεγαλύτερη από π , οπότε η τιμή της ανήκει στο διάστημα $(-\pi, 0)$.
- Όταν $\omega \rightarrow \theta$, παρατηρούμε τα εξής:
 - Όταν το φανταστικό μέρος του u_1 γίνει ίσο με το φανταστικό μέρος του u_2 , τότε $\angle H(e^{j\omega}) = 2\pi - \omega = -\omega$, και εκεί η απόκριση φάσης είναι ελάχιστη.
 - Όταν η $\omega \rightarrow \theta$ από τα δεξιά, η γωνία ϕ_3 θα έχει πολύ μικρή μεταβολή σε σχέση με την ω , άρα η διαφορά τους θα μεγαλώνει απότομα.
 - όταν $\omega = \theta$, η διαφορά $\phi_3 - \omega$ θα είναι μηδέν, γιατί τότε $\phi_3 = \theta = \omega$. Άρα η φάση θα είναι μηδέν.
 - Όταν η ω απομακρύνεται αλλά βρίσκεται κοντά στη θ , η γωνία ϕ_3 θα έχει πολύ μεγάλη μεταβολή σε σχέση με την ω , άρα η διαφορά τους θα μεγαλώνει απότομα μέχρι το φανταστικό μέρος του u_1 γίνει ξανά ίσο με το φανταστικό μέρος του u_2 . Τότε η απόκριση φάσης θα γίνει μέγιστη, και από εκεί και μετά θα αρχίσει να φθίνει.
- Όταν $\omega = \pi + \theta$, η φάση θα είναι μηδέν, γιατί οι γωνίες ϕ_3 και ω θα είναι ίσες.
- Τέλος, όταν $\omega \rightarrow 2\pi$, η ω θα είναι όλο και μεγαλύτερη από την ϕ_3 και άρα η απόκριση φάσης θα φθίνει, μέχρι να φτάσει στην ίδια τιμή $\angle H(e^{j\omega}) = \phi_3$ που είχε για $\omega = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές του μηδενικού είναι $r = 0.8$ και $\theta = 0.45\pi$, τιμές που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στο Σχήμα 17.19. Τα στοιχεία φαίνεται στο Σχήμα 17.20. Παρατηρήστε ότι η ελάχιστη τιμή του είναι για



Σχήμα 17.20: Ανάλυση συστήματος πρώτης τάξης με ένα μηδενικό.

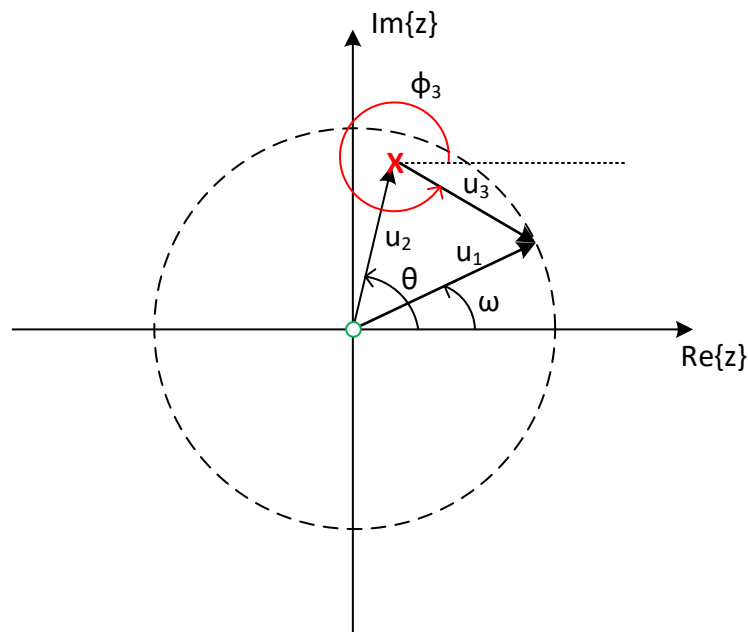
$\omega = \theta = 0.45\pi \approx 1.41$, όταν δηλαδή το διάνυσμα $|u_3|$ βρίσκεται στο μικρότερο μήκος του, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι για $\omega = \pi + 0.45\pi = 1.45\pi \approx 4.55$, όπως ακριβώς αναμενόταν από την προηγούμενη ανάλυσή μας. Παρατηρήστε και την απόκριση φάσης και δείτε τις ομοιότητες με την ανάλυσή μας.

Παράδειγμα 17.19:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα που έχει έναν πόλο στη θέση $z = b_k = re^{j\theta}$ και, αναπόφευκτα, θα έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 0$, όπως στο Σχήμα 17.24. Σχεδιάστε τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και καθυστέρησης ομάδας.

Λύση:

Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι



Σχήμα 17.21: Διάγραμμα Διανυσμάτων συστήματος πρώτης τάξης με έναν πόλο.

$$H(z) = \frac{1}{1 - re^{j\theta}z^{-1}} = \frac{z}{z - re^{j\theta}} \quad (17.257)$$

και άρα η φασματική απόκριση είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - re^{j\theta}} \quad (17.258)$$

Η πρωτεύουσα φάση θα είναι

$$\text{ARG} \left[\frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} \right] = \tan^{-1} \frac{-r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} = -\tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (17.259)$$

Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι

$$\text{grd} \left[\frac{1}{1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}} \right] = -\frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (17.260)$$

Παρατηρήστε ότι η απόκριση φάσης και η καθυστέρηση ομάδας είναι οι αρνητικές συναρτήσεις του προηγούμενου παραδείγματος, ενώ δεν ισχύει το ίδιο για την απόκριση πλάτους, όπως θα δούμε αμέσως!

Το διάνυσμα από τον πόλο ως το μοναδιαίο κύκλο συμβολίζεται με u_3 , ενώ το διάνυσμα u_1 είναι το διάνυσμα του μεταβαλλόμενου μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$, και τέλος το διάνυσμα u_2 είναι το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων

ως τη θέση του πόλου. Η απόκριση πλάτους εκφράζεται με όρους μετρών διανυσμάτων ως

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - re^{j\theta}} \right| = \frac{1}{|e^{j\omega} - re^{j\theta}|} \quad (17.261)$$

Άρα η απόκριση πλάτους εξαρτάται από το $\frac{1}{|u_3|}$. Όταν το διάνυσμα u_1 αρχίζει να “τρέχει” επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μεταβάλλοντας τη γωνία ω του, το μέτρο του u_3 μεταβάλλεται, και άρα αντίστοιχα μεταβάλλεται η ποσότητα $\frac{1}{|u_3|}$, δίνοντάς μας τις τιμές της $|H(e^{j\omega})|$ για κάθε ω . Ας δούμε πως, εξετάζοντας μια πλήρη περιστροφή του u_1 :

- Η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ θα ξεκινά από μια τιμή στο $\omega = 0$, έστω $|H(e^{j0})|$.
- Προσέξτε ότι το $|u_3|$ μικραίνει όσο το $\omega \rightarrow \theta_+$, και θα γίνει ελάχιστο όταν $\omega = \theta$. Άρα η απόκριση πλάτους θα μεγαλώνει μέχρι το $\omega = \theta$, όπου η $|H(e^{j\omega})|$ θα λάβει τη μέγιστη τιμή της. Σημειώστε ότι γύρω από τη γωνία $\omega = \theta$, η μεταβολή της απόκρισης πλάτους θα είναι πολύ απότομη, καθώς η ποσότητα $1/|u_3|$ μεταβάλλεται πολύ γρήγορα γύρω από τη γωνία του πόλου, λόγω της αργής μεταβολής του μέτρου του διανύσματος $|u_3|$ στην ίδια περιοχή.
- Στη συνέχεια, το $|u_3|$ θα αρχίσει να μεγαλώνει ξανά, άρα η $|H(e^{j\omega})|$ θα φθίνει και πάλι μέχρι $\omega = \pi + \theta$, όπου θα γίνει ελάχιστη.
- Όσο $\omega \rightarrow 2\pi$, το $|u_3|$ θα φθίνει και πάλι, άρα η $|H(e^{j\omega})|$ θα αυξάνει ξανά, μέχρι να επανέλθει στην ίδια τιμή $|H(e^{j0})|$ που είχε όταν $\omega = 0$, αφού τώρα έχει συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.

Για την απόκριση φάσης, έχουμε ότι

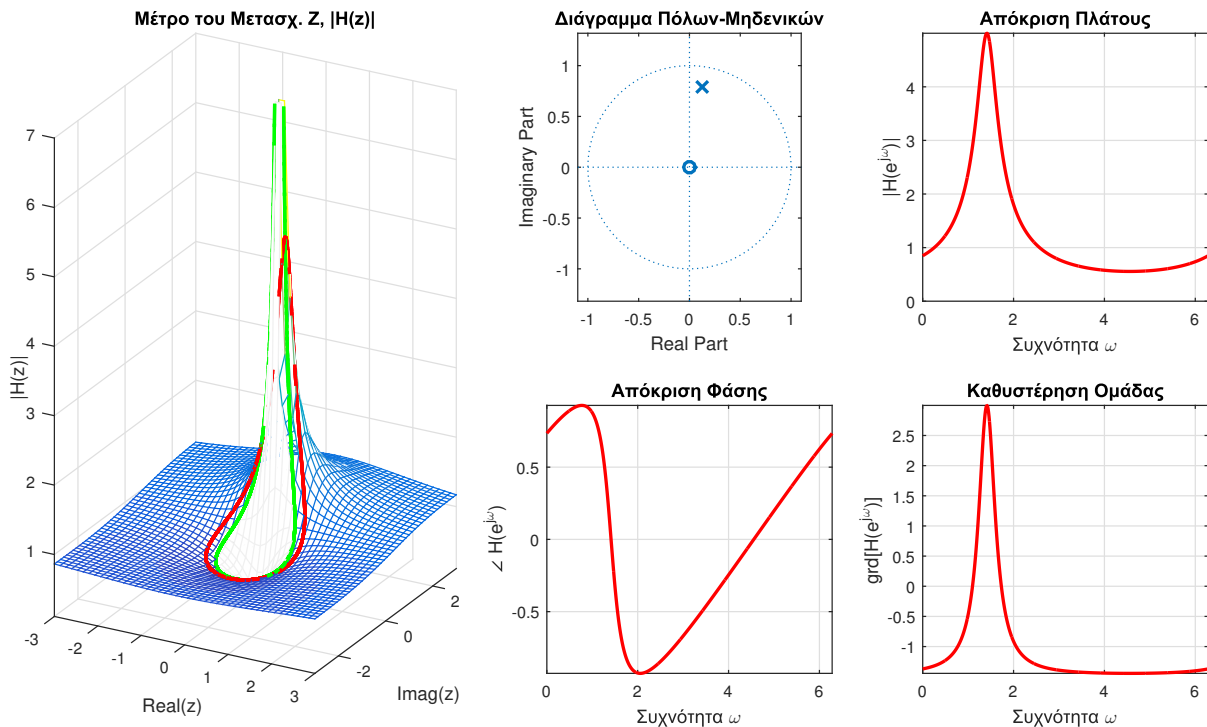
$$\angle \frac{1}{1 - re^{j\theta}} = \angle \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - re^{j\theta}} = \angle e^{j\omega} - \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) = \angle u_1 - \angle u_3 = \phi_1 - \phi_3 = \omega - \phi_3 \quad (17.262)$$

η οποία πράγματι προκύπτει ως η αρνητική της απόκρισης φάσης του προηγούμενου παραδείγματος. Η απόκριση φάσης ισούται με τη διαφορά της γωνίας ϕ_3 , δηλ. της γωνίας του διανύσματος u_3 από τη γωνία του διανύσματος u_1 . Ας κάνουμε παρόμοια ανάλυση κι εδώ, με βάση το Σχήμα 17.24:

- Όταν $\omega = 0$, η απόκριση φάσης έχει μια τιμή, έστω $\angle H(e^{j\omega}) = -\phi_3$, η οποία όμως είναι θετική, γιατί η ϕ_3 είναι μεγαλύτερη από π , οπότε η τιμή της ανήκει στο διάστημα $(-\pi, 0)$.
- Όταν $\omega \rightarrow \theta$, παρατηρούμε τα εξής:
 - Όταν το φανταστικό μέρος του u_1 γίνει ίσο με το φανταστικό μέρος του u_2 , τότε $\angle H(e^{j\omega}) = \omega - 2\pi = \omega$, και εκεί η απόκριση φάσης είναι μέγιστη.
 - Όταν η ω πλησιάζει τη γωνία θ , η γωνία ϕ_3 θα έχει πολύ μικρή μεταβολή σε σχέση με την ω , άρα η διαφορά τους θα μικραίνει απότομα.
 - όταν $\omega = \theta$, η διαφορά $\omega - \phi_3$ θα είναι μηδέν, γιατί τότε $\phi_3 = \theta = \omega$. Άρα η απόκριση φάσης θα είναι μηδέν στη συχνότητα $\omega = \theta$.
 - Όταν η ω απομακρύνεται αλλά βρίσκεται κοντά στη γωνία θ , η γωνία ϕ_3 θα έχει πολύ μεγάλη μεταβολή σε σχέση με την ω , άρα η διαφορά τους θα μικραίνει ξανά απότομα μέχρι το φανταστικό μέρος του u_1 γίνει ξανά ίσο με το φανταστικό μέρος του u_2 . Τότε η απόκριση φάσης θα γίνει ελάχιστη, και από εκεί και μετά θα αρχίσει να αυξάνει.
- Όταν $\omega = \pi + \theta$, η φάση θα είναι μηδέν, γιατί οι γωνίες ϕ_3 και ω θα είναι ίσες.
- Τέλος, όταν $\omega \rightarrow 2\pi$, η ω θα είναι όλο και μεγαλύτερη από την ϕ_3 και άρα η απόκριση φάσης θα αυξάνει, μέχρι να φτάσει στην ίδια τιμή $\angle H(e^{j\omega}) = -\phi_3$ που είχε για $\omega = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές του μηδενικού είναι $r = 0.8$ και $\theta = 0.45\pi$, τιμές που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στο Σχήμα 17.19. Τα στοιχεία φαίνεται στο Σχήμα 17.20. Παρατηρήστε ότι η ελάχιστη τιμή του είναι για $\omega = \theta = 0.45\pi \approx 1.41$, όταν δηλαδή το διάνυσμα $|u_3|$ βρίσκεται στο μικρότερο μήκος του, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι για $\omega = \pi + 0.45\pi = 1.45\pi \approx 4.55$, όπως ακριβώς αναμενόταν από την προηγούμενη ανάλυσή μας. Παρατηρήστε και την απόκριση φάσης και δείτε τις ομοιότητες με την ανάλυσή μας.

Ας πάμε τώρα σε κάτι πιο σύνθετο.



Σχήμα 17.22: Ανάλυση συστήματος πρώτης τάξης με έναν πόλο.

Παράδειγμα 17.20:

Δείτε το Σχήμα 17.23, όπου έχουμε έναν πόλο $z = a$ και ένα μηδενικό $z = b$ στο z -επίπεδο. Σχεδιάστε τις αποκρίσεις πλάτους και φάσης, καθώς και την καθυστέρηση ομάδας.

Λύση:

Τότε η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα, $|H(e^{j\omega})|$, δίνεται απλά ως

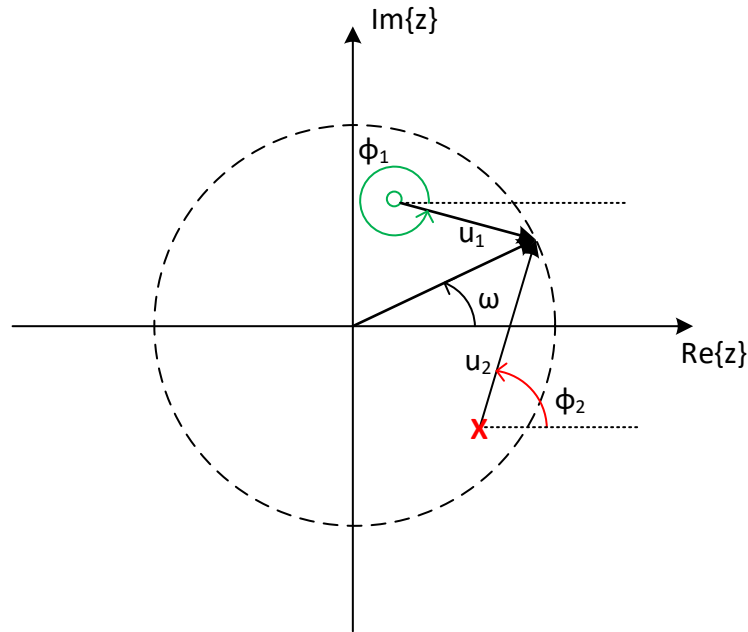
$$H(z) = \frac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}} \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} - b|}{|e^{j\omega} - a|} = \frac{|u_1|}{|u_2|} \quad (17.263)$$

με u_2 το διάνυσμα από τον πόλο ως το μοναδιαίο κύκλο, και u_1 αυτό από το μηδενικό ως το μοναδιαίο κύκλο. Βλέπετε λοιπόν ότι το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα καθορίζεται μόνο από τις αποστάσεις των πόλων και των μηδενικών από το μοναδιαίο κύκλο! Με βάση τα δυο προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να πούμε ότι όταν ο πόλος, $a = re^{j\omega_1}$, είναι κοντά στο μοναδιαίο κύκλο (δηλ. $r \approx 1$), η απόκριση πλάτους γίνεται απότομα μεγάλη για $\omega \approx \omega_1$ και μέγιστη για $\omega = \omega_1$, επειδή το μήκος του διανύσματος u_2 γίνεται απότομα μικρό γύρω από την ίδια περιοχή. Αντίθετα, όταν ο πόλος βρίσκεται “όχι κοντά” στο μοναδιαίο κύκλο, τότε ξανά η απόκριση πλάτους συμπεριφέρεται το ίδιο γύρω από τον πόλο αλλά η μεταβάσεις δεν είναι τόσο απότομες.

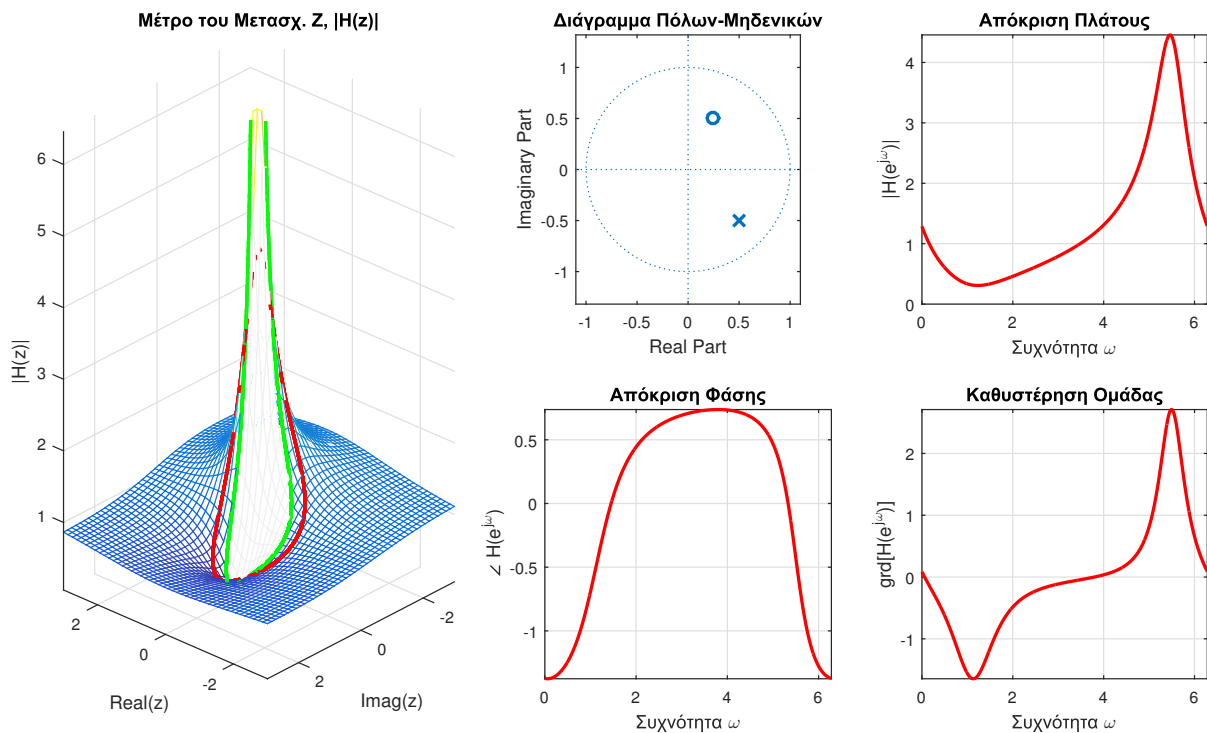
Όταν το μηδενικό, $b = \rho e^{j\omega_2}$, είναι κοντά στο μοναδιαίο κύκλο (δηλ. $\rho \approx 1$), η απόκριση πλάτους γίνεται απότομα μικρή για $\omega \approx \omega_2$ και ελάχιστη για $\omega = \omega_2$, επειδή το μήκος του διανύσματος u_1 γίνεται απότομα μεγάλο γύρω από το μηδενικό. Η συμπεριφορά της απόκρισης πλάτους για μηδενικά “όχι κοντά” στο μοναδιαίο κύκλο είναι όμοια, με τη διαφορά ότι οι μεταβάσεις δεν είναι πλέον απότομες.

Καταλαβαίνετε φυσικά ότι αν ο πόλος βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, τότε η απόκριση πλάτους απειρίζεται στη συχνότητα $\omega = \omega_1$ όπου βρίσκεται ο πόλος, δηλ. $|H(e^{j\omega_1})| = +\infty$, ενώ αν το μηδενικό βρίσκεται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, τότε η απόκριση πλάτους μηδενίζεται, δηλ. $|H(e^{j\omega_2})| = 0$.

Η απόκριση πλάτους και φάσης του παραπάνω διαγράμματος φαίνεται στο Σχήμα 17.24, αν θεωρήσουμε ότι το μηδενικό βρίσκεται στη θέση $z = 0.56e^{j5\pi/14}$, ενώ ο πόλος στη θέση $z = 0.707e^{-j\pi/4}$, που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στις θέσεις του σχήματος. Καταλαβαίνετε γιατί η καμπύλη του φάσματος πλάτους είναι αυτής της μορφής; Αναλύστε το σύστημα αυτό με τη λεπτομέρεια των προηγούμενων παραδειγμάτων!



Σχήμα 17.23: Διανύσματα Διανυσμάτων για σύστημα πρώτης τάξης με έναν πόλο και ένα μηδενικό.



Σχήμα 17.24: Ανάλυση Συστήματος πρώτης τάξης με έναν πόλο και ένα μηδενικό.

Όμοια είναι και η ανάλυση για το υπολογισμό της απόκρισης φάσης. Για το μηδενικό, βλέπουμε ότι

$$\arg(1 - be^{-j\omega}) = \arg(e^{-j\omega}(e^{j\omega} - b)) = \arg(e^{j\omega} - b) - \omega = \phi_1 - \omega \tag{17.264}$$

με ϕ_1 τη γωνία μεταξύ του άξονα των πραγματικών και του διανύσματος u_1 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 17.23. Όμοια, για τον πόλο, βλέπουμε ότι

$$\arg(1 - ae^{-j\omega}) = \phi_2 - \omega \tag{17.265}$$

με ϕ_2 τη γωνία μεταξύ του άξονα των πραγματικών και του διανύσματος u_2 . Οπότε η συνολική απόκριση φάσης δίνεται ως

$$\arg H(e^{j\omega}) = \phi_1 - \omega - (\phi_2 - \omega) = \phi_1 - \phi_2 \quad (17.266)$$

Σε τέτοιες σύνθετες περιπτώσεις, είναι βολικότερο να υπολογίζουμε τη συνεισφορά κάθε πόλου ή μηδενικού ξεχωριστά, και στη συνέχεια να βρίσκουμε τη συνολική απόκριση πλάτους ή φάσης. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, δείτε το Σχήμα 17.32.

17.8.2 Συστήματα Δευτέρας Τάξης

Τα συστήματα που έχουμε μελετήσει ως τώρα ήταν απλά αλλά όχι πραγματικά, αφού οι πόλοι και τα μηδενικά δεν ήταν πραγματικά, και επιπλέον δεν έρχονταν σε συζυγή ζεύγη. Ας δούμε μερικά πραγματικά συστήματα, μεγαλύτερης τάξης.

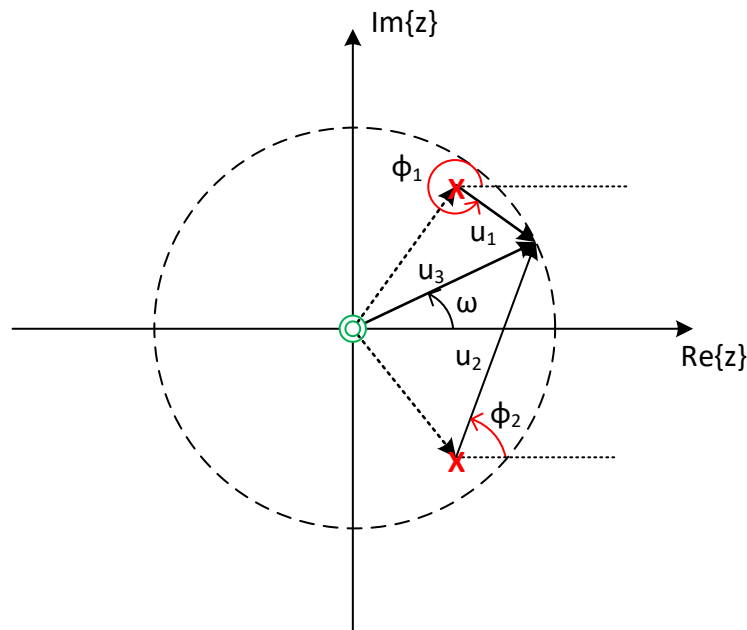
Παράδειγμα 17.21:

Έστω ένα σύστημα δεύτερης τάξης, με δυο πόλους σε συζυγείς θέσεις, όπως στο Σχήμα 17.26. Μελετήστε τις αποκρίσεις πλάτους και φάσης, καθώς και την καθυστέρηση ομάδας του μέσω διαγράμματος διανυσμάτων.

Λύση:

Το σύστημα αυτό περιγράφεται από τη σχέση

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r \cos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}} \quad (17.267)$$



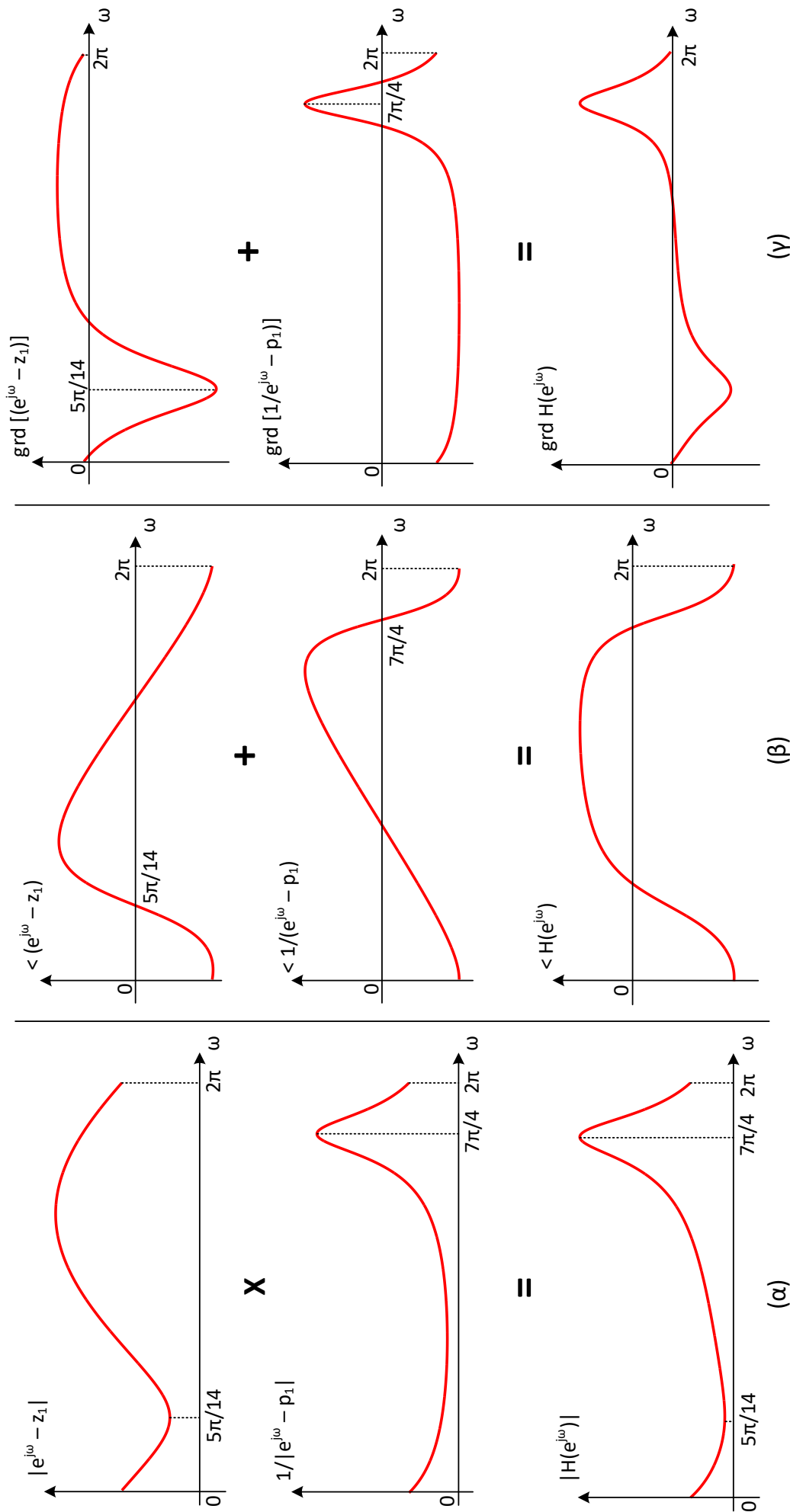
Σχήμα 17.26: Διάγραμμα Διανυσμάτων συστήματος δευτέρας τάξης με δυο συζυγείς πόλους.

ή εναλλακτικά, από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - 2r \cos(\theta)y[n-1] + r^2y[n-2] = x[n] \quad (17.268)$$

Η φάση του συστήματος δίνεται ως

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} - \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)} \quad (17.269)$$



Σχήμα 17.25: (α) Συνεισφορά όρων στην απόκριση πλάτους, (β) συνεισφορά όρων στην απόκριση φάσης, (γ) συνεισφορά όρων στην καθυστέρηση ομάδας.

και άρα η καθυστέρηση ομάδας είναι

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{r(1-r\cos(\omega-\theta))}{1+r^2-2r\cos(\omega-\theta)} - \frac{r(1-r\cos(\omega+\theta))}{1+r^2-2r\cos(\omega+\theta)} \quad (17.270)$$

Η εξαγωγή των φασματικών χαρακτηριστικών του συστήματος από τις παραπάνω σχέσεις απαιτεί λίγη προσπάθεια, αλλά θα μας ανταμείψει με υψηλή ακρίβεια. Μια πιο ποιοτική παραγωγή των φασματικών συναρτήσεων μπορεί να γίνει με χρήση διαγράμματος διανυσμάτων.

Προφανώς, για δυο πόλους σε συζυγείς θέσεις, θα έχουμε δυο μηδενικά στο μηδέν. Επιπλέον, το διάνυσμα με μέτρο $|e^{j\omega} - re^{j\theta}|$, από τον πόλο του πρώτου τεταρτημορίου, $re^{j\theta}$, ως το μοναδιαίο κύκλο συμβολίζεται με u_1 , ενώ το διάνυσμα u_3 είναι το διάνυσμα του μεταβαλλόμενου μιγαδικού αριθμού $e^{j\omega}$, και τέλος το διάνυσμα με μέτρο $|e^{j\omega} - re^{-j\theta}|$ είναι το διάνυσμα u_2 από το συζυγή πόλο του τέταρτου τεταρτημορίου ως το μοναδιαίο κύκλο.

Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{1}{(1-re^{j\theta}z^{-1})(1-re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{z^2}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})} \quad (17.271)$$

και άρα η φασματική απόκριση είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j2\omega}}{(e^{j\omega} - re^{j\theta})(e^{j\omega} - re^{-j\theta})} = \frac{e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - re^{j(\omega-\theta)} - re^{j(\omega+\theta)} + r^2} = \frac{e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - 2r\cos(\theta)e^{j\omega} + r^2} \quad (17.272)$$

Η απόκριση πλάτους θα είναι ίση με

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j2\omega}|}{|(e^{j\omega} - re^{j\theta})||e^{j\omega} - re^{-j\theta}|} = \frac{1}{|u_1||u_2|} \quad (17.273)$$

Δηλαδή, η απόκριση πλάτους εξαρτάται μόνο από τα μέτρα των διανυσμάτων u_1, u_2 ! Όταν το διάνυσμα u_3 αρχίζει να “τρέχει” επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μεταβάλλοντας τη γωνία ω του, το μέτρο των u_1, u_2 μεταβάλλεται, δίνοντάς μας τις τιμές της $|H(e^{j\omega})|$ για κάθε ω . Ας δούμε πως, εξετάζοντας μια πλήρη περιστροφή του u_3 :

- Όταν $\omega = 0$, τα διανύσματα u_1, u_2 έχουν το ίδιο μέτρο, οπότε η $|H(e^{j\omega})|$ θα ξεκινά από μια τιμή στο $\omega = 0$, έστω $|H(e^{j0})|$.
- Στη συνέχεια, το $|u_1|$ μικραίνει όσο το $\omega \rightarrow \theta$, ενώ αντίστοιχα το $|u_2|$ μεγαλώνει. Παρατηρήστε όμως ότι το $|u_1|$ μικραίνει γρηγορότερα απ’ όσο μεγαλώνει το $|u_2|$. Έτσι, το γινόμενο τους θα μικρύνει απότομα για συχνότητες κοντά στον πόλο και θα γίνει ελάχιστο (και άρα το αντίστροφο του γινομένου - αυτό μας ενδιαφέρει - θα είναι μέγιστο) όταν $\omega = \theta$.
- Στη συνέχεια, και ξανά για συχνότητες κοντά στον πόλο, το $|u_1|$ θα αρχίσει να μεγαλώνει ξανά, ενώ το ίδιο θα κάνει και το $|u_2|$. Όμως ξανά το $|u_1|$ θα μεταβάλλεται (μεγαλώνει) πιο αργά από το $|u_2|$, κι έτσι για κάποιες συχνότητες λίγο μεγαλύτερες από τη γωνία του πόλου η απόκριση πλάτους θα φθίνει απότομα.
- Όσο απομακρύνεται η συχνότητα ω από τον πόλο, η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ θα φθίνει και πάλι μέχρι το $\omega = \pi$, όπου τα μέτρα των u_1, u_2 είναι ξανά ίσα. Εκεί, η απόκριση πλάτους θα έχει ελάχιστο.
- Όσο $\omega \rightarrow 2\pi - \theta$, το $|u_2|$ θα μικραίνει, ενώ το $|u_1|$ θα μεγαλώνει. Το $|u_2|$ μικραίνει πιο γρήγορα απ’ όσο αυξάνει το $|u_1|$. Άρα η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ θα μεγαλώνει ξανά απότομα, μέχρι $\omega = 2\pi - \theta$, όπου θα γίνει μέγιστη. Παρατηρήστε ότι η διαδικασία αυτή είναι συμμετρική με αυτή για $\omega \rightarrow \theta$.
- Όταν η συχνότητα ω απομακρυνθεί απ’ τη γωνία $2\pi - \theta$ και πλησιάζει ξανά τη συχνότητα $\omega = 0$, η απόκριση πλάτους θα φθίνει ξανά, μέχρι να επανέλθει στην ίδια τιμή $|H(e^{j0})|$ που είχε όταν $\omega = 0$, αφού τώρα έχει συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.

Για τη φάση, έχουμε ότι

$$\arg\left[\frac{1}{(1-re^{j\theta}e^{j\omega})(1-re^{-j\theta}e^{j\omega})}\right] = -\arg(1-re^{j\theta}e^{j\omega}) - \arg(1-re^{-j\theta}e^{j\omega}) \quad (17.274)$$

$$= -(\phi_1 - \omega) - (\phi_2 - \omega) \quad (17.275)$$

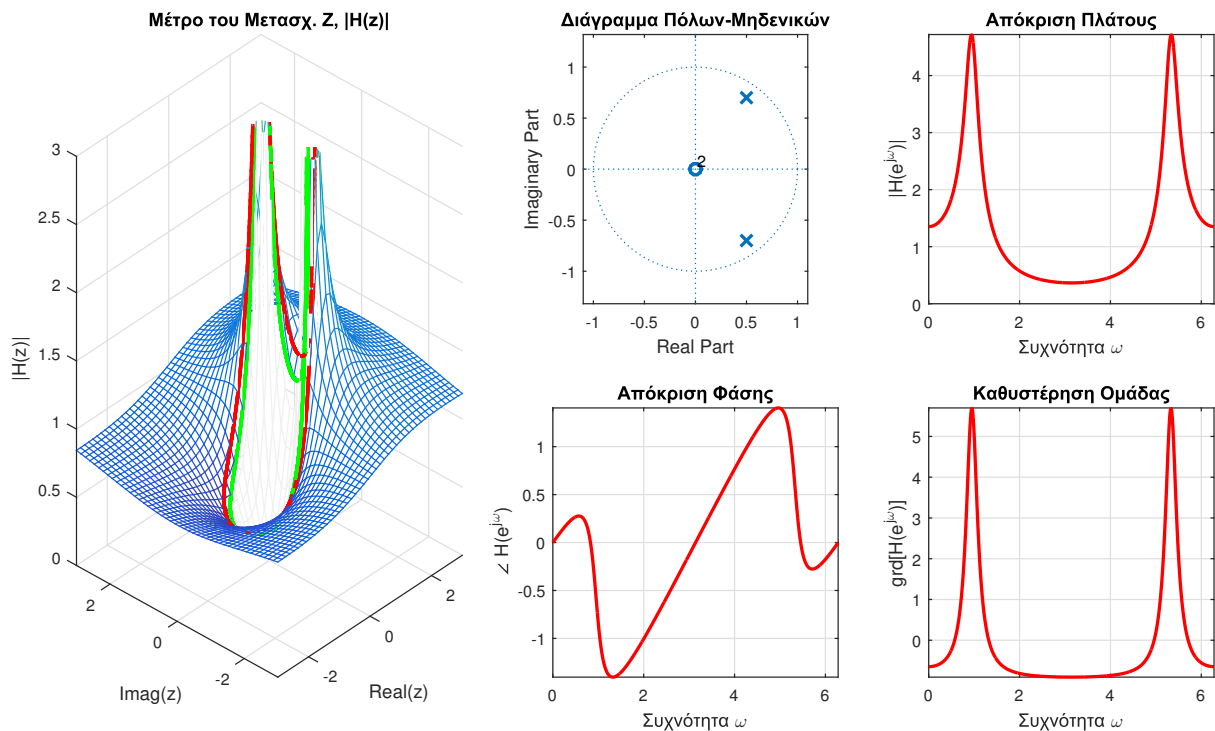
$$= 2\omega - \phi_1 - \phi_2 \quad (17.276)$$

με βάση τις Σχέσεις (17.245,17.264). Εδώ η απόκριση φάσης είναι πιο πολύπλοκη. Ας κάνουμε παρόμοια ποιοτική ανάλυση κι εδώ, με βάση το Σχήμα 17.26:

- Όταν $\omega = 0$, η απόκριση φάσης είναι $\arg H(e^{j0}) = -\phi_1 - \phi_2 = 0$, γιατί η $\phi_1 = -\phi_2$.
- Όταν $\omega \rightarrow \theta$, παρατηρούμε ότι η ϕ_2 μεγαλώνει, καθώς και η ϕ_1 , οπότε όταν $\omega = \theta$, έχουμε $\arg H(e^{j\omega}) \approx 2\theta - (-\theta) - \pi/2 = 3\theta - \pi/2$.
- Όταν $\omega = \pi$, τότε $\arg H(e^{j\pi}) = 2\pi - \phi_1 - \phi_2$, όμως τότε $\phi_2 = 2\pi - \phi_1$, και άρα $\arg H(e^{j\pi}) = 0$.
- Τέλος, όταν ω απομακρύνεται από το π και πλησιάζει προς το 2π , η $\arg H(e^{j\omega})$ θα έχει περιττή συμμετρία σε σχέση με την καμπύλη που μόλις περιγράψαμε όσο $\omega \in (0, \pi]$.

Αν παρατηρήσετε το Σχήμα 17.27, θα δείτε ότι δεν συμπεριλάβαμε τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της απόκρισης φάσης λίγο μετά τη συχνότητα $\omega = 0$ και λίγο πριν τη συχνότητα $\omega = 2\pi$. Θα μπορούσαμε να εντοπίσουμε αυτές τις περιοχές αν σχεδιάζαμε - με κάποια ακρίβεια - τις αποκρίσεις φάσης κάθε πόλου ξεχωριστά και στη συνέχεια αθροίζαμε τη συνεισφορά του καθενός στη συνολική απόκριση φάσης.

Τέλος, για την καθυστέρηση ομάδας, γνωρίζοντας την φάση και παραγωγίζοντάς την, μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικά τη γραφική παράστασή της. Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές των πόλων είναι $r = 0.85$ και $\theta \approx \pm\pi/3$, τιμές που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στο Σχήμα 17.26. Παρατηρήστε ότι η ελάχιστη τιμή της απόκρισης πλάτους εμφανίζεται για $\omega = \pi$, όταν δηλαδή τα $|u_1|, |u_2|$ γίνονται ταυτόχρονα μέγιστα, άρα το $\frac{1}{|u_1||u_2|}$ ελάχιστο, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι για $\omega = \pm\theta$, όπως ακριβώς αναμενόταν από την προηγούμενη ανάλυσή μας.



Σχήμα 17.27: Ανάλυση Συστήματος δευτέρας τάξης με δυο συζυγείς πόλους.

Παράδειγμα 17.22:

Θεωρήστε το σύστημα

$$h[n] = \delta[n] - 2r \cos(\omega - \theta)\delta[n - 1] + r^2\delta[n - 2] \tag{17.277}$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = 1 - 2r \cos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2} \tag{17.278}$$

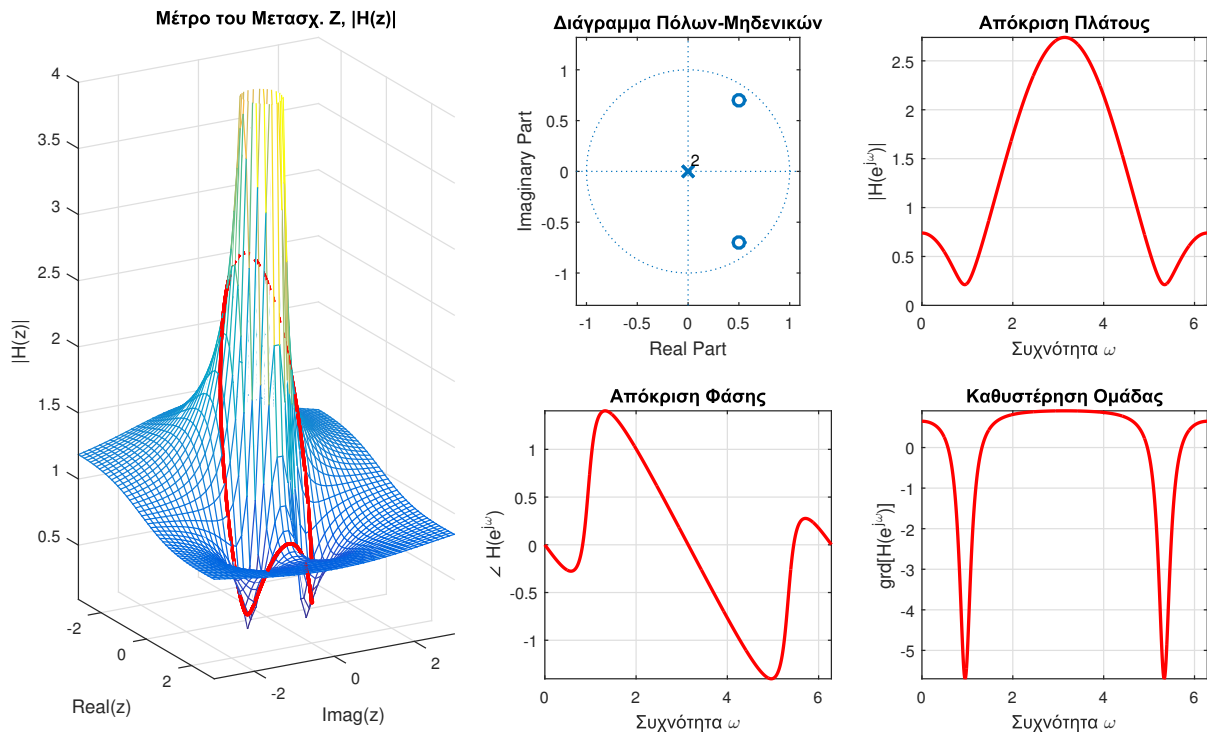
Αναλύστε το στο χώρο της συχνότητας.

Λύση:

Προσέξτε ότι η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ αποτελεί το αντίστροφο σύστημα του συστήματος του Παραδείγματος

17.22! Σύμφωνα λοιπόν με όσα έχουμε πει για τα αντίστροφα συστήματα, θα πρέπει οι αποκρίσεις φάσης και η καθυστέρηση ομάδας να είναι οι αρνητικές απ' αυτές του Παραδείγματος 17.22. Για το φάσμα πλάτους δεν ισχύει το ίδιο καθώς δεν αποτελεί γραμμική σχέση των πόλων και των μηδενικών του.

Πράγματι, για $r = 0.86$ και $\theta = 0.9505$, έχουμε τις αποκρίσεις του Σχήματος 17.28.



Σχήμα 17.28: Ανάλυση Συστήματος δευτέρας τάξης με δυο συζυγή μηδενικά.

Με βάση το τελευταίο παράδειγμα, θα ήταν επιθυμητό να μπορούμε να έχουμε μια σχέση απλής αλλαγής προσήμου και της απόκρισης πλάτους όταν ζητούμε το αντίστροφο σύστημα. Αυτή η απαίτηση, σε συνδυασμό με τις πολλές εφαρμογές των θεωριών των σημάτων και των συστημάτων στο πεδίο της επεξεργασίας του ήχου, οδηγούν σε μια εναλλακτική θεώρηση της απόκρισης πλάτους, που θα τη δούμε εν συντομία στην επόμενη παράγραφο.

17.8.3 Λογαριθμική Απόκριση Πλάτους

Γνωρίζουμε ότι δυο συστήματα σε σειρά σχετίζονται με την πράξη του γινομένου των μετασχηματισμών τους στο χώρο της συχνότητας (Z ή Fourier). Αν θέλαμε να μετατρέψουμε την πράξη αυτή από γινόμενο σε άθροισμα, τότε θα έπρεπε να βρούμε μια συνάρτηση η οποία μετατρέπει το γινόμενο δυο όρων σε άθροισμα. Μια τέτοια συνάρτηση είναι ο λογάριθμος, αφού

$$\log(\alpha\beta) = \log \alpha + \log \beta \quad (17.279)$$

Το να πάρει κανείς το λογάριθμο μιας μιγαδικής συνάρτησης όπως η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ ή η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ είναι μια κίνηση που θέλει αρκετή προσοχή, όμως μπορεί κανείς να πάρει το λογάριθμο της απόκρισης πλάτους, η οποία είναι πάντα θετική. Στην περίπτωση μας λοιπόν, ο λογάριθμος του γινομένου των επιμέρους αποκρίσεων πλάτους $H_1(e^{j\omega})$, $H_2(e^{j\omega})$ των συστημάτων σε σειρά θα μετατραπεί σε άθροισμα των λογαρίθμων των αποκρίσεων πλάτους, δηλ.

$$\log_{10} |H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})| = \log_{10} |H_1(e^{j\omega})| + \log_{10} |H_2(e^{j\omega})| \quad (17.280)$$

με τη βάση του λογαρίθμου να είναι ο αριθμός 10. Η παραπάνω πράξη στις αποκρίσεις πλάτους έχει πολλαπλά οφέλη, για τους παρακάτω λόγους:

- Η μέτρηση της έντασης των ηχητικών σημάτων μπορεί να γίνει σε μια ψυχολογική κλίμακα που μετριέται σε decibel - dB. Η κλίμακα αυτή είναι επίσης λογαριθμική, καθώς προέρχεται από τη μη-γραμμική συμπε-

ριφορά της ακοής μας - για την ακρίβεια, ακούμε σε μια κλίμακα η οποία προσεγγίζεται πολύ καλά από μια λογαριθμική συνάρτηση.

- Ο λογάριθμος αντιστοιχίζει τους πόλους σε τιμές απόκρισης πλάτους ίσες με $+\infty$ και τα μηδενικά σε τιμές ίσες με $-\infty$, διατηρώντας έτσι τη συμπεριφορά της απόκρισης.
- Ο λογάριθμος επιτρέπει μεγαλύτερη ευκρίνεια στη λεπτομέρεια της απόκρισης πλάτους για μικρές τιμές της. Για παράδειγμα, ο λογάριθμος του 100 είναι ίσος με 2, ενώ ο λογάριθμος του 0.01 είναι ίσος με -2 . Βλέπετε ότι πολύ μεγάλη έκταση τιμών μπορεί να συμπιεστεί σε μια διαφορετική κλίμακα όπου ευνοούνται μικρές τιμές της γραμμικής κλίμακας - οι οποίες όμως παίζουν σημαντικό ρόλο - και γίνονται ορατότερες σε μια γραφική αναπαράσταση.
- Η εύρεση της συνολικής απόκρισης πλάτους για πολλά συστήματα σε σειρά δίνεται απλά ως το άθροισμα των λογαριθμικών αποκρίσεων πλάτους των επιμέρους συστημάτων.
- Η εύρεση της απόκρισης πλάτους του αντιστρόφου συστήματος είναι απλά η αρνητική της απόκρισης πλάτους του αρχικού συστήματος, όταν αυτές εκφράζονται σε λογαριθμική κλίμακα.

Ελπίζοντας να σας πείσαμε για τη χρησιμότητα της λογαριθμικής αναπαράστασης, ας δούμε πως περιγράφει την απόκριση πλάτους ενός συστήματος. Η λογαριθμική απόκριση πλάτους δίνεται ως

$$20 \log_{10} |H(e^{j\omega})| = 20 \log_{10} \left(|A| \frac{\prod_{k=1}^M |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^N |1 - a_k e^{-j\omega}|} \right) \quad (17.281)$$

$$= 20 \log_{10} |A| + 20 \log_{10} \prod_{k=1}^M |1 - b_k e^{-j\omega}| + 20 \log_{10} \prod_{k=1}^N \frac{1}{|1 - a_k e^{-j\omega}|} \quad (17.282)$$

$$= 20 \log_{10} |A| + 20 \log_{10} \prod_{k=1}^M |1 - b_k e^{-j\omega}| - 20 \log_{10} \prod_{k=1}^N |1 - a_k e^{-j\omega}| \quad (17.283)$$

$$= 20 \log_{10} |A| + \sum_{k=1}^M 20 \log_{10} |1 - b_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^N 20 \log_{10} |1 - a_k e^{-j\omega}| \quad (17.284)$$

με τον αριθμό 20 μπροστά από κάθε λογάριθμο να προέρχεται από τη θεωρία διάδοσης ηχητικών κυμάτων.

Παράδειγμα 17.23:

Θεωρήστε το ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα $H(z)$ που έχει δυο συζυγείς πόλους στις θέσεις $z = 0.8e^{\pm j\pi/4}$ και ένα μηδενικό στη θέση $z = -0.9$. Αναλύστε αυτό και το αντίστροφό του το στο χώρο της συχνότητας.

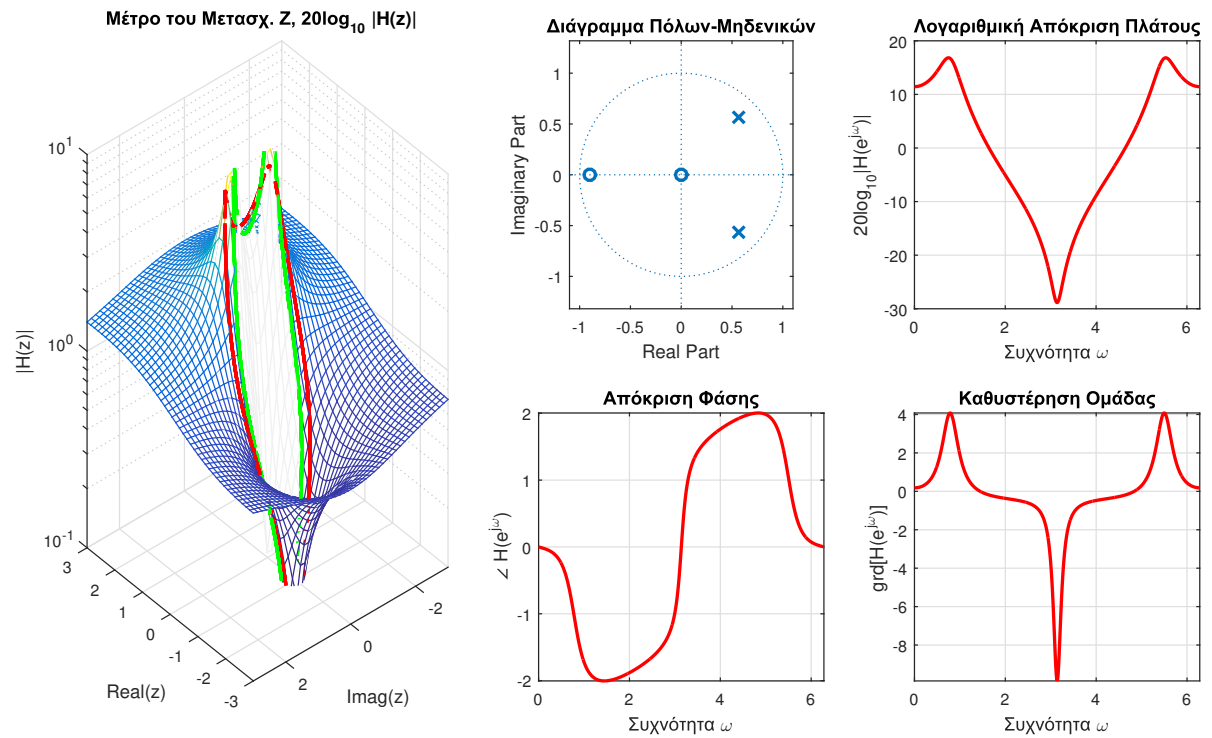
Λύση:

Αρχικά, καταλαβαίνουμε πως το σύστημα $H(z)$ έχει πεδίο σύγκλισης $|z| > 0.8$. Το αντίστροφό του, $H_i(z)$, θα έχει πεδίο σύγκλισης $|z| > 0.9$, αν ζητούμε να είναι κι αυτό αιτιατό και ευσταθές³. Λόγω της μεταξύ τους αντίστροφης σχέσης, περιμένουμε ότι η λογαριθμική απόκριση πλάτους, η απόκριση φάσης, και η καθυστέρηση ομάδας του συστήματος $H(z)$ θα είναι οι αρνητικές των αντίστοιχων του αντίστροφου συστήματος, $H_i(z)$. Στην Άσκηση XXXX μπορείτε να βρείτε με λεπτομέρεια τις αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και καθυστέρησης ομάδας μέσω διαγραμμάτων διανυσμάτων. Εδώ θα δείξουμε μόνο τα γραφήματα στα Σχήματα 17.29 και 17.30.

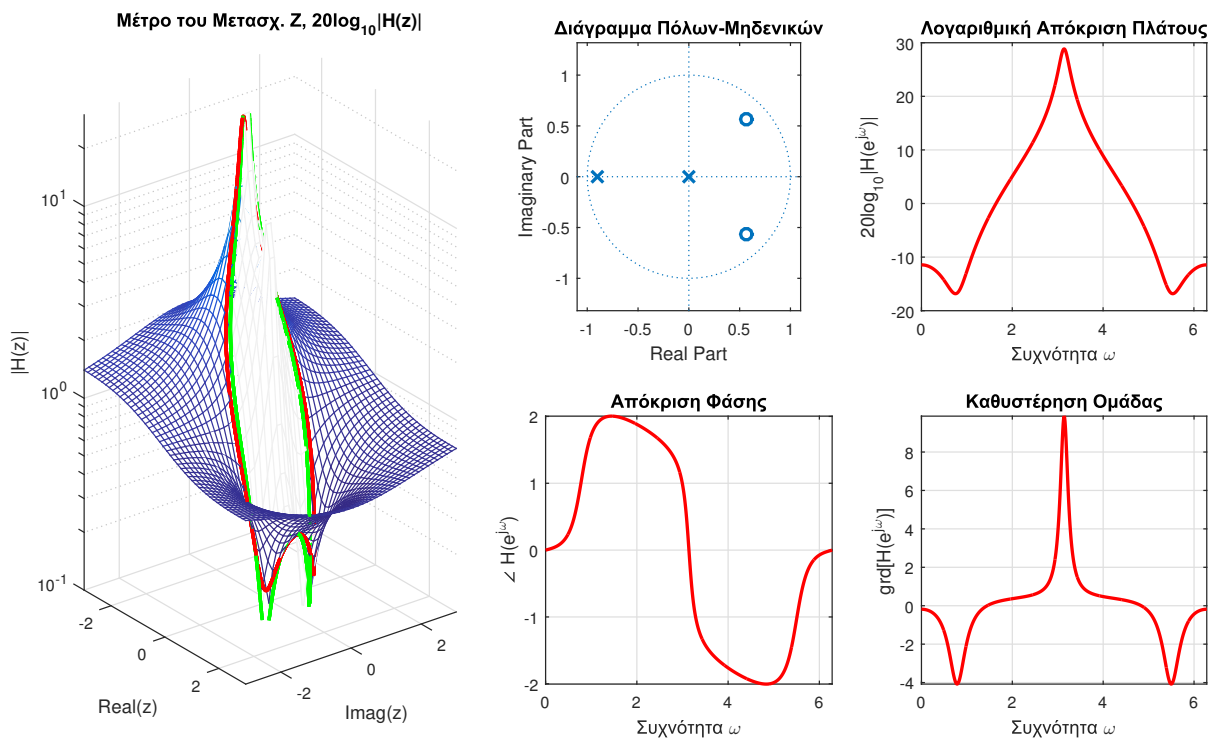
Παρατηρήστε ότι όλες οι μετρικές που μας ενδιαφέρουν (αποκρίσεις πλάτους και φάσης, καθυστέρηση ομάδας) είναι οι μεν αρνητικές των δε, και ότι αν τα δυο συστήματα τοποθετηθούν σε σειρά, πράγματι το αντίστροφο σύστημα θα ακυρώσει την επίδραση του αρχικού συστήματος σε κάθε συνιστώσα μιας πιθανής εισόδου (πλάτος, φάση).

Συνοψίζοντας, όλη η συζήτηση αυτής της Παραγράφου μας υποδεικνύει ότι:

³Ειδικά, και το πεδίο σύγκλισης $|z| < 0.9$ είναι έγκυρο πεδίο σύγκλισης για το αντίστροφο σύστημα, αλλά δεν είναι ευσταθές και αιτιατό.



Σχήμα 17.29: Σύστημα $H(z)$ Παραδείγματος 17.23.



Σχήμα 17.30: Σύστημα $H_i(z)$ Παραδείγματος 17.23

Πόλοι-μηδενικά και Μετασχ. Fourier

- Όταν ένας πόλος $z = re^{j\theta}$ βρίσκεται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο και $\omega = \theta_+$, η απόκριση πλάτους αυξάνεται γρήγορα ενώ η απόκριση φάσης μικραίνει γρήγορα. Αντίθετα, όταν $\omega = \theta_-$, η απόκριση πλάτους φθίνει γρήγορα ενώ η απόκριση φάσης αυξάνεται γρήγορα. Τα ακριβώς όμοια συμβαίνουν αν ο πόλος δε βρίσκεται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, με τη μόνη διαφορά ότι οι μεταβολές γύρω από τον πόλο είναι πιο ομαλές.
- Όμοια, όταν ένα μηδενικό $z = re^{j\theta}$ βρίσκεται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο και $\omega = \theta_+$, η απόκριση πλάτους μειώνεται γρήγορα, ενώ η απόκριση φάσης μεγαλώνει γρήγορα. Όταν $\omega = \theta_-$, η απόκριση πλάτους αυξάνεται γρήγορα ενώ η απόκριση φάσης φθίνει γρήγορα. Τα ακριβώς όμοια συμβαίνουν αν το μηδενικό δε βρίσκεται κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, με τη μόνη διαφορά ότι οι μεταβολές γύρω από το μηδενικό είναι πιο ομαλές.
- Επειδή η καθυστέρηση ομάδας είναι η αρνητική παράγωγος της φάσης, η καθυστέρηση ομάδας είναι μεγάλη και θετική κοντά σε έναν πόλο, και μεγάλη και αρνητική κοντά σε ένα μηδενικό.

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε τα παραπάνω στο Σχήμα 17.33.

Φυσικά, όλη αυτή η γεωμετρική ανάλυση και η ακριβεία της δυσκολεύει όσο μεγαλώνει ο αριθμός των πόλων και των μηδενικών σε ένα σύστημα αλλά οι βασικές αρχές ακολουθούν την παραπάνω σύνοψη.

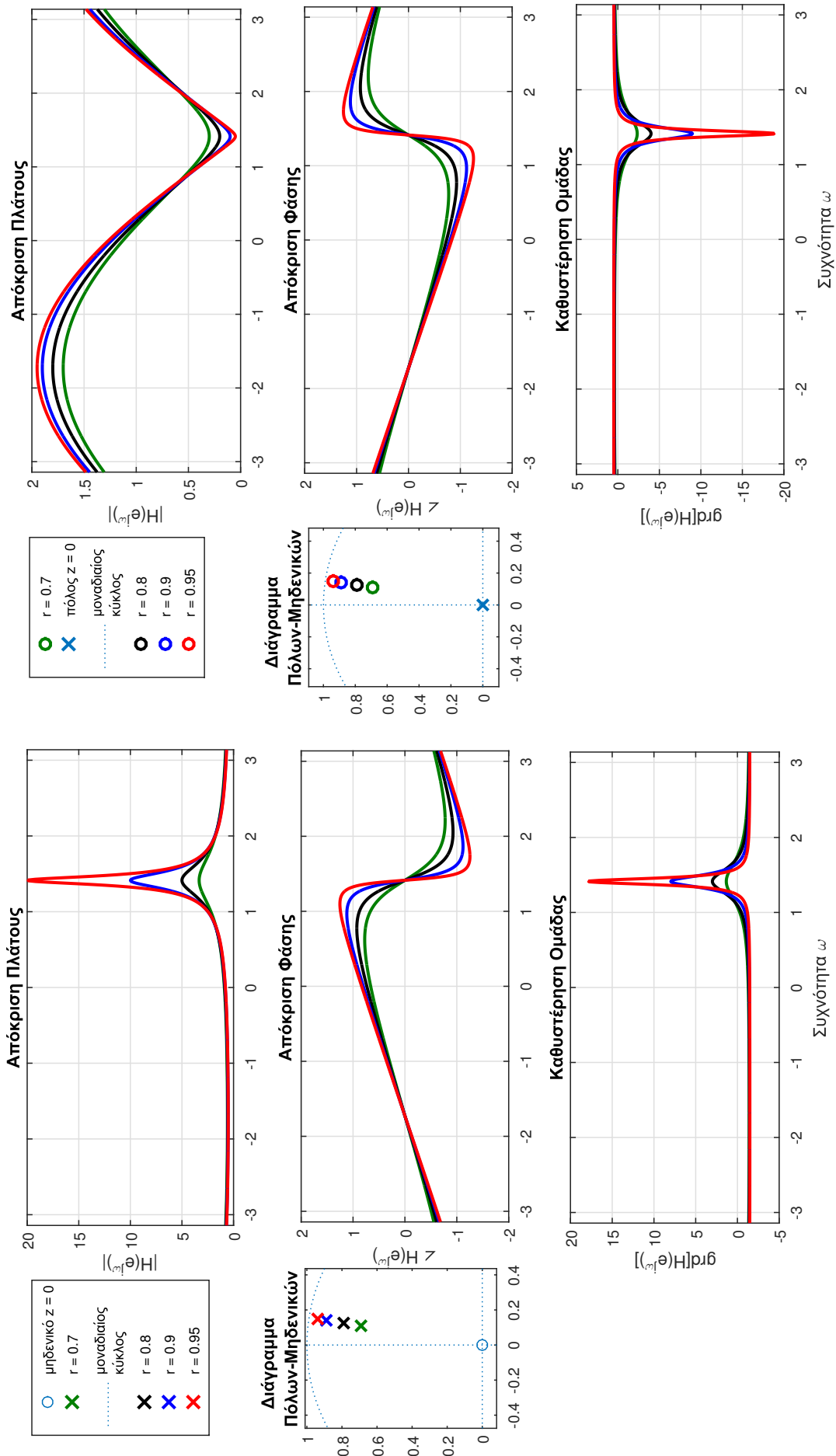
17.9 Σχέση Απόκρισης Πλάτους και Απόκρισης Φάσης

Μετά από όλη αυτή τη συζήτηση περί φασμάτων πλάτους και φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος, θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί: “υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ φάσματος πλάτους και φάσματος φάσης; Μπορεί να βρεθεί το ένα από το άλλο, μονοσήμαντα; Κι αν ναι, πότε;”

Κατ’ αρχάς πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι οι ερωτήσεις αυτές είναι ενδιαφέρουσες! ☺Επειτα, ας προσπαθήσουμε να μελετήσουμε αν κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί - η απάντηση θα έρθει στο τέλος της συζήτησης! Εν γένει, το φάσμα πλάτους δε μας δίνει κάποια πληροφορία για το φάσμα φάσης, και το αντίστροφο. Όμως, μιλώντας για ΓΧΑ συστήματα με ρητές συναρτήσεις μεταφοράς, αν γνωρίζουμε πόσους πόλους και πόσα μηδενικά έχει ένα σύστημα, καθώς και την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, τότε έχουμε πεπερασμένου πλήθους επιλογές για την απόκριση φάσης. Όμοια ακριβώς, αν γνωρίζουμε πόσους πόλους και πόσα μηδενικά έχει ένα σύστημα, καθώς και την απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$, τότε έχουμε πεπερασμένου πλήθους επιλογές για την απόκριση πλάτους! Κι ακόμα, αν το σύστημα έχει έναν περιορισμό ο οποίος ονομάζεται **ελάχιστη φάση - minimum phase**, τότε μπορεί μονοσήμαντα να οριστεί η απόκριση φάσης από την απόκριση πλάτους, ενώ και η απόκριση φάσης μπορεί να ορίσει την απόκριση πλάτους σχεδόν μονοσήμαντα (με διαφορά μιας σταθεράς)!

Ας δούμε αρχικά γιατί δεν μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους, με άλλα λόγια, πόσες πιθανές συναρτήσεις μεταφοράς υπάρχουν για μια δεδομένη απόκριση πλάτους. Η μελέτη μας θα γίνει μέσω διαγραμμάτων πόλων-μηδενικών, αφού στην ουσία μέσω της γνώσης αυτών ορίζεται (σχεδόν μονοσήμαντα) η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$. Αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, τότε μπορούμε να βρούμε την απόκριση φάσης μονοσήμαντα.

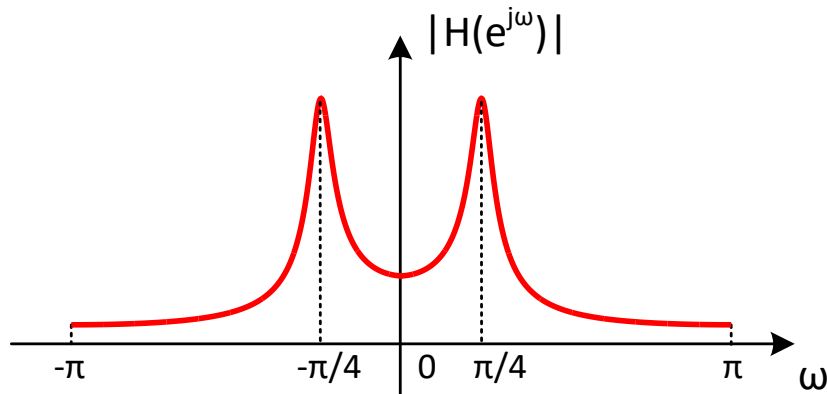
Έστω ότι μας δίνεται η απόκριση πλάτους του Σχήματος 17.34.



Σχήμα 17.31: Ανάλυση συστήματος με ένα μηδενικό που πλησιάζει το μοναδιαίο κύκλο.

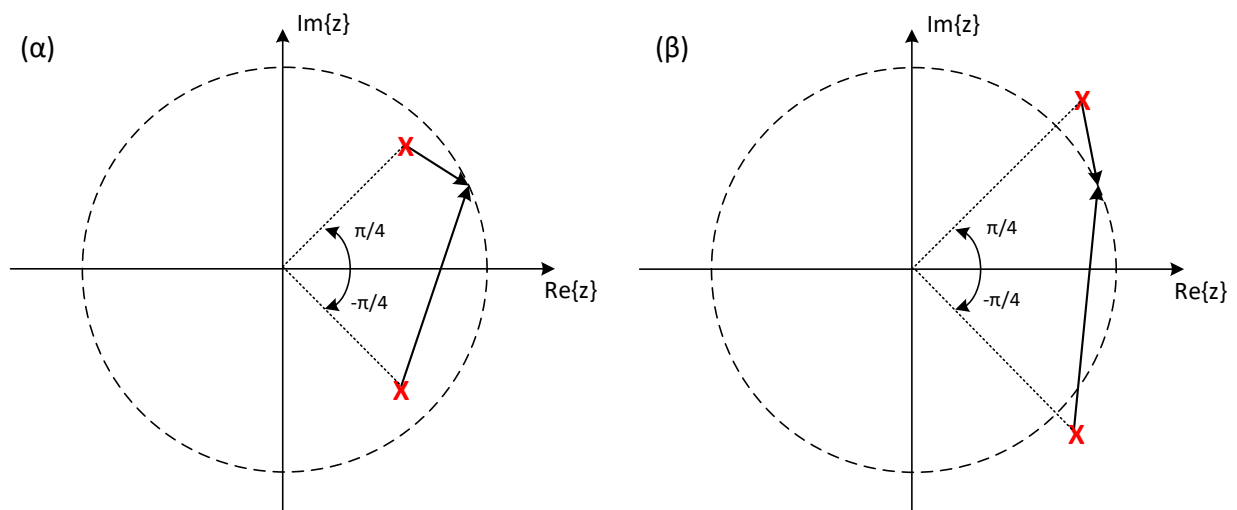
Σχήμα 17.32: Ανάλυση συστήματος με έναν πόλο που πλησιάζει το μοναδιαίο κύκλο.

Σχήμα 17.33: Συμπεριφορά φασματικών χαρακτηριστικών σε σχέση με την απόσταση πόλου/μηδενικού από το μοναδιαίο κύκλο.



Σχήμα 17.34: Απόκριση Πλάτους ΓΧΑ Συστήματος.

Ας δούμε τα διαγράμματα διανυσμάτων του Σχήματος 17.35. Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η δοθείσα



Σχήμα 17.35: Διαγράμματα διανυσμάτων.

απόκριση πλάτους προέρχεται από τη συνάρτηση μεταφοράς του Σχήματος 17.35(α), καθώς αυτή περιλαμβάνει δυο συζυγείς πόλους στις γωνίες $\omega = \pm\pi/4$, και η ακτίνα των πόλων είναι κοντά στο μοναδιαίο κύκλο. Έτσι, θα κατέληγε ότι η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται ως

$$H_1(z) = \frac{A}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_1^* z^{-1})} \quad (17.285)$$

με $z_1 = \rho e^{j\pi/4}$. Η σταθερά A του αριθμητή θα προέκυπτε εύκολα αφού γνωρίζουμε την απόκριση πλάτους. Κάποιος όμως θα μπορούσε να εκφράσει το ενδεχόμενο η ζητούμενη συνάρτηση μεταφοράς να δίνεται από τη σχέση

$$H_2(z) = \frac{A}{(z^{-1} - z_1)(z^{-1} - z_1^*)} \quad (17.286)$$

Αν σχεδιάσουμε τους πόλους της παραπάνω συνάρτησης μεταφοράς θα πάρουμε το διάγραμμα του Σχήματος 17.35(β). Παρατηρήστε ότι η μόνη διαφορά των δυο διαγραμμάτων έγκειται στο γεγονός ότι οι πόλοι του δεύτερου έχουν “καθρεπτιστεί” εκτός του μοναδιαίου κύκλου στις περίφημες συζυγείς αμοιβαίες - *conjugate reciprocal* θέσεις τους. Ένας πόλος στη θέση $z = a$ έχει ως αμοιβαία θέση του την $z = 1/a^*$, με $a \in \mathbb{C}$. Επιβεβαιώστε ότι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς $H_2(z)$ είναι πράγματι οι αμοιβαία πόλοι αυτών του συστήματος $H_1(z)$. Παρατηρήστε επίσης ότι η αμοιβαία θέση βρίσκεται υπό την ίδια γωνία με την αρχική θέση του εκάστοτε πόλου. Άρα πράγματι η απόκριση πλάτους του παραπάνω συστήματος θα έχει μέγιστα στις δοθείσες συχνότητες, δηλ. στις $\omega = \pm\pi/4$. Μένει να απαντηθεί αν το πλάτος στις συχνότητες αυτές αλλάζει ή όχι με τη μεταφορά των πόλων στις αμοιβαίες θέσεις εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Ας δούμε τι συνεισφέρει στην απόκριση πλάτους ένας εκ των δυο όρων του

παρονομαστή σε σχέση με τον αμοιβαίο του. Έστω

$$p(z) = \frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} \implies |p(e^{j\omega})| = \left| p(z) \right|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{|1 - z_1 e^{-j\omega}|} = \frac{1}{|e^{j\omega} - z_1|} \quad (17.287)$$

Για τον αμοιβαίο του, θα είναι

$$p_r(z) = \frac{1}{z^{-1} - z_1^*} \implies |p_r(e^{j\omega})| = \left| p_r(z) \right|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{|e^{-j\omega} - z_1^*|} \quad (17.288)$$

Εξετάστε τις Σχέσεις (17.287, 17.288) και παρατηρήστε ότι είναι ίσες, καθώς οι ποσότητες εντός του μέτρου στους παρονομαστές είναι συζυγείς, και ως εκ τούτου έχουν το ίδιο μέτρο!! Αυτό δηλώνει ξεκάθαρα ότι ένας όρος της μορφής

$$1 - z_1 z^{-1} \quad (17.289)$$

έχει ίδιο μέτρο με έναν όρο της μορφής

$$z^{-1} - z_1^* \quad (17.290)$$

δηλ.

$$|1 - z_1 z^{-1}|_{z=e^{j\omega}} = |z^{-1} - z_1^*|_{z=e^{j\omega}} \quad (17.291)$$

Ως εκ τούτου, τα δυο παραπάνω συστήματα $H_1(z)$ και $H_2(z)$ έχουν την ίδια ακριβώς απόκριση πλάτους! Με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό, αν “καθρεπτίσουμε” μόνο τον έναν από τους δυο πόλους κάθε φορά, μπορούμε να ορίσουμε ακόμη δυο συστήματα, έστω $H_3(z)$ και $H_4(z)$, τα οποία θα έχουν έναν πόλο εντός του μοναδιαίου κύκλου κι έναν εκτός αυτού σε αμοιβαία θέση, και τα συστήματα αυτά θα έχουν την ίδια απόκριση πλάτους με τη δοθείσα! Πέραν πάσης αμφιβολίας λοιπόν, η γνώση της απόκρισης πλάτους και του πλήθους των πόλων-μηδενικών δεν μας εξασφαλίζει μονοσήμαντη αντιστοίχιση της απόκρισης πλάτους στη συνάρτηση μεταφοράς⁴. Δε θα πρέπει να σας κάνει εντύπωση όμως ότι η απόκριση φάσης στα τέσσερα αυτά συστήματα είναι διαφορετική για το καθένα.

Το ερώτημα που τίθεται πλέον μετατρέπεται στο εξής: “Τι χρειάζεται να γνωρίζουμε επιπλέον για να μπορούμε μονοσήμαντα να εξαγωγήμε τη συνάρτηση μεταφοράς από την απόκριση πλάτους;” Η απάντηση είναι τελικά αρκετά απλή: χρειάζεται να περιορίσουμε τις επιλογές μας στις θέσεις των πόλων-μηδενικών. Αν στο παραπάνω παράδειγμα γνωρίζαμε ότι οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, η απάντησή μας για τη συνάρτηση μεταφοράς θα ήταν μονοσήμαντη: το σύστημα $H_1(z)$ θα ήταν το ζητούμενο. Στη γενικότερη περίπτωση ύπαρξης πόλων και μηδενικών, μια μονοσήμαντη αντιστοίχιση υπάρχει αν γνωρίζουμε την ακριβή θέση των πόλων και των μηδενικών. Για την ειδική και πολύ χρήσιμη στην πράξη περίπτωση που θέλουμε το σύστημά μας να είναι ευσταθές και αιτιατό και να έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα, τότε υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοίχιση μεταξύ απόκρισης πλάτους και συνάρτησης μεταφοράς: αυτό εξασφαλίζεται μόνο αν όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Τέτοια συστήματα ονομάζονται **συστήματα ελάχιστης φάσης - minimum phase systems**, για λόγους που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Ας θέσουμε μια τελευταία σκέψη στους προβληματισμούς μας. Σίγουρα θα σκεφτήκατε ότι - τουλάχιστον στο παραπάνω παράδειγμα - η γνώση του αριθμού των πόλων δε μας ήταν απαραίτητη. Αν υπήρχε κάποιος τρίτος πόλος τότε θα έκανε με κάποιο τρόπο “αισθητή” την παρουσία του στην απόκριση πλάτους. Στο Σχήμα 17.34 δε φαίνεται κάποιο μέγιστο πέραν αυτών στις συχνότητες $\omega = \pm\pi/4$. Κι όμως, μπορεί κανείς να προσθέσει άπειρους πόλους και μηδενικά στο σύστημα χωρίς να αλλοιώσει καθόλου την παρατηρηθείσα απόκριση πλάτους! Παρατηρήστε τι θα συμβεί αν πολλαπλασιάσουμε καθένα από τα τέσσερα συστήματα που βρήκαμε με έναν όρο της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (17.292)$$

Για να δούμε τι συνεισφέρει αυτός ο όρος στην απόκριση πλάτους.

$$\left| \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \right|_{z=e^{j\omega}} = \left| \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| \frac{e^{-j\omega}(1 - a^*e^{j\omega})}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \frac{|e^{-j\omega}| |(1 - a^*e^{j\omega})|}{|1 - ae^{-j\omega}|} = \frac{|(1 - a^*e^{j\omega})|}{|1 - ae^{-j\omega}|} = 1 \quad (17.293)$$

ως ηλίκο μέτρου συζυγών παραστάσεων! Με έκπληξη λοιπόν παρατηρούμε ότι όροι της μορφής της Σχέσης (17.292) δε μεταβάλλουν καθόλου την απόκριση πλάτους, ενώ προσθέτουν πόλους και μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο - σε πολύ ειδικές θέσεις όμως: πράγματι, ένας τέτοιος όρος προσθέτει έναν πόλο στη θέση $z = a$ και ένα μηδενικό στη θέση $z = 1/a^*$, οπότε μεταβάλλει το συνολικό αριθμό των πόλων-μηδενικών αλλά ως συζυγές αμοιβαίο ζεύγος πόλου-μηδενικού δεν επηρεάζει στο ελάχιστο την απόκριση πλάτους. Έτσι λοιπόν συμπεραίνουμε

⁴ Αν και τουλάχιστον μας εξασφαλίζει ότι οι επιλογές μας είναι πεπερασμένου πλήθους.

ότι αν δε γνωρίζουμε τον ακριβή αριθμό πόλων και μηδενικών ενός συστήματος, τότε υπάρχουν άπειρες πιθανές επιλογές για τη συνάρτηση μεταφοράς, καθώς πάντα θα μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε έναν ή περισσότερους όρους σαν αυτόν της Σχέσης (17.292) με το σύστημά μας, χωρίς να αλλοιώνουμε στο ελάχιστο την απόκριση πλάτους - μπορείτε όμως να υποθέσετε ότι αλλοιώνεται η απόκριση φάσης! Τέτοιοι όροι είναι τόσο σημαντικοί που αποτελούν ξεχωριστά συστήματα τα οποία δε θα μπορούσαν να μην έχουν το δικό τους όνομα - ονομάζονται **συστήματα all-pass**, και θα τα μελετήσουμε σύντομα.

Πολλές φορές όμως η μελέτη της απόκρισης πλάτους δεν είναι βολική, λόγω της μη γραμμικής μορφής της (ύπαρξη της τετραγωνικής ρίζας), ενώ πολλές φορές οι προδιαγραφές της απόκρισης πλάτους ενός συστήματος δίνονται με βάση το τετράγωνο της απόκρισης πλάτους. Στην προσπάθειά μας να έχουμε πιο “ελκυστικά” μαθηματικά, μπορούμε να μελετήσουμε και το τετράγωνο της απόκρισης πλάτους, $|H(e^{j\omega})|^2$. Ας εκφράσουμε το $|H(e^{j\omega})|^2$ ως

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(z)H^*(1/z^*) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (17.294)$$

Αυτό σημαίνει ότι το τετράγωνο της απόκρισης πλάτους είναι η εκτίμηση επάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μετασχ. Z

$$M(z) = H(z)H^*(1/z^*) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - b_k z^{-1})(1 - b_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - a_k z^{-1})(1 - a_k^* z)} \quad (17.295)$$

αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $H(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, όπως την έχουμε δει τόσες φορές, δηλ.

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})} \quad (17.296)$$

Άρα

$$H^*(1/z^*) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^N (1 - b_k^* z)}{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - a_k^* z)} \quad (17.297)$$

Οπότε αν μας δοθεί η συνάρτηση $|H(e^{j\omega})|^2$, και αντικαταστήσουμε $z = e^{j\omega}$, μπορούμε να βρούμε το $M(z) = H(z)H^*(1/z^*)$. Από το $M(z)$ θέλουμε να μάθουμε όσα μπορούμε περισσότερα για το σύστημα $H(z)$. Παρατηρώντας τη Σχέση (17.295), βλέπουμε ότι για κάθε πόλο a_k του $H(z)$, έχουμε έναν πόλο a_k και έναν πόλο $(a_k^*)^{-1}$ στο $M(z)$. Αντίστοιχα, βλέπουμε ότι για κάθε μηδενικό b_k του $H(z)$, έχουμε ένα μηδενικό b_k και ένα μηδενικό $(b_k^*)^{-1}$ στο $M(z)$. Αυτό μας δείχνει ότι οι πόλοι και τα μηδενικά “έρχονται” σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη. Παρατηρήστε ότι το ένα στοιχείο ενός αμοιβαίου συζυγούς ζεύγους σχετίζεται με το $H(z)$, ενώ το άλλο με το $H^*(1/z^*)$. Επιπλέον, αν το ένα στοιχείο του ζεύγους βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε το άλλο βρίσκεται εκτός (στην αμοιβαία συζυγή θέση)⁵.

Αν υποθέσουμε ότι το $H(z)$ είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε όλοι οι πόλοι του θα είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Με αυτόν τον περιορισμό, μας είναι εύκολο να ξεχωρίσουμε τους πόλους του $H(z)$ από το $M(z)$. Όμως χωρίς να ξέρουμε τίποτα για τα μηδενικά, δεν μπορούμε να βρούμε τα μηδενικά του $H(z)$ από το $M(z)$, κι έτσι να ορίσουμε μονοσήμαντα το $H(z)$.

Ας το δούμε αυτό σε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 17.24:

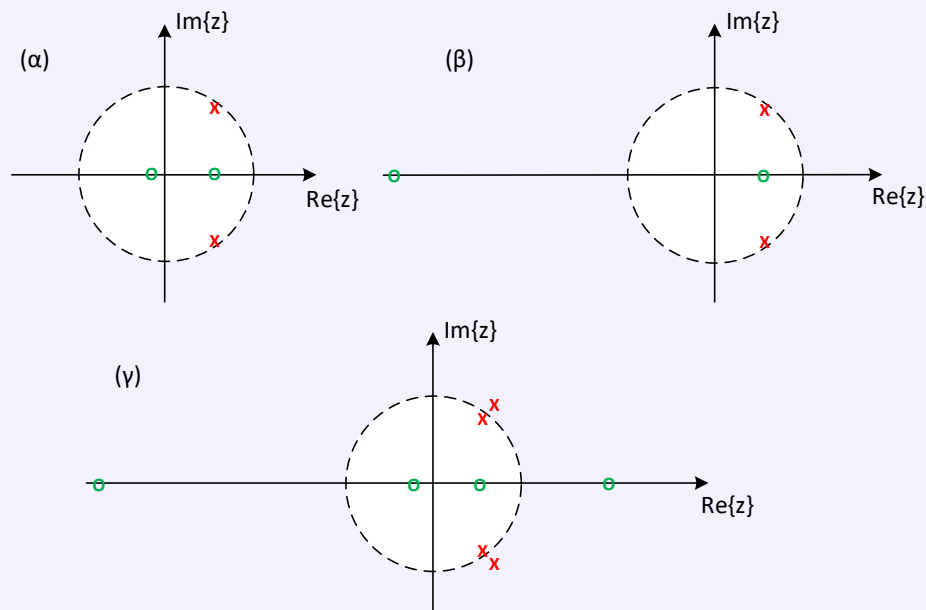
Έστω δυο ευσταθή συστήματα με συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_1(z) = \frac{4(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})}{(1 - 0.95e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.95e^{-j\pi/3}z^{-1})} \quad (17.298)$$

$$H_2(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 4z^{-1})}{(1 - 0.95e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.95e^{-j\pi/3}z^{-1})} \quad (17.299)$$

Τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών των δυο αυτών συστημάτων φαίνονται στο Σχήμα 17.36(α,β).

⁵ Εκτός κι αν βρίσκονται στην ίδια θέση, επάνω στο μοναδιαίο κύκλο.



Σχήμα 17.36: Διαγράμματα πόλων-μηδενικών των συστημάτων (α) $H_1(z)$, (β) $H_2(z)$, (γ) $M_1(z) = M_2(z)$.

Λύση:

Ας σχηματίσουμε το σύστημα $M(z)$ για κάθε σύστημα. Είναι

$$M_1(z) = \frac{4(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.25z^{-1})}{(1 - 0.95e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.95e^{-j\pi/3}z^{-1})} \frac{4(1 - 0.5z)(1 + 0.25z)}{(1 - 0.95e^{j\pi/3}z)(1 - 0.95e^{-j\pi/3}z)} \quad (17.300)$$

$$M_2(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 4z^{-1})}{(1 - 0.95e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.95e^{-j\pi/3}z^{-1})} \frac{(1 - 0.5z)(1 + 4z)}{(1 - 0.95e^{j\pi/3}z)(1 - 0.95e^{-j\pi/3}z)} \quad (17.301)$$

Όμως ο αριθμητής του $M_1(z)$ είναι ίσος με αυτόν του $M_2(z)$ γιατί

$$4(1 + 0.25z^{-1})4(1 + 0.25z) = (4 + z^{-1})(4 + z) = z^{-1}(4z + 1)z(4z^{-1} + 1) \quad (17.302)$$

$$= zz^{-1}(1 + 4z)(1 + 4z^{-1}) \quad (17.303)$$

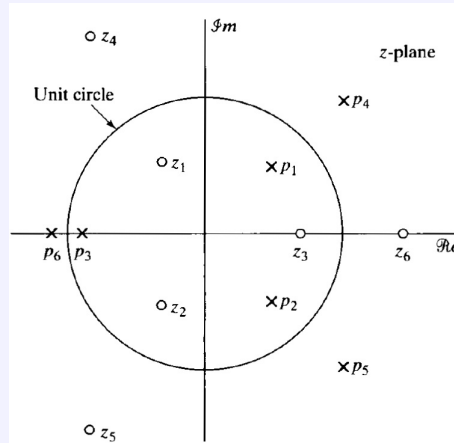
$$= (1 + 4z)(1 + 4z^{-1}) \quad (17.304)$$

Οι παρονομαστές είναι επίσης ίδιοι, άρα τελικά $M_1(z) = M_2(z)$, με διάγραμμα πόλων-μηδενικών όπως στο Σχήμα 17.36(γ)! Οι συναρτήσεις μεταφοράς $H_1(z), H_2(z)$ στο παραπάνω παράδειγμα διαφέρουν μόνο στη θέση των μηδενικών. Στο παράδειγμα αυτό, ο όρος $4(1 + 0.25z^{-1}) = (z^{-1} + 4)$ συνεισφέρει το ίδιο στο τετράγωνο της απόκρισης πλάτους με τον όρο $(1 + 4z^{-1})$, όπως ήδη γνωρίζετε, και κατά συνέπεια, οι αποκρίσεις πλάτους $|H_1(e^{j\omega})|$ και $|H_2(e^{j\omega})|$ είναι ίσες. Όμως, οι αποκρίσεις φάσεις αυτών των δυο φασματικών αποκρίσεων είναι διαφορετικές. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι ένα συγκεκριμένο σύστημα $M(z)$ δεν μπορεί να αντιστοιχιστεί μονοσήμαντα σε ένα αντίστοιχο $H(z)$, ή με άλλα λόγια, δεν μπορούμε μονοσήμαντα να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από το σύστημα $M(z) = |H(z)|^2$.

Θα μπορούσατε όμως να ισχυριστείτε ότι αν υπάρχουν πεπερασμένες επιλογές για τα πιθανά συστήματα $H(z)$ που μπορούν να προκύψουν από ένα δεδομένο $M(z)$, οπότε ίσως αυτές οι επιλογές - αν βρεθούν - να αρκούν. Ας δούμε αν είναι έτσι.

Παράδειγμα 17.25:

Έστω ότι μας δίνουν ένα διάγραμμα πόλων-μηδενικών για το $M(z)$, όπως στο Σχήμα 17.37. Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τους πόλους και τα μηδενικά του $H(z)$.

Σχήμα 17.37: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών του $M(z)$.Λύση:

Γνωρίζουμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά που αποτελούν στοιχεία συζυγών αμοιβαίων ζευγών θα ανήκουν το ένα στο σύστημα $H(z)$ και το άλλο στο σύστημα $H^*(1/z^*)$. Τα ζεύγη αυτά είναι:

$$\text{ζεύγος πόλων}_1 := (p_1, p_4) \quad (17.305)$$

$$\text{ζεύγος πόλων}_2 := (p_2, p_5) \quad (17.306)$$

$$\text{ζεύγος πόλων}_3 := (p_3, p_6) \quad (17.307)$$

$$\text{ζεύγος μηδενικών}_1 := (z_1, z_4) \quad (17.308)$$

$$\text{ζεύγος μηδενικών}_2 := (z_2, z_5) \quad (17.309)$$

$$\text{ζεύγος μηδενικών}_3 := (z_3, z_6) \quad (17.310)$$

Προφανώς αν δεν έχουμε καμία άλλη πληροφορία για το σύστημα $H(z)$, υπάρχουν πολλοί τρόποι να αντιστοιχίσουμε πόλους και μηδενικά σε αυτό. Αν όμως γνωρίζουμε ότι το $H(z)$ είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε ξέρουμε ότι οι πόλοι που θα διαλέξουμε από κάθε ζεύγος πόλων θα πρέπει να είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Άρα επιλέγουμε τους p_1, p_2, p_3 . Όμως δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για τα μηδενικά όταν μιλάμε για ευσταθή και αιτιατά συστήματα. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές c_k, d_k της εξίσωσης διαφορών που περιγράφει το σύστημα $H(z)$ είναι πραγματικοί. Αυτό σημαίνει ότι οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συζυγή ζεύγη ή είναι πραγματικοί αριθμοί. Με αυτόν τον περιορισμό, τα μηδενικά - τους πόλους τους διαλέξαμε ήδη - του $H(z)$ μπορούν να είναι:

$$z_3 \text{ ή } z_6 \quad (17.311)$$

$$(z_1, z_2) \text{ ή } (z_4, z_5) \quad (17.312)$$

Έτσι, έχουμε συνολικά τέσσερα διαφορετικά συστήματα $H_i(z)$, $i = 1, 2, 3, 4$ που είναι ευσταθή και αιτιατά, με πραγματικούς συντελεστές, και τρεις πόλους και τρία μηδενικά το καθένα, των οποίων το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του $M(z)$ τους είναι αυτό του Σχήματος 17.37, και κατά συνέπεια, η απόκριση πλάτους τους, $|H_i(e^{j\omega})|$ είναι το ίδιο για όλα.

Φαίνεται ως τώρα λοιπόν ότι ακόμα κι αν δε γνωρίζουμε πόσους πόλους ή πόσα μηδενικά έχει ένα σύστημα $H(z)$, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένου πλήθους $H_i(z)$ από ένα δοθέν $M(z)$, αν υποθέσουμε κάποια πράγματα για την ευστάθεια ή αιτιατότητα ή αν έχουμε κάποια άλλη πληροφορία, τα οποία όλα να έχουν ίδιο φάσμα πλάτους $|H_i(e^{j\omega})|$ αλλά διαφορετικό φάσμα φάσης $\angle H_i(e^{j\omega})$.

Άρα μήπως απαντήσαμε στο αρχικό μας ερώτημα

“μπορούμε να βρούμε γενικά το σύστημα $H(z)$, και άρα την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, από το σύστημα $M(z) = |H(z)|^2$;

Η απάντησή μας ως τώρα είναι “Ναι, αλλά όχι μονοσήμαντα, υπάρχουν όμως πεπερασμένου πλήθους συστήματα που έχουν ίδιο $|H(e^{j\omega})|$ ”. Γνωρίζετε όμως ήδη ότι δεν ισχύει ούτε καν το παραπάνω... ©Διότι αν ένα σύστημα $H(z)$ από αυτά τα τέσσερα που βρήκαμε έχει έναν all-pass όρο της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (17.313)$$

δηλ. μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = H_1(z)H_{ap}(z) = H_1(z)\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (17.314)$$

τότε αν βρούμε το $M(z)$ ξανά, είναι

$$M(z) = H(z)H^*(1/z^*) = H_1(z)\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \left(H_1(1/z^*)\frac{z^* - a^*}{1 - az^*} \right)^* = H_1(z)H_1^*(1/z^*) \quad (17.315)$$

γιατί

$$H_{ap}(z)H_{ap}^*(1/z^*) = \left(\frac{z^* - a^*}{1 - az^*} \right)^* \left(\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{z - a}{1 - a^*z} \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = \frac{1 - a^*z - az^{-1} + |a|^2}{1 - az^{-1} - a^*z + |a|^2} = 1 \quad (17.316)$$

Αυτο τι σημαίνει; Σημαίνει ότι τα συστήματα $H(z)$ και $H_1(z)$ έχουν το ίδιο $M(z)$, και άρα την ίδια απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$! Αυτό συμβαίνει γιατί το all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$ “ακυρώνεται” στο $M(z)$, λόγω της παρουσίας του όρου

$$H_{ap}^*(1/z^*) = \frac{z - a}{1 - a^*z} \quad (17.317)$$

και άρα ο πόλος $z = 1/a^*$ και το μηδενικό $z = a$ του all-pass συστήματος δεν εμφανίζονται ποτέ στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών του $M(z)$!

Έτσι, αν ο αριθμός των πόλων και των μηδενικών του συστήματος $H(z)$ δε μας είναι γνωστός, δεδομένου ενός $M(z)$, υπάρχουν άπειρες επιλογές για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, γιατί για κάθε μια τέτοια που μπορεί κανείς να βρει, μπορεί να θεωρήσει ότι υπάρχουν άπειροι όροι της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (17.318)$$

πολλαπλασιασμένοι με την ευρειθέισα συνάρτηση μεταφοράς, οι οποίοι δε φαίνονται στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών του $M(z)$, λόγω της ακύρωσής τους με τους πόλους και τα μηδενικά του όρου

$$H_{ap}^*(1/z^*) = \frac{z - a}{1 - a^*z} \quad (17.319)$$

Άρα όλα αυτά τα διαφορετικά συστήματα $H_i(z)$ που μπορούν να βρεθούν λόγω των διαφορετικών $H_{ap}(z)$ που μπορεί να υπάρχουν ως όροι τους, θα έχουν φασματική απόκριση $H(e^{j\omega})$ με ίδια απόκριση πλάτους αλλά ασφαλώς με διαφορετική απόκριση φάσης το καθένα, λόγω της επίδρασης της απόκρισης φάσης του all-pass συστήματος⁶.

Οπότε τελικά, η απάντηση στο ερώτημα

“μπορούμε να βρούμε γενικά τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, και άρα την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, από τον όρο $M(z) = |H(z)|^2$;”

είναι *όχι*, δεν μπορεί να βρεθεί μονοσήμαντα το σύστημα $H(z)$ από τον όρο $M(z)$, υπάρχουν άπειρες πιθανές επιλογές για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, οι οποίες γίνονται πεπερασμένες αν γνωρίζουμε το πλήθος των πόλων και των μηδενικών της.

Ας περάσουμε τώρα στη μελέτη των συστημάτων all-pass, αφού φαίνεται πως η σημασία τους είναι καθοριστική.

17.9.1 All-pass Συστήματα

Ένα all-pass σύστημα (όπως προδίδει και το όνομά του ☺) έχει απόκριση σε συχνότητα που έχει σταθερο πλάτος, δηλ.

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad \forall \omega \quad (17.320)$$

δηλ. ένα all-pass σύστημα αφήνει αμετάβλητο το πλάτος του σήματος που δέχεται στην είσοδό του. Αυτή η ιδιότητα επιβάλλει τον περιορισμό στους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς να βρίσκονται σε συζυγή αμοιβαία ζευγή⁷:

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \quad (17.321)$$

⁶Του οποίου τη φάση δεν έχουμε μελετήσει ακόμα αλλά σας λέμε τώρα ότι είναι μη μηδενική ☺

⁷Σε καθολική ομοιότητα με τα αντίστοιχα συστήματα συνεχούς χρόνου του Κεφαλαίου 8!

Έτσι, αν το $H(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = a_k$, πρέπει να έχει κι ένα μηδενικό στη συζυγή αμοιβαία θέση $z = 1/a_k^*$. Αν η χροστική απόκριση $h[n]$ είναι πραγματική, οι μιγαδικές ρίζες στην παραπάνω σχέση έρχονται σε συζυγή ζεύγη, και αν συνδυάσουμε αυτά τα ζεύγη για να πάρουμε παράγοντες δευτερης τάξης, θα έχουμε

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{N_1} \frac{z^{-1} - b_k}{1 - b_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{(z^{-1} - d_k^*)(z^{-1} - d_k)}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \quad (17.322)$$

με συντελεστές b_k πραγματικούς και d_k μιγαδικούς, και τη σταθερά A πραγματικό αριθμό.

Αν ένα all-pass σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό, έχει προφανώς όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου, $|a_k| < 1, \forall k$.

Η απόκριση φάσης για ένα τέτοιο φίλτρο πρώτης τάξης είναι της μορφής

$$\angle \left[\frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - a e^{j\omega}} \right] = \angle \left[\frac{e^{-j\omega} - r e^{-j\theta}}{1 - r e^{j\theta} e^{j\omega}} \right] = -\omega - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (17.323)$$

ενώ για ένα δευτέρας τάξης με πόλους στις θέσεις $z = r e^{j\theta}$ και $z = r e^{-j\theta}$, είναι

$$\angle \left[\frac{(e^{-j\omega} - r e^{-j\theta})(e^{-j\omega} - r e^{j\theta})}{(1 - r e^{j\theta} e^{j\omega})(1 - r e^{-j\theta} e^{j\omega})} \right] = -2\omega - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)} \quad (17.324)$$

Ένα πραγματικό, ευσταθές, και αιτιατό all-pass σύστημα έχει καθυστέρηση ομάδας που είναι θετική για κάθε ω . Αυτό γιατί για ένα πραγματικό πρώτης τάξης all-pass συστήμα της μορφής

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - a z^{-1}} \quad (17.325)$$

με $a = r e^{j\theta}$, $|r| < 1$, η καθυστέρηση ομάδας δίνεται ως (δειξτε το αναλυτικά στην Άσκηση XXXX)

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \frac{1 - r^2}{|1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (17.326)$$

Έτσι, για $0 \leq r < 1$, συνεπάγεται ότι $\text{grd}[H(e^{j\omega})] \geq 0$. Αυτό όμως μας δίνει μια πολύ σημαντική ιδιότητα των πραγματικών αιτιατών και ευσταθών συστημάτων all-pass: ότι η απόκριση φάσης είναι αρνητική. Ας το δείξουμε.

Η απόκριση φάσης δίνεται ως

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] = - \int_0^\omega \text{grd}[H_{ap}(e^{j\phi})] d\phi + \arg[H_{ap}(e^{j0})] \quad (17.327)$$

για $0 \leq \omega \leq \pi$. Όμως μπορούμε να δείξουμε από τη Σχέση (17.322) ότι

$$H_{ap}(e^{j0}) = A \prod_{k=1}^{N_1} \frac{1 - b_k}{1 - b_k} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{|1 - d_k|^2}{|1 - d_k|^2} = A \quad (17.328)$$

Άρα

$$\arg[H_{ap}(e^{j0})] = 0 \quad (17.329)$$

και έτσι, αφού

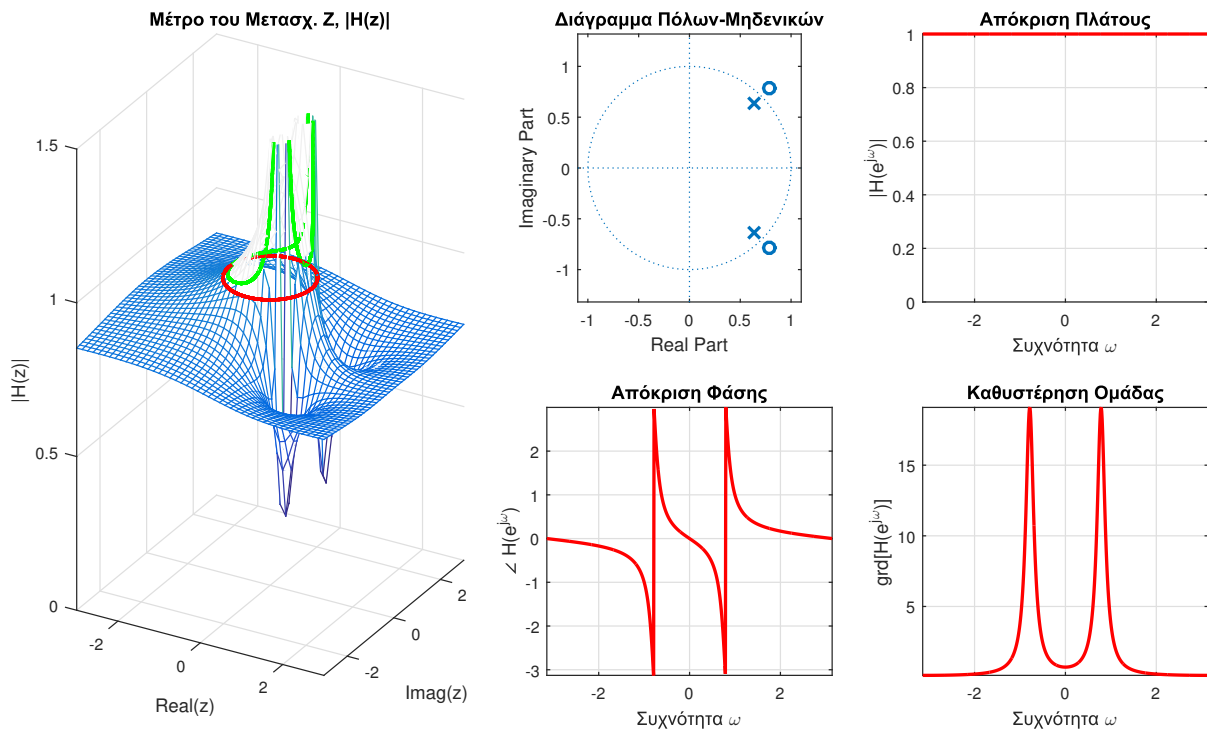
$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] \geq 0 \quad (17.330)$$

η Σχέση (17.327) δίνει

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \leq 0 \quad (17.331)$$

για $0 \leq \omega \leq \pi$.

Επειδή τα υψηλότερης τάξης all-pass συστήματα αποτελούνται από γινόμενα όρων πρώτης τάξης, η καθυστέρηση ομάδας ισούται με ένα άθροισμα καθυστερήσεων ομάδας όπως αυτής της Σχέσης (17.326). Το ίδιο και η φάση. Άρα εν γένει, ένα αιτιατό all-pass σύστημα έχει πάντα θετική καθυστέρηση ομάδας και αρνητική απόκριση φάσης, όπως μόλις δείξαμε. Η ιδιότητα αυτή είναι αρκετά σημαντική. Ένα παράδειγμα ευσταθούς και αιτιατού all-pass συστήματος δευτέρας τάξης φαίνεται στο Σχήμα 17.38, όπου ο πόλος βρίσκεται στη θέση $a = 0.9e^{j\pi/4}$, ενώ ο δεύτερος πόλος αποτελεί το συζυγή του πρώτου. Τα all-pass φίλτρα είναι χρησιμα για εφαρμογές εξίσωσης καθυστέρησης ομάδας, για να αντισταθμίζουν τις μη-γραμμικότητες της φάσης σε διάφορες εφαρμογές (επεξεργασία φωνής, ήχου). Επίσης, θα χρειαστούν για τη θεωρία των φίλτρων ελάχιστης φάσης - *minimum phase* που



Σχήμα 17.38: Φασματικές αποκρίσεις ενός all-pass συστήματος.

θα δούμε αμέσως. Τέλος, χρησιμοποιούνται για μετατροπή χαμηλοπερατών φίλτρων σε άλλα φίλτρα.

Παράδειγμα 17.26:

Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \alpha y[n-1] = \beta x[n] + x[n-1] \quad (17.332)$$

με $|\alpha| < 1$ και πραγματικό. Βρείτε την τιμή του β έτσι ώστε το σύστημα να είναι all-pass με μοναδιαίο πλάτος.

Λύση:

Εφαρμόζοντας μετασχ. Fourier και στα δυο μέλη της εξίσωσης, έχουμε

$$Y(e^{j\omega}) - \alpha Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = \beta X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \quad (17.333)$$

$$Y(e^{j\omega})(1 - \alpha e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})(\beta + e^{-j\omega}) \quad (17.334)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\beta + e^{-j\omega}}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (17.335)$$

Για να είναι η απόκριση πλάτους μοναδιαία πρέπει

$$|\beta + e^{-j\omega}| = |1 - \alpha e^{-j\omega}| \quad (17.336)$$

$$1 + \beta^2 + 2\beta \cos(\omega) = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega) \quad (17.337)$$

η οποία ισχύει μόνο για $\beta = -\alpha$.

17.9.2 Συστήματα Ελαχίστης Φάσης - Minimum Phase Systems

Αφού λοιπόν μελετήσαμε τα all-pass συστήματα, ας επανέλθουμε στο πρότερο πρόβλημα της μελέτης της απόκρισης πλάτους μέσω των πόλων και των μηδενικών του $M(z) = |H(z)|^2$. Βρήκαμε στην Ενότητα 17.9 ότι δεν υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του $M(z)$ και του $H(z)$, τουναντίον, υπάρχουν άπειρα συστήματα $H(z)$ με

ίδια απόκριση πλάτους αλλά διαφορετική απόκριση φάσης που ικανοποιούν το $M(z)$. Η κατάσταση γίνεται κάπως πιο “βατή” αν ξέρουμε τον αριθμό των πόλων και των μηδενικών του συστήματος, καθώς τότε τα συστήματα $H(z)$ γίνονται πεπερασμένου πλήθους.

Έστω ότι θεωρούμε ένα ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς που έχει όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου. Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο, δεν έχουν κάποιο περιορισμό λόγω της ευστάθειας ή της αιτιατότητας. Σε αρκετες εφαρμογές, χρειαζομαστε ένα σύστημα που να είναι ευσταθές και αιτιατό, αλλά να έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα, $H_i(z)$. Αυτό απαιτεί, μια και τα μηδενικά του $H(z)$ γίνονται πόλοι του $H_i(z)$, να είναι και τα μηδενικά του $H(z)$ εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Ένα τέτοιο σύστημα λοιπόν, που έχει και πόλους και μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου, λέγεται **συστημα ελάχιστης φάσης - minimum phase system**. Παρ’ ότι το όνομά του δεν προέρχεται από την κατανομή πόλων και μηδενικών, θα δούμε μερικές ιδιότητες της απόκρισης φάσης του που κάνουν πιο κατανοητή την ονομασία του.

17.9.3 Παραγοντοποίηση Συστημάτων σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

Ένα οποιοδήποτε σύστημα $H(z)$ μπορεί πάντα να παραγοντοποιηθεί ως το γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$, και ενός all-pass συστήματος, $H_{ap}(z)$:

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) \quad (17.338)$$

Για αυτήν την παραγοντοποίηση ισχύει ότι

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})||H_{ap}(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})| \quad (17.339)$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (17.340)$$

Άρα βλέπουμε ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την ίδια απόκριση πλάτους με το μη-ελάχιστης φάσης σύστημα!

Η διαδικασία παραγοντοποίησης έχει ως εξής:

Παραγοντοποίηση ΓΧΑ Συστήματος σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass

1. Όλα τα μηδενικά του $H(z)$ που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου αντικατοπτρίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, στα συζυγή αμοιβαία μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει είναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$.
2. Το all-pass σύστημα επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτρίζει το καταλληλο σύνολο από μηδενικά του $H_{min}(z)$ πάλι ξανά εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Αναγκαστικά, οι πόλοι του all-pass θα πρέπει να εισαχθούν ως μηδενικά στο σύστημα ελάχιστης φάσης για να ισχύει η πράξη της διάσπασης του αρχικού συστήματος σε γινόμενο δυο συστημάτων.
3. Όταν έχουμε κατασκευάσει τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_{min}(z)$ και $H_{ap}(z)$, ελέγχουμε αν το all-pass είναι μοναδιαίας απόκρισης πλάτους. Αν όχι, το μετατρέπουμε σε τέτοιο, και μεταφέρουμε την όποια σταθερά προκύψει στο σύστημα ελάχιστης φάσης.

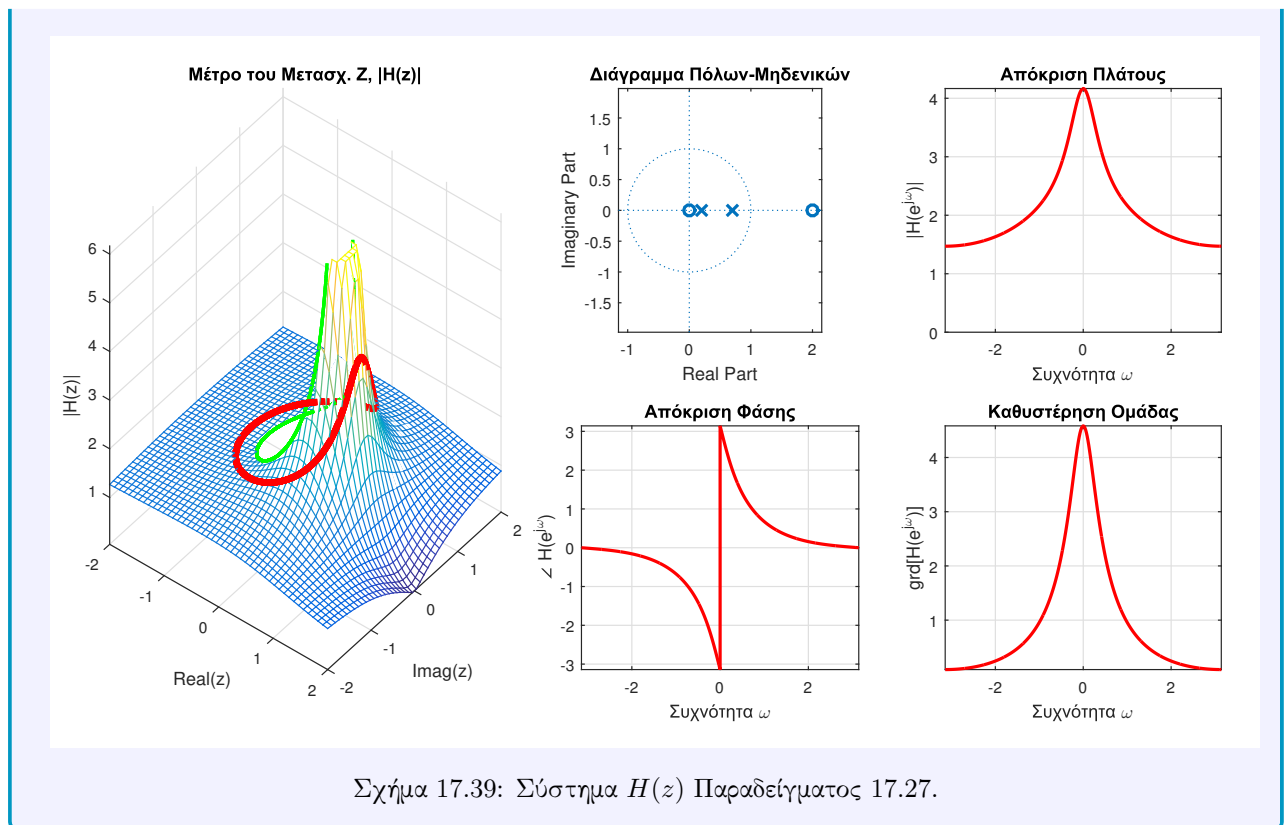
Ας δούμε μερικά παραδείγματα που θα ξεκαθαρίσουν την παραπάνω διαδικασία.

Παράδειγμα 17.27:

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (17.341)$$

της οποίας τα χαρακτηριστικά φαίνονται στο Σχήμα 17.39.



Λύση:

Προφανώς τα μηδενικά του βρίσκονται⁸ στις θέσεις $z = 2$ και $z = 0$, ενώ οι πόλοι στις θέσεις $z = 0.2$ και $z = 0.7$. Το μηδενικό στη θέση $z = 2$ είναι αυτό που κάνει το σύστημά μας μη-ελάχιστης φάσης. Αν το μετατρέψουμε στο συζυγές αμοιβαίο του εντός του μοναδιαίου κύκλου, το οποίο είναι το $z = 1/2$, θα έχουμε το σύστημα ελάχιστης φάσης ως

$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (17.342)$$

Τώρα, για να αντικατοπτρίσουμε το μηδενικό στη θέση $z = 0.5$ πάλι έξω από το μοναδιαίο κύκλο στη θέση $z = 2$, χρησιμοποιούμε το all-pass σύστημα

$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.343)$$

Όμως το παραπάνω all-pass σύστημα δεν είναι μοναδιαίου πλάτους, γιατί δεν είναι στην επιθυμητή μορφή, η οποία είναι

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (17.344)$$

Παραγοντοποιώντας κατάλληλα τον αριθμητή, έχουμε

$$H_{ap}(z) = -2 \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.345)$$

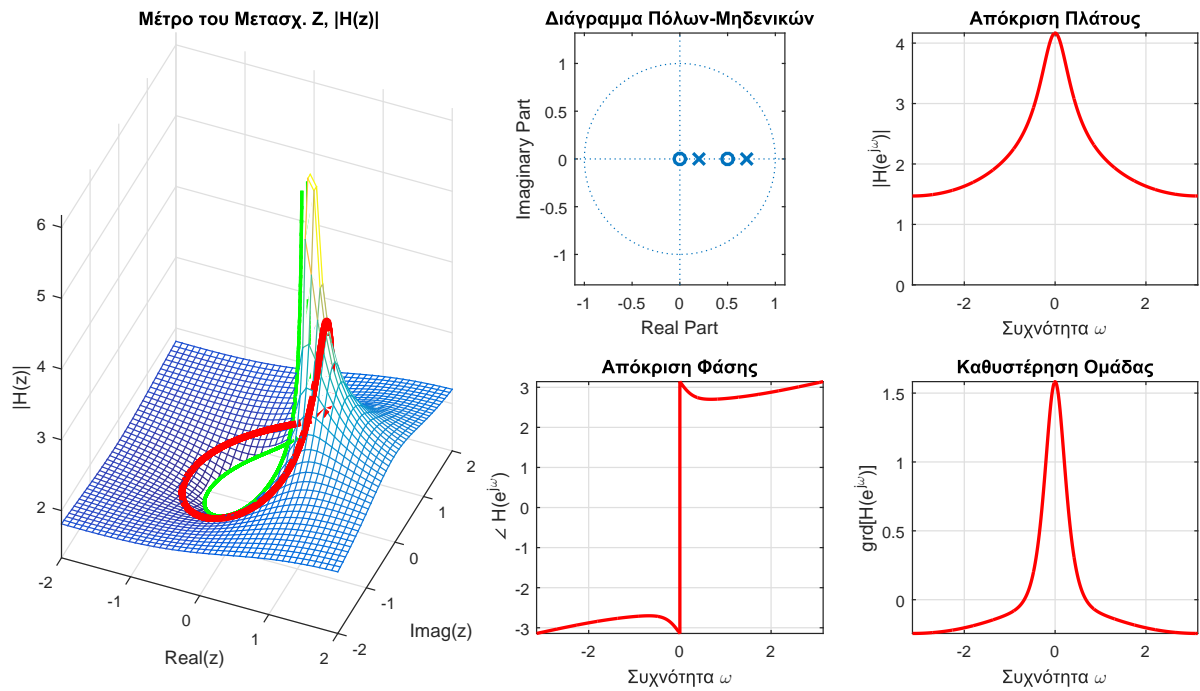
Άρα το all-pass σύστημα έχει μέτρο 2. Μεταφέροντας τη σταθερά -2 στο σύστημα ελάχιστης φάσης ώστε να μετατρέψουμε το all-pass σε μοναδιαίου πλάτους, θα έχουμε τελικά

$$H_{min}(z) = -2 \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (17.346)$$

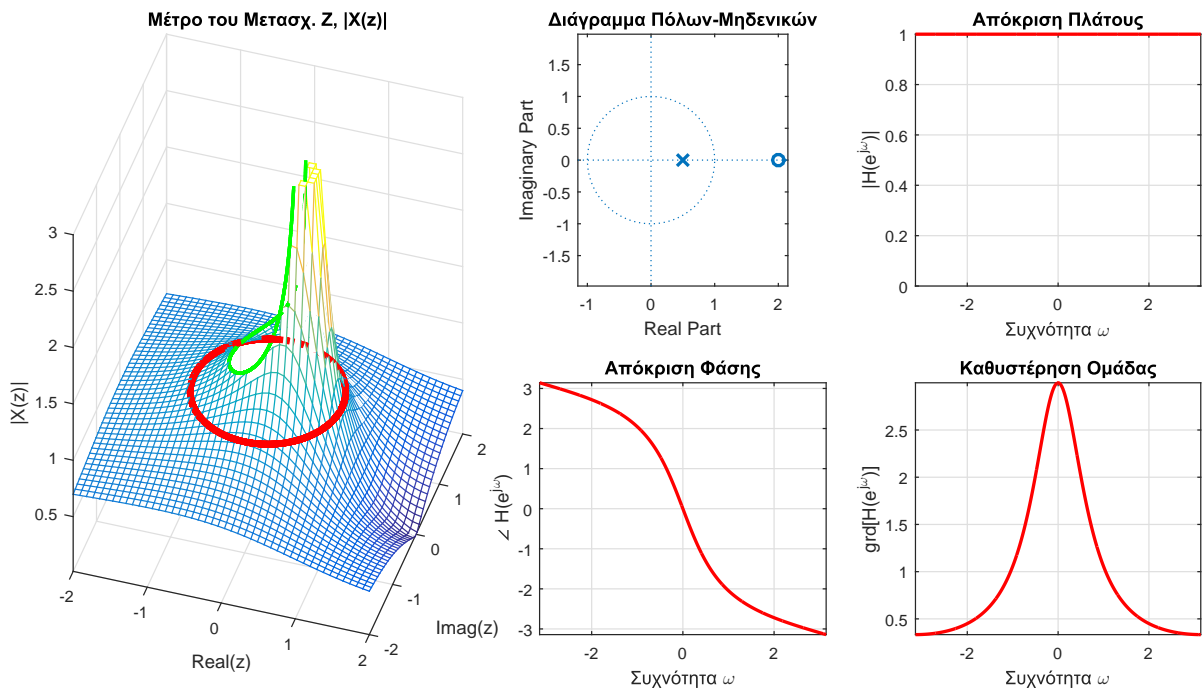
$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.347)$$

Παρατηρήστε πως το γινόμενό τους μας δίνει την αρχική συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$. Η παραγοντοποίηση φαίνεται στα Σχήματα 17.40, 17.41.

⁸Πρέπει πλέον να μπορείτε να το βλέπετε χωρίς πράξεις!



Σχήμα 17.40: Σύστημα $H_{min}(z)$ Παραδείγματος 17.27.



Σχήμα 17.41: Σύστημα $H_{ap}(z)$ Παραδείγματος 17.27

Παρατηρήστε ότι η απόκριση πλάτους, $|H(e^{j\omega})|$, του αρχικού συστήματος $H(z)$ είναι ίδια με την απόκριση πλάτους, $|H_{min}(e^{j\omega})|$, του συστήματος ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$. Φυσικά, η απόκριση πλάτους του all-pass συστήματος είναι μοναδιαία, όπως αναμενόταν. Προσέξτε επίσης την καθυστέρηση ομάδας. Η καθυστέρηση ομάδας του συστήματος ελάχιστης φάσης είναι μικρότερη από την καθυστέρηση ομάδας του αρχικού συστήματος. Επίσης, προσέξτε ότι η καθυστέρηση ομάδας του αιτιατού και ευσταθούς all-pass συστήματος είναι θετική, όπως είχαμε δει νωρίτερα. Κρατήστε αυτές τις παρατηρήσεις, θα τις χρειαστούμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 17.28:

Έστω δυο ευσταθή και αιτιατά συστήματα

$$H_1(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.348)$$

$$H_2(z) = \frac{(1 + \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (17.349)$$

Παραγοντοποιήστε τα σε δυο συστήματα ελάχιστης φάσης και all-pass.

Λύση:

Η πρώτη συνάρτηση μεταφοράς, $H_1(z)$, έχει έναν πόλο εντός μοναδιαίου κύκλου, στη θέση $z = 0.5$ αλλά ένα μηδενικό στη θέση $z = -3$. Πρέπει να βρούμε το κατάλληλο all-pass σύστημα που θα πάρει αυτό το μηδενικό και θα έχει επίσης έναν πόλο στη συζυγή αμοιβαία θέση. Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = 3 \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (17.350)$$

Οπότε το σύστημα ελάχιστης φάσης θα είναι

$$H_{min}(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.351)$$

κι αν φέρουμε τη σταθερά 3 στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα έχουμε

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (17.352)$$

$$H_{min}(z) = 3 \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (17.353)$$

Για το $H_2(z)$ έχει δυο μιγαδικά μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου και έναν πραγματικό πόλο εντός του. Τα δυο μηδενικά θα είναι μέρος του all-pass συστήματος ενώ ο πόλος του minimum phase συστήματος. Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 + \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (17.354)$$

$$= \frac{9}{4} \frac{(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (17.355)$$

Στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα έχουμε τον πόλο του αρχικού συστήματος και τα μηδενικά που προσθέσαμε στο all-pass στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις:

$$H_{min}(z) = \frac{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (17.356)$$

κι αν φέρουμε τη σταθερά 9/4 στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα έχουμε τελικά

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (17.357)$$

$$H_{min}(z) = \frac{9}{4} \frac{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (17.358)$$

Παράδειγμα 17.29:

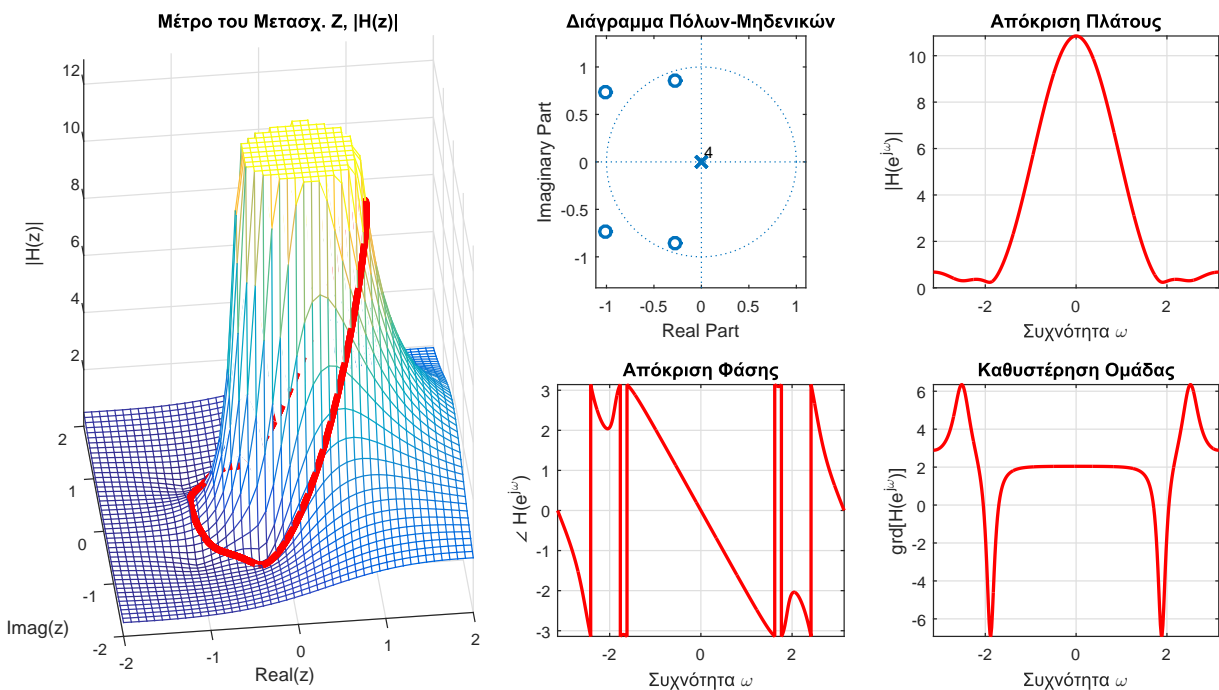
Έστω το σύστημα

$$H(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (17.359)$$

το οποίο και απεικονίζεται στο Σχήμα 17.42. Γράψτε το σε μορφή γινομένου ενός συστήματος ελάχιστης φάσης κι ενός συστήματος all-pass.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι αυτό το σύστημα έχει 4 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο και 4 πόλους στο $z = 0$.



Σχήμα 17.42: Σύστημα $H(z)$ Παραδείγματος 3.

Προφανώς το minimum phase σύστημα θα κρατήσει τους 4 πόλους, καθώς και τα $z = 0.9e^{j0.6\pi}$, $z = 0.9e^{-j0.6\pi}$ μηδενικά που βρίσκονται εντός μοναδιαίου κύκλου. Το all-pass θα πάρει τα δυο μηδενικά εκτός μοναδιαίου κύκλου, $z = 1.25e^{j0.8\pi}$ και $z = 1.25e^{-j0.8\pi}$, και θα πρέπει να έχει και πόλους στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις.

Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \quad (17.360)$$

$$= (1.25)^2 \frac{(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \quad (17.361)$$

Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει επιπλέον δυο μηδενικά για να ακυρωθούν οι πόλοι του $H_{ap}(z)$, οπότε

$$H_{min}(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (17.362)$$

και φέρνοντας τη σταθερά $(1.25)^2$ στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα είναι

$$H_{min}(z) = (1.25)^2(1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (17.363)$$

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \quad (17.364)$$

Η παραγοντοποίηση φαίνεται στα Σχήματα 17.43, 17.44.

Παρατηρήστε ξανά: η απόκριση πλάτους, $|H(e^{j\omega})|$, του αρχικού συστήματος $H(z)$ είναι ίδια με την απόκριση πλάτους, $|H_{min}(e^{j\omega})|$, του συστήματος ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$, ενώ η απόκριση πλάτους του all-pass συστήματος είναι μοναδιαία, όπως αναμενόταν. Η καθυστέρηση ομάδας του συστήματος ελάχιστης φάσης είναι μικρότερη από την καθυστέρηση ομάδας του αρχικού συστήματος. Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας του αιτιατού και ευσταθούς all-pass συστήματος είναι θετική, όπως είχαμε δει νωρίτερα. ■

Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί αν η παραγοντοποίηση - όπως τη δείξαμε νωρίτερα - είναι ο μοναδικός δρόμος για την εύρεση του συστήματος ελάχιστης φάσης. Σε πολλές περιπτώσεις μας ενδιαφέρει μόνο αυτό, και θα θέλαμε να το βρούμε άμεσα. Αν προσέξετε τη διαδικασία που εκτελέστηκε σε όλα τα παραδείγματα, αυτό που ουσιαστικά κάναμε ήταν να “καθρεπτίσουμε” τα μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου του αρχικού συστήματος στα αντίστοιχα συζυγή αμοιβαία τους. Όμως έχουμε ήδη δει ότι για να μην επηρεάσει την απόκριση πλάτους μια τέτοια αλλαγή, πρέπει ο όρος $1 - bz^{-1}$, με $b = re^{j\theta}$, $|r| > 1$, που αντιπροσωπεύει ένα μηδενικό εκτός του μοναδιαίου κύκλου να αντικατασταθεί από τον όρο $z^{-1} - b^*$, ο οποίος περιγράφει ένα μηδενικό εντός του μοναδιαίου κύκλου. Θυμηθείτε ότι

$$|1 \pm bz^{-1}|_{z=e^{j\omega}} = |z^{-1} \pm b^*|_{z=e^{j\omega}} \quad (17.365)$$

Έτσι, η εύρεση του συστήματος ελάχιστης φάσης μπορεί να γίνει χωρίς παραγοντοποίηση ως εξής:

Εύρεση Συστήματος Ελάχιστης Φάσης από ένα Σύστημα $H(z)$

Για ένα δεδομένο ευσταθές και αιτιατό σύστημα $H(z)$ με M μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου, δηλ.

$$H(z) = Q(z) \prod_{k=1}^M (1 - r_k e^{j\theta_k} z^{-1}), \quad |r_k| > 1 \quad \forall k \quad (17.366)$$

τότε το σύστημα ελάχιστης φάσης δίνεται ως

$$H_{min}(z) = Q(z) \prod_{k=1}^M (z^{-1} - r_k e^{-j\theta_k}), \quad |r_k| > 1 \quad \forall k \quad (17.367)$$

Ας το δούμε σε ένα τελευταίο παράδειγμα.

Παράδειγμα 17.30:

Ένα αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 9z^{-2})}{(1 - 0.81z^{-2})} \quad (17.368)$$

Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης που αντιστοιχεί στο παραπάνω σύστημα.

Λύση:

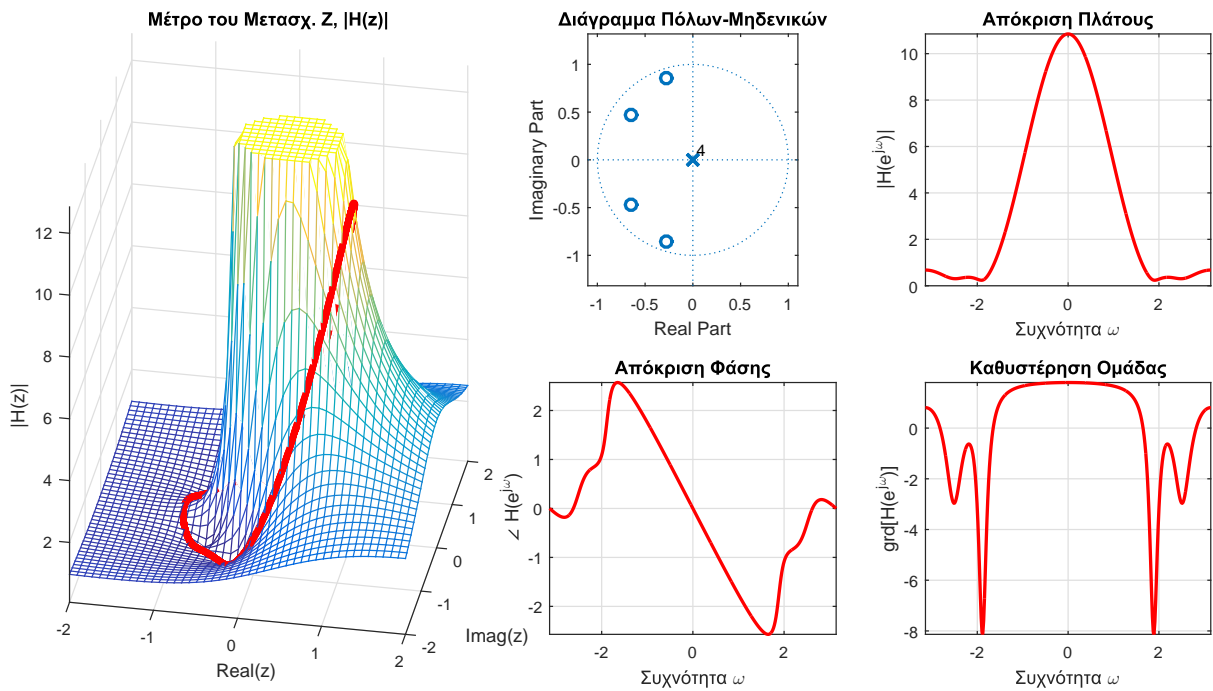
Το σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 3jz^{-1})(1 - 3jz^{-1})}{(1 - 0.9z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})} \quad (17.369)$$

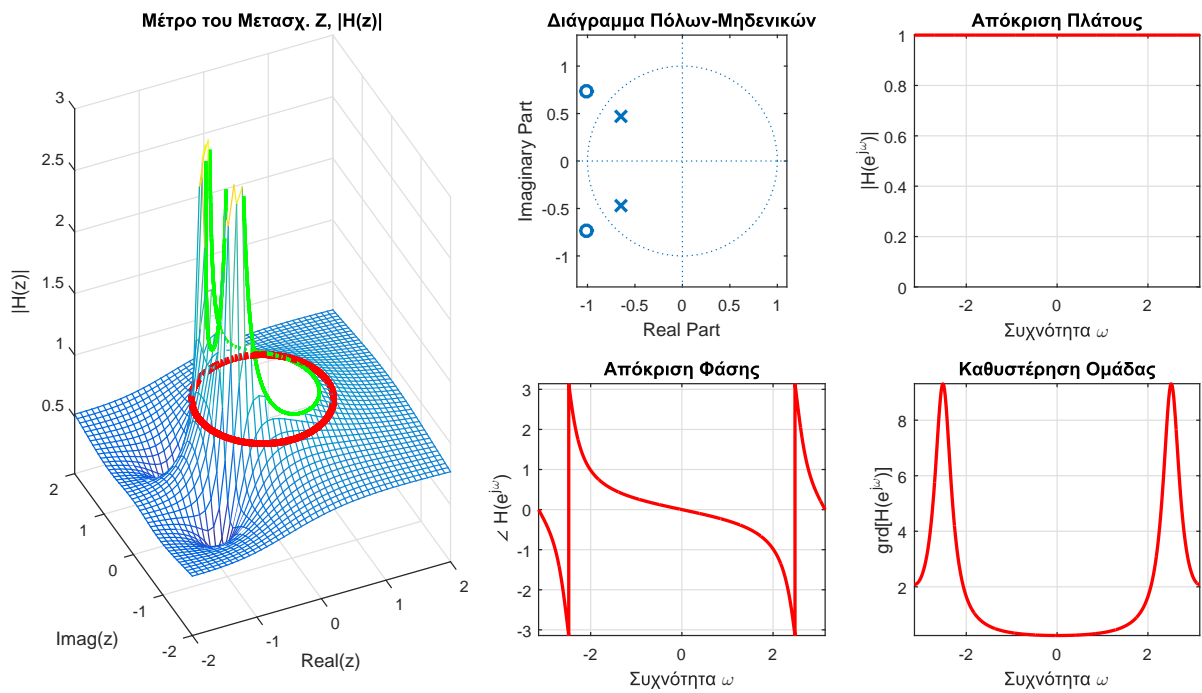
Αναγνωρίζουμε τα δυο μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου, $z = \pm 3j$, στους όρους $(1 \mp 3jz^{-1})$. Μεταφέροντας τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου, θα έχουμε

$$H_{min}(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(z^{-1} - 3j)(z^{-1} + 3j)}{(1 - 0.9z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})} \quad (17.370)$$

$$= (-3j)(3j) \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - 0.9z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})} \quad (17.371)$$



Σχήμα 17.43: Σύστημα $H_{min}(z)$ Παραδείγματος 3.



Σχήμα 17.44: Σύστημα $H_{ap}(z)$ Παραδείγματος 3.

$$= 9 \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}{(1 - 0.9z^{-1})(1 + 0.9z^{-1})} \quad (17.372)$$

■

Αναφερόμαστε συνεχώς στα συστήματα ελάχιστης φάσης ως αυτά που είναι ευσταθή και αιτιατά και που έχουν όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλ. έχουν ευσταθή και αιτιατό αντίστροφο σύστημα. Η επιλογή του ονόματός τους προέρχεται από μια ιδιότητα της απόκρισης φάσης τους, και παρ' ότι δεν είναι προφανές, έχει άμεση σχέση με τον ορισμό που μόλις δώσαμε.

Ας δούμε αυτήν την ιδιότητα, μαζί με άλλες δυο πολύ σημαντικές ιδιότητες των συστημάτων ελάχιστης φάσης.

1. Δείξαμε μόλις πριν λίγο ότι ένα οποιοδήποτε σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) \quad (17.373)$$

Άρα η απόκριση φάσης του συστήματος θα είναι

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (17.374)$$

Ξέρουμε όμως ότι η απόκριση φάσης ενός all-pass συστήματος είναι αρνητική για κάθε $\omega \in [0, \pi]$. Άρα

$$\arg[H(e^{j\omega})] \leq \arg[H_{min}(e^{j\omega})] \quad (17.375)$$

Έτσι, η “ανάκλαση” των μηδενικών του $H_{min}(z)$ από εντός σε εκτός του μοναδιαίου κύκλου στις αμοιβές συζυγείς θέσεις πάντα μειώνει την απόκριση φάσης ή αυξάνει την αρνητική της φάσης, η οποία ονομάζεται καθυστέρηση φάσης - *phase lag*⁹. Άρα το αιτιατό και ευσταθές σύστημα που έχει την απόκριση πλάτους $|H_{min}(e^{j\omega})|$ και όλα τα μηδενικά (και φυσικά τους πόλους) εντός μοναδιαίου κύκλου, έχει τη μικρότερη καθυστέρηση φάσης (για $0 \leq \omega \leq \pi$) από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους¹⁰

2. Από όλα τα συστήματα που έχουν το ίδιο φάσμα πλάτους μετασχ. Fourier, τα συστήματα ελάχιστης φάσης έχουν την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας. Ας το δείξουμε. Εστω δυο συστήματα με το ίδιο φάσμα πλάτους μετασχ. Fourier. Το ένα είναι ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$, και το άλλο όχι, $H(z)$. Η καθυστέρηση ομάδας για το $H(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] = \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})] + \text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (17.376)$$

λόγω της παραγοντοποίησης που συζητήσαμε παραπάνω. Επειδή όταν μιλήσαμε για all-pass συστήματα, είπαμε ότι έχουν μη αρνητική καθυστέρηση ομάδας, $\text{grd}[H_{ap}(e^{j\omega})] \geq 0$, αυτό σημαίνει ότι

$$\text{grd}[H(e^{j\omega})] \geq \text{grd}[H_{min}(e^{j\omega})] \quad (17.377)$$

Άρα ξανά, από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους, το σύστημα ελάχιστης φάσης είναι αυτό που έχει την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας. Ένα εξίσου καλό όνομα για αυτά τα συστήματα θα ήταν “ελάχιστης καθυστέρησης ομάδας - minimum group delay systems”, αλλά σπάνια χρησιμοποιείται αυτή η ορολογία.

3. Μπορούμε να δείξουμε ότι τα συστήματα ελάχιστης φάσης έχουν ελάχιστη καθυστέρηση ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι αν $h_{min}[n]$ είναι η κρουστική απόκριση ενός συστήματος ελάχιστης φάσης, και $h[n]$ είναι η κρουστική απόκριση ενός άλλου αιτιατού συστήματος με το ίδιο φάσμα πλάτους, $|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$, τότε

$$\sum_{k=0}^n |h[k]|^2 \leq \sum_{k=0}^n |h_{min}[k]|^2 \quad (17.378)$$

για κάθε $n \geq 0$. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για τα συστήματα ελάχιστης φάσης, η ενέργεια του σήματος είναι συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της κρουστικής απόκρισης $h_{min}[n]$ (δηλ. η μερική ενέργεια ως και το n -οστό δείγμα έχει μεγαλύτερη τιμή στο σύστημα ελάχιστης φάσης από τις αντίστοιχες μερικές ενέργειες των υπολοίπων συστημάτων), ενώ για οποιοδήποτε άλλο σύστημα με το ίδιο φάσμα πλάτους $|H(e^{j\omega})|$, η ενέργεια της κρουστικής απόκρισης είναι κατανομημένη διαφορετικά. Προσοχή: η παραπάνω σχέση μιλά για την κατανομή της ενέργειας, όχι για την τιμή της. Σε όλα τα συστήματα που έχουν το ίδιο $|H(e^{j\omega})|$, ισχύει

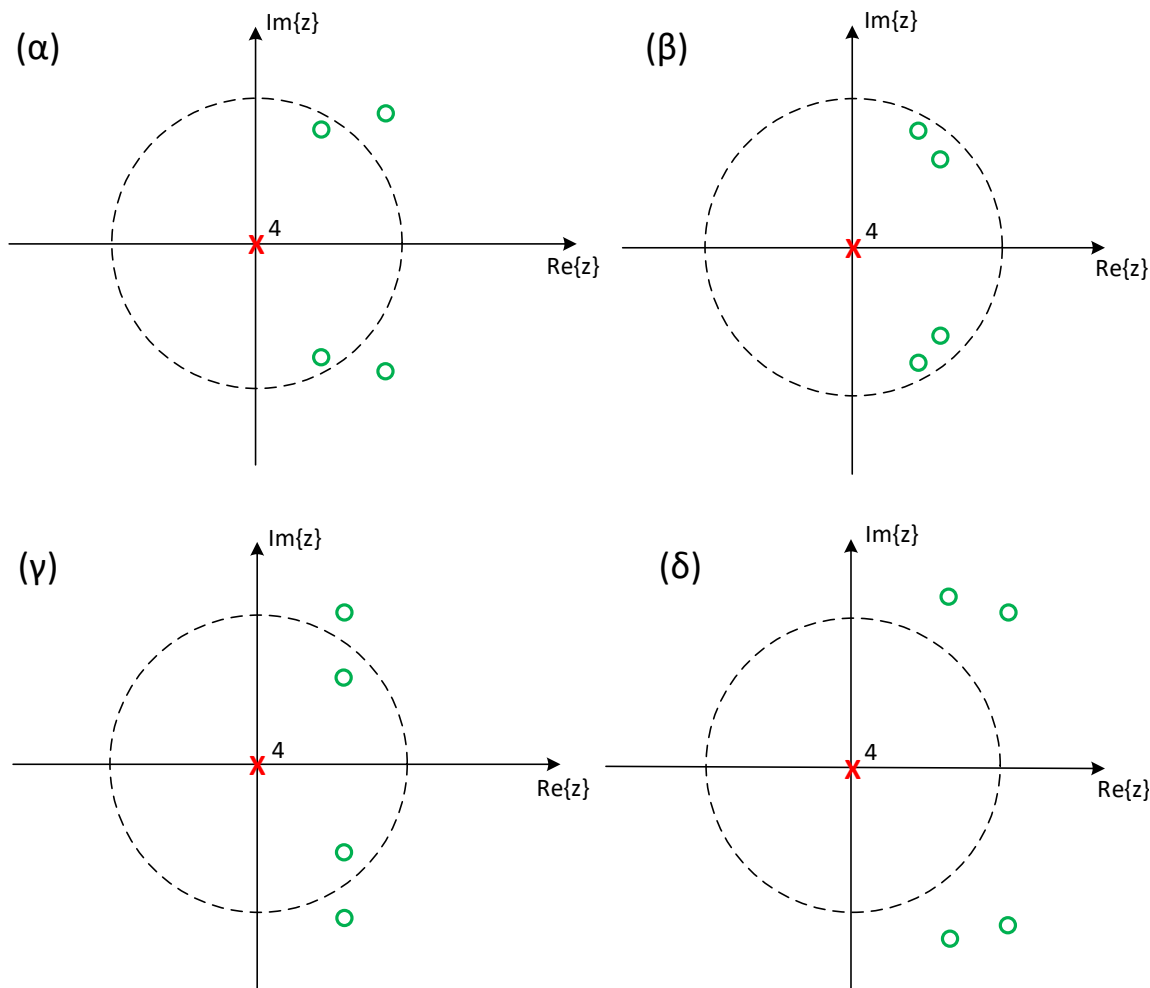
⁹Μην τη συγχέετε με την καθυστέρηση φάσης $-\theta(\omega)/\omega$ που είδαμε όταν μελετούσαμε την καθυστέρηση ομάδας στην Ενότητα 17.5.2.

¹⁰Ίσως η ονομασία “συστήματα ελάχιστης καθυστέρησης φάσης” να είναι η πιο κατάλληλη, αλλά ιστορικά έχει επικρατήσει να τα λέμε απλά συστήματα ελάχιστης φάσης.

ότι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |h_{min}[k]|^2 \tag{17.379}$$

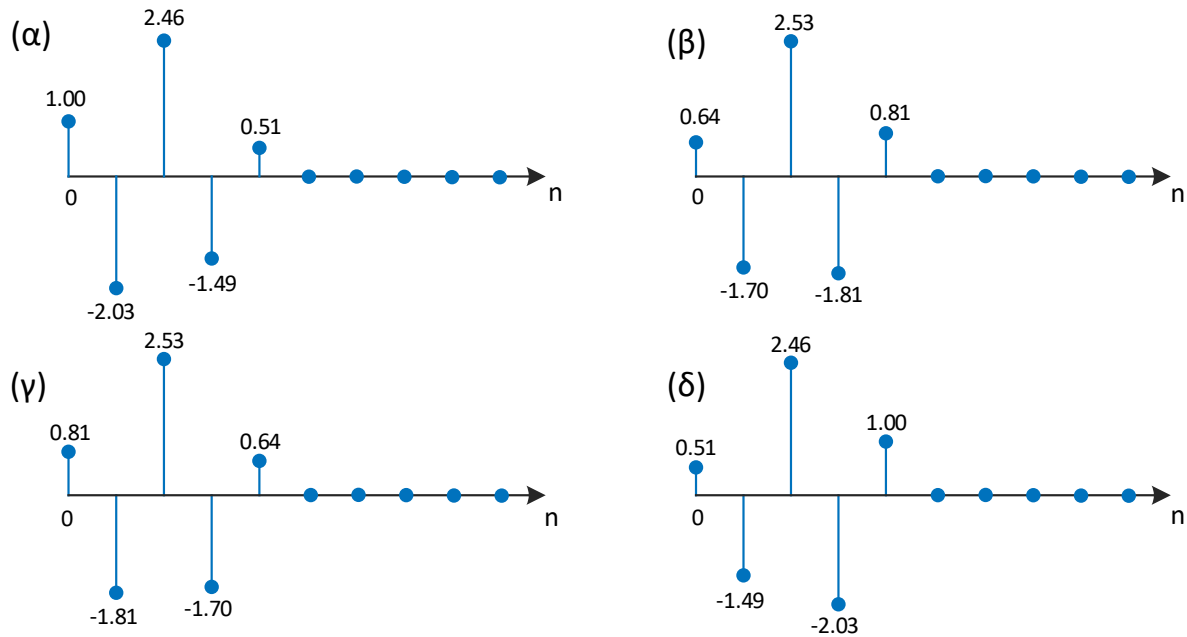
από το θεώρημα του Parseval. Έτσι, ένα τρίτο όνομα για αυτά τα συστήματα θα ήταν “ελάχιστης καθυστέρησης ενέργειας - minimum energy delay systems”. Δείτε, για παράδειγμα το Σχήμα 17.45. Μπορείτε



Σχήμα 17.45: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών τεσσάρων συστημάτων με ίδια απόκριση πλάτους. Τα μηδενικά είναι τέσσερις συζυγείς συνδυασμοί των $0.8e^{\pm j\pi/4}$, $0.9e^{\pm j\pi/6}$.

φυσικά να αναγνωρίσετε το σύστημα ελάχιστης φάσης (β). Δείτε τώρα την κρουστική απόκριση καθενός από αυτά στο Σχήμα 17.46. Σύμφωνα με τη Σχέση (17.378), το σύστημα ελάχιστης φάσης πρέπει να είναι εκείνο με την ενέργειά του κατανομημένη πιο κοντά στο $n = 0$ από τα υπόλοιπα συστήματα. Από αυτά, το Σχήμα 17.46(α) ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, που είναι πράγματι η κρουστική απόκριση του συστήματος ελάχιστης φάσης του Σχήματος 17.45(β). Για του λόγου το αληθές, η μερική ενέργεια του συστήματος ελάχιστης φάσης σε σχέση με τα υπόλοιπα συστήματα δίνεται από τον Πίνακα 17.1. Είναι εμφανές ότι το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει μεγαλύτερη μερική ενέργεια από τα υπόλοιπα, με τις ενέργειες τους να πλησιάζουν μεταξύ τους όσο αυξάνουμε το πλήθος των δειγμάτων που συμπεριλαμβάνουμε στον υπολογισμό τους, και φυσικά η συνολική ενέργεια για όλα τα συστήματα είναι η ίδια ($E = 7.51$ στο συγκεκριμένο παράδειγμα).

Ένα τελευταίο στοιχείο σχετικά με τα συστήματα ελάχιστης φάσης είναι ότι αν μας δοθεί ένα σύστημα $M(z) = H(z)H^*(1/z^*) \implies M(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})|^2$, και γνωρίζουμε ότι περιγράφει ένα σύστημα ελάχιστης φάσης, τότε το σύστημα $H(z)$ μπορεί να οριστεί μοναδικά από το $M(z)$ και φυσικά θα αποτελείται από εκείνο το σύστημα που έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά του $M(z)$ που βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου. Έτσι, ένα σύστημα ελάχιστης φάσης ορίζεται μοναδικά από την απόκριση πλάτους του, $|H(e^{j\omega})|$, όπως ήδη γνωρίζουμε, και αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ από την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$. Πώς;



Σχήμα 17.46: Κρουστικές αποκρίσεις των τεσσάρων συστημάτων με ίδια απόκριση πλάτους του Σχήματος 17.45.

Μερική ενέργεια συστημάτων				
	$h_{min}[n]$	$h_1[n]$	$h_2[n]$	$h_3[n]$
$n = 0$	1.00	0.64	0.81	0.51
$n = 1$	3.03	2.34	2.62	2.01
$n = 2$	5.45	4.88	5.16	4.47
$n = 3$	6.99	6.70	6.87	6.51
$n = 4$	7.51	7.51	7.51	7.51

Πίνακας 17.1: Μερική Ενέργεια συστημάτων Σχήματος 17.46.

Έστω ότι έχουμε την απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$. Βρίσκουμε το σύστημα $|H(e^{j\omega})|^2$, που είναι συνάρτηση (μπορεί δηλ. να γραφεί πάντα ως τέτοια) του $\cos(k\omega)$. Μετα, αναλύουμε το $\cos(k\omega)$ με τις σχέσεις του Euler και αντικαθιστούμε με $\frac{1}{2}(z^k + z^{-k})$, λόγω αναλυτικής συνέχειας [19]. Τότε

$$G(z) = H(z)H(z^{-1}) \quad (17.380)$$

Τέλος, το σύστημα ελάχιστης φάσης σχηματίζεται από τους πόλους και τα μηδενικά του $G(z)$ που βρισκονται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο. Ας δούμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Παράδειγμα 17.31:

Βρείτε το σύστημα ελάχιστης φάσης $H(z)$ απόκριση πλάτους στο τετράγωνο ως

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{17}{16} - \frac{1}{2} \cos(\omega) \quad (17.381)$$

Λύση:

Εκφραζουμε το $\cos(\omega)$ ως άθροισμα εκθετικών

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{17}{16} - \frac{1}{4}e^{j\omega} - \frac{1}{4}e^{-j\omega} \quad (17.382)$$

και με αντικατάσταση του $e^{j\omega}$ με z και του $e^{-j\omega}$ με z^{-1} , θα έχουμε

$$G(z) = H(z)H(z^{-1}) = \frac{17}{16} - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-1} = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z\right) \quad (17.383)$$

Έτσι, το σύστημα ελάχιστης φάσης είναι το $H(z) = 1 - \frac{1}{4}z^{-1}$.

17.10 Συστήματα Γραμμικής Φάσης

Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση όταν η απόκριση σε συχνότητά του είναι της μορφής

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\alpha\omega} \quad (17.384)$$

με α πραγματικός αριθμός. Έτσι, καταλαβαίνετε ότι τα συστήματα γραμμικής φάσης έχουν σταθερή καθυστέρηση ομάδας:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\phi(\omega) = -\frac{d}{d\omega}(-\alpha\omega) = \alpha \quad (17.385)$$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι συχνότητες καθυστερούν στην έξοδο κατά τον ίδιο αριθμό δειγμάτων, χωρίς να “ανακατευονται” μεταξύ τους. Αυτή η ιδιότητα μας είναι αρκετά επιθυμητή. Σε πολλές εφαρμογές, μας ενδιαφέρει να μπορούμε να σχεδιάζουμε συστήματα που έχουν την περιφημη *γενικευμένη γραμμική φάση*. Ένα σύστημα έχει γενικευμένη γραμμική φάση αν η απόκριση σε συχνότητά του είναι της μορφής

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)} \quad (17.386)$$

με $A(e^{j\omega})$ μια πραγματική συνάρτηση του ω , και β μια σταθερά. Συχνά, ο όρος *γραμμική φάση* χρησιμοποιείται για να δηλώσει συστήματα που έχουν είτε γραμμική είτε γενικευμένη γραμμική φάση.

Μας ενδιαφέρουν, όπως ξέρετε, ιδιαίτερα τα αιτιατά συστήματα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$. Ας συζητήσουμε για σήματα που έχουν γενικευμένη γραμμική φάση, στην προσπάθειά μας να βρούμε τι ιδιότητες έχουν αυτά. Από την ιδιότητα του μετασχη. Fourier, έχουμε

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0} \quad (17.387)$$

για n_0 ακέραιο, και

$$x[n] \text{ άρτιο} \longleftrightarrow \Re\{X(e^{j\omega})\} \quad (17.388)$$

$$x[n] \text{ περιττό} \longleftrightarrow j\Im\{X(e^{j\omega})\} \quad (17.389)$$

Παρατηρήστε από το τελευταίο ζεύγος ιδιοτήτων ότι τα άρτια ή περιττά συμμετρικά σήματα έχουν μηδενική ή σταθερή φάση. Σύμφωνα με τη Σχέση (17.387), μια μετατόπιση κατά $n_0 \in \mathbb{Z}$ θα προσθέσει μια γραμμική φάση στην υπάρχουσα μηδενική ή σταθερή. Άρα μια ικανή συνθήκη για γραμμική φάση είναι η ύπαρξη μιας συμμετρίας ως προς κάποιο δείγμα n_0 στο χρόνο, όπως για παράδειγμα το σύστημα με κρουστική απόκριση $h[n] = a^{|n-n_0|}$, με $|a| < 1$, που είναι συμμετρικό γύρω από το $n = n_0$. Όμως η αιτιατότητα μας αποκλείει τα συμμετρικά συστήματα άπειρης κρουστικής απόκρισης. Άρα η κρουστική απόκριση $h[n]$ αιτιατών συστημάτων γραμμικής φάσης πρέπει να είναι πεπερασμένης διάρκειας (να είναι δηλαδή FIR σύστημα)¹¹. Αυτό σημαίνει ότι τα συστήματα αυτά δεν έχουν πόλους στο z -επίπεδο, εκτός από τη θέση $z = 0$. Για ένα FIR σύστημα διάρκειας $M + 1$ με πραγματική κρουστική απόκριση $h[n]$, μια ικανή συνθήκη¹² για να έχει αυτό γενικευμένη γραμμική φάση είναι να έχει συμμετρική κρουστική απόκριση $h[n]$, δηλ.

$$h[n] = h[M - n] \quad (17.390)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, $\alpha = M/2$ και $\beta = 0$ ή π . Μια άλλη ικανή συνθήκη είναι το $h[n]$ να είναι αντισυμμετρικό

$$h[n] = -h[M - n] \quad (17.391)$$

και τότε έχουμε $\alpha = M/2$ και $\beta = \pi/2$ ή $3\pi/2$.

Τα συστήματα γραμμικής φάσης μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις κατηγορίες (Τύπους), ανάλογα με το αν η κρουστική τους απόκριση $h[n]$ είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική, και αν το M είναι άρτιο ή περιττό

¹¹Στην εργασία [2] αποδείχθηκε ότι υπάρχουν αιτιατά συστήματα άπειρης κρουστικής απόκρισης με γραμμική φάση, τα οποία όμως δεν έχουν ρητή συνάρτηση μεταφοράς, και ως εκ τούτου δεν περιγράφονται από εξισώσεις διαφορών.

¹²Αλλά όχι και αναγκαία.

(προσέξτε, το $M \Delta EN$ είναι η διάρκεια του σήματος - αυτή είναι $M + 1$). Κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες έχει συγκεκριμένους περιορισμούς όσον αφορά τις θέσεις των μηδενικών (μια και πόλους έχουμε μόνο στο $z = 0$) στη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$, και τα οποία μηδενικά επιβάλλουν περιορισμούς στην απόκριση πλάτους. Ας τα δούμε ένα-ένα, ξεχωριστά¹³.

17.10.1 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης τυπου I έχει συμμετρική χροστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (17.392)$$

και το M είναι άρτιο. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο $a = M/2$, που είναι ακέραιος αριθμός. Η απόκριση σε συχνότητα ενός τυπου I συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega/2} \sum_{k=0}^{M/2} a_k \cos(k\omega) \quad (17.393)$$

με

$$a_k = 2h \left[\frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, M/2 \quad (17.394)$$

$$a_0 = h \left[\frac{M}{2} \right] \quad (17.395)$$

17.10.2 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου II

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης τυπου II έχει συμμετρική χροστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (17.396)$$

και το M είναι περιττό. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο $a = M/2$, που ΔΕΝ είναι ακέραιος αριθμός. Η απόκριση σε συχνότητα ενός τυπου I συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} b_k \cos \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \omega \right) \quad (17.397)$$

με

$$b_k = 2h \left[\frac{M+1}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)/2 \quad (17.398)$$

17.10.3 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου III

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης τυπου III έχει αντισυμμετρική χροστική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (17.399)$$

και το M είναι άρτιο. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο $a = M/2$, που είναι ακέραιος αριθμός. Η απόκριση σε συχνότητα ενός τυπου III συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jM\omega/2} \sum_{k=1}^{M/2} c_k \sin(k\omega) = e^{-j(M\omega/2 - \pi/2)} \sum_{k=1}^{M/2} c_k \sin(k\omega) \quad (17.400)$$

με

$$c_k = 2h \left[\frac{M}{2} - k \right], \quad k = 1, 2, \dots, M/2 \quad (17.401)$$

¹³Για κάθε τυπο συστήματος γραμμικής φάσης, υποθέτουμε ότι έχει πραγματικό $h[n]$ και ότι το $h[0]$ είναι το πρώτο μη μηδενικό δείγμα του $h[n]$

17.10.4 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης τυπου IV έχει αντισυμμετρική χροστική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (17.402)$$

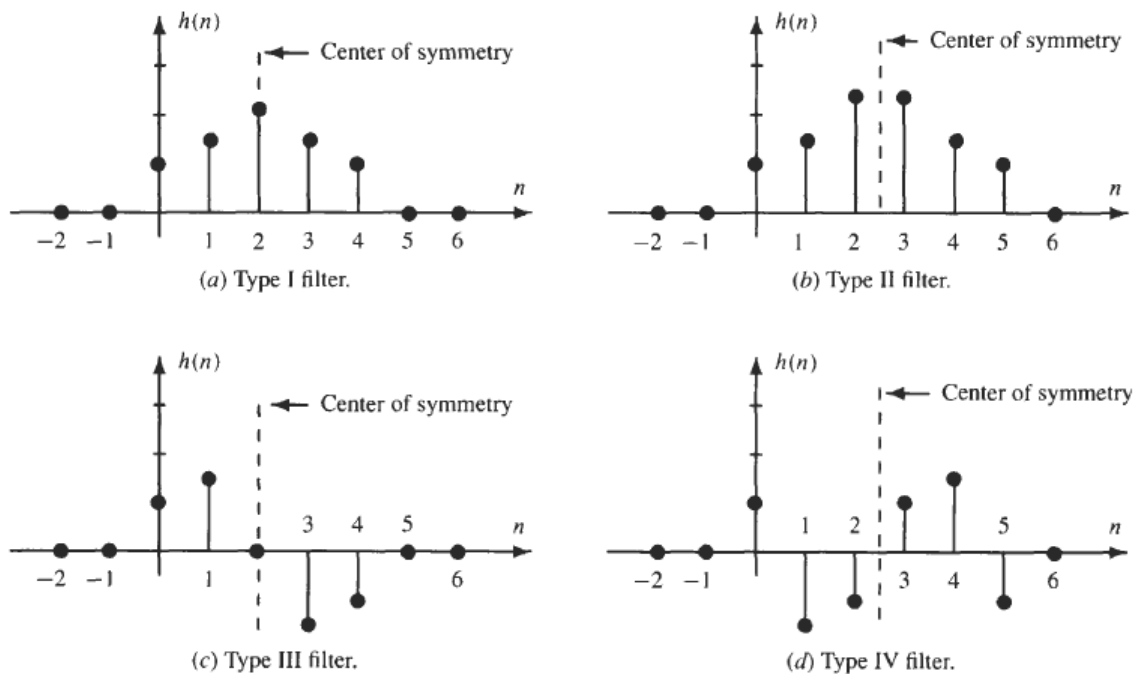
και το M είναι περιττό. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο $a = M/2$, που ΔΕΝ είναι ακέραιος αριθμός. Η απόκριση σε συχνότητα ενός τυπου IV συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jM\omega/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right) = e^{-j(M\omega/2 - \pi/2)} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \quad (17.403)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)/2 \quad (17.404)$$

Συνοπτικά, παραδείγματα των παραπάνω συστημάτων φαίνονται στο Σχήμα 17.47.



Σχήμα 17.47: Τύποι Συστημάτων Γραμμικής Φάσης.

17.10.5 Η φάση στα Συστήματα Τύπου I, II, III, IV

Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι κάθε σύστημα γραμμικής φάσης γράφεται στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} \sum p_k f_k(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} A(e^{j\omega}) \quad (17.405)$$

όπου p_k οι εκάστοτε συντελεστές a_k, b_k, c_k, d_k , και $f_k(e^{j\omega})$ η τριγωνομετρική συνάρτηση του k . Αυτά τα αθροίσματα είναι πραγματικές συναρτήσεις του ω , και τα συμβολίζουμε με $A(e^{j\omega})$, ενώ τα ονομάζουμε “ψευδοπλάτη”.

Η απόκριση φάσης των συστημάτων για $0 \leq \omega \leq \pi$ ορίζεται από το μιγαδικό εκθετικό που βρίσκεται έξω από το άθροισμα, εκτός από την περίπτωση που το ψευδοπλάτος $A(e^{j\omega})$ είναι αρνητικό σε κάποιο διάστημα. Τότε, στη φάση του μιγαδικού εκθετικού προστίθεται μια φάση $\theta = \pi$. Άρα γενικά η απόκριση φάσης των συστημάτων

γραμμικής φάσης για $0 \leq \omega \leq \pi$ δίνεται ως

$$\phi(e^{j\omega}) = \begin{cases} -\omega M/2 & , \text{ για τύπου I, II και για } \omega \text{ όπου } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\omega M/2 + \pi & , \text{ για τύπου I, II και για } \omega \text{ όπου } A(e^{j\omega}) < 0 \\ -\omega M/2 + \pi/2 & , \text{ για τύπου III, IV και για } \omega \text{ όπου } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\omega M/2 + \pi/2 + \pi & , \text{ για τύπου III, IV και για } \omega \text{ όπου } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases} \quad (17.406)$$

17.10.6 Ο μετασχ. Ζ Συστημάτων Γραμμικής Φάσης

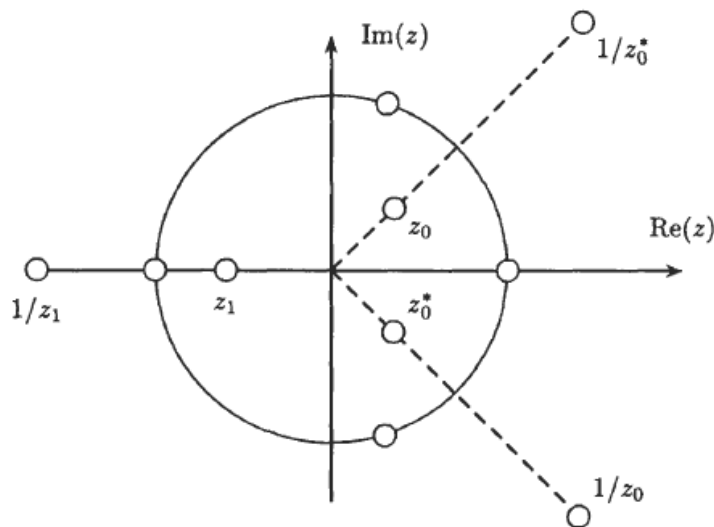
Οι συμμετρίες της χροστικής απόκρισης ενός συστήματος γραμμικής φάσης που είδατε παραπάνω θέτουν κάποιους περιορισμούς στη θέση των μηδενικών στο χώρο του Ζ. Για τα συστήματα Τύπου I ή II, ισχύει

$$h[n] = h[M - n] \longleftrightarrow H(z) = z^{-M} H(z^{-1}) \quad (17.407)$$

Όμοια, για συστήματα Τύπου III ή IV, ισχύει

$$h[n] = -h[M - n] \longleftrightarrow H(z) = -z^{-M} H(z^{-1}) \quad (17.408)$$

Και στις δυο περιπτώσεις, αν το $H(z)$ είναι μηδέν στη θέση $z = z_0$, τότε το $H(z)$ πρέπει να είναι μηδέν και



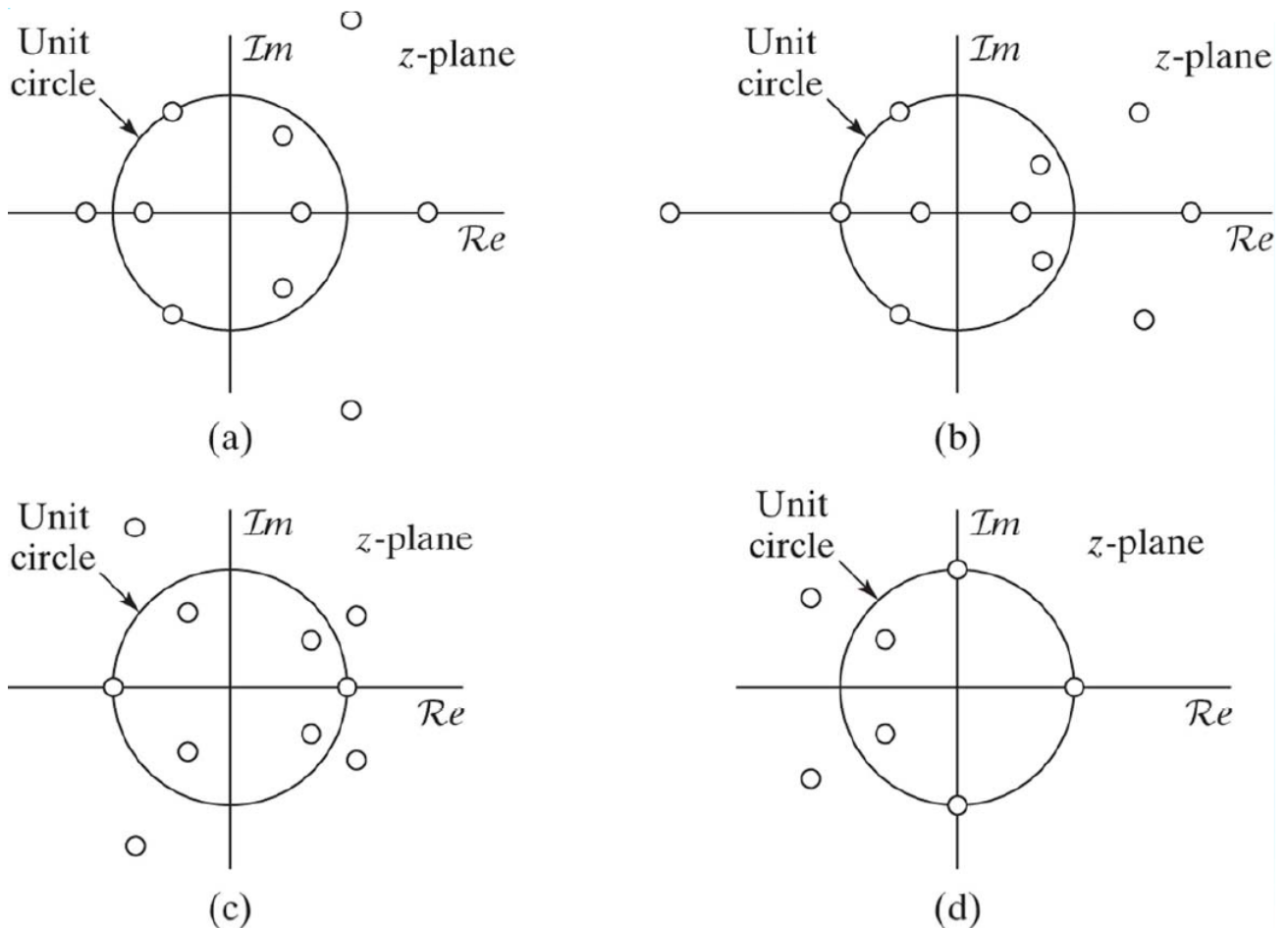
Σχήμα 17.48: Περιορισμοί μηδενικών για συστήματα γραμμικής φάσης.

στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$. Άρα, τα μηδενικά του $H(z)$ έρχονται σε ζεύγη, που το ένα είναι εντός και το άλλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου, σε αμοιβαίες¹⁴ θέσεις. **Αμοιβαίο** ονομάζεται το ζεύγος $(z_0, 1/z_0)$. Επιπλέον, αν το $h[n]$ είναι πραγματικό, τα μιγαδικά μηδενικά έρχονται επίσης σε συζυγή ζεύγη. Έτσι, καταλαβαίνετε ότι έχουμε τους εξής περιορισμούς στις θέσεις των μηδενικών:

1. Το $H(z)$ μπορεί να έχει ένα ή περισσότερα μηδενικά στη θέση $z = \pm 1$. Επιβεβαιώστε το από τις παραπάνω εξισώσεις. Θα επιμείνουμε σε αυτό στη συνέχεια.
2. Το $H(z)$ μπορεί να έχει συζυγή μιγαδικά μηδενικά πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, στις θέσεις $z = e^{\pm j\omega_k}$ ή αμοιβαία μηδενικά στον πραγματικό άξονα, στις θέσεις $z = a$ και $z = 1/a$.
3. Αν το σύστημα είναι πραγματικό, το $H(z)$ μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μηδενικών στις θέσεις $z = r_k e^{\pm j\omega_k}$ και $z = \frac{1}{r_k} e^{\pm j\omega_k}$. Κάθε ζεύγος της ομάδας είναι συζυγές, συζυγές αμοιβαίο, ή αμοιβαίο ζεύγος μηδενικών.

Αυτούς τους περιορισμούς τους βλέπετε στο Σχήμα 17.48. Οι θέσεις $z = 1$ και $z = -1$ αξίζουν ιδιαίτερης μνείας.

¹⁴Όχι συζυγείς αμοιβαίες!



Σχήμα 17.49: Τύποι Συστημάτων Γραμμικής Φάσης: Διαγράμματα πόλων-μηδενικών (a) Τύπου I, (b) Τύπου II, (c) Τύπου III, (d) Τύπου IV.

©Αν υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς στη θέση $z = -1$, για ένα τύπου II σύστημα, θα έχουμε

$$H(-1) = (-1)^M H(-1) \quad (17.409)$$

Επειδή το M είναι περιττό, συνεπάγεται ότι

$$H(-1) = -H(-1) \quad (17.410)$$

που ισχύει μόνο αν $H(-1) = 0$. Άρα ένα τύπου II σύστημα πρέπει να έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = -1$. Παρομοίως, αν υπολογίσουμε το $H(z)$ στη θέση $z = -1$ για ένα τύπου III σύστημα γραμμικής φάσης, θα έχουμε

$$H(-1) = -(-1)^M H(-1) \quad (17.411)$$

και επειδή το M είναι άρτιο, πρέπει να υπάρχει ένα μηδενικό στη θέση $z = -1$. Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς υπολογισμένη στη θέση $z = -1$ είναι ίση με την απόκριση σε συχνότητα για $\omega = \pi$, τότε

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = 0 \quad (17.412)$$

για τύπου II και III συστήματα γραμμικής φάσης.

Για τύπου III και IV συστήματα, αν κάνουμε το ίδιο για τη θέση $z = 1$, βρίσκουμε ότι

$$H(1) = -H(1) \quad (17.413)$$

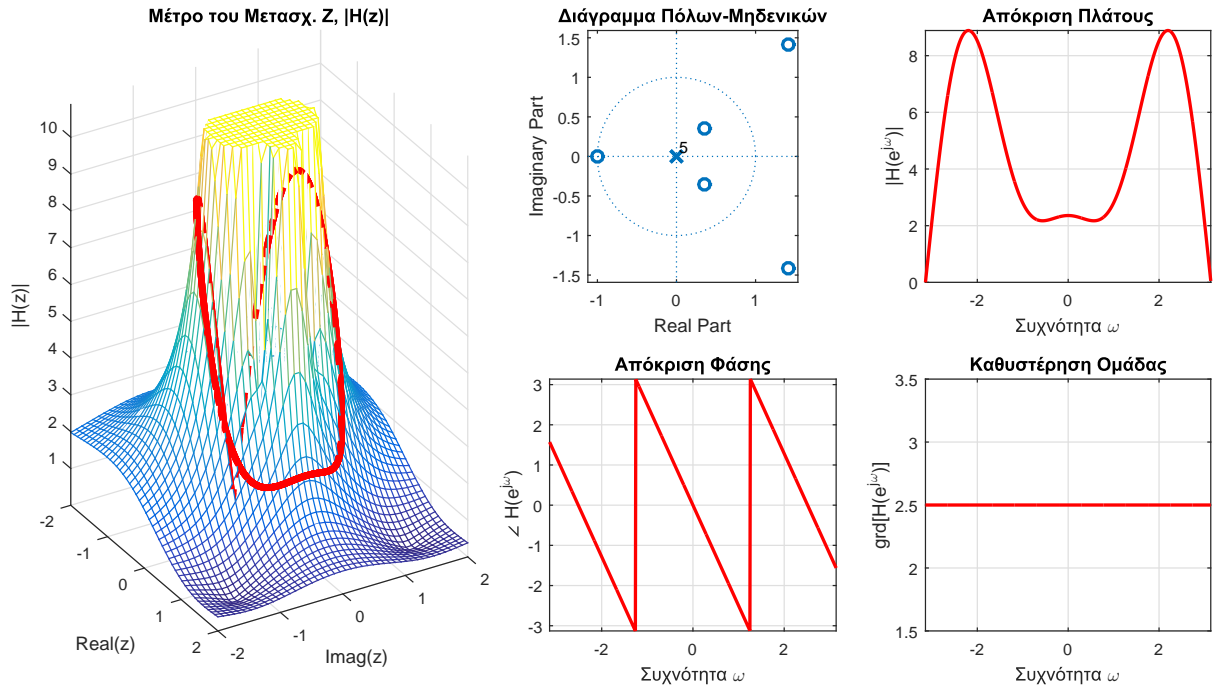
το οποίο ισχύει μόνον αν $H(z) = 0$ για $z = 1$. Άρα, τύπου III και IV συστήματα γραμμικής φάσης πρέπει να έχουν ένα μηδενικό στη θέση $z = 1$, άρα

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (17.414)$$

για τύπου III και IV συστήματα γραμμικής φάσης.

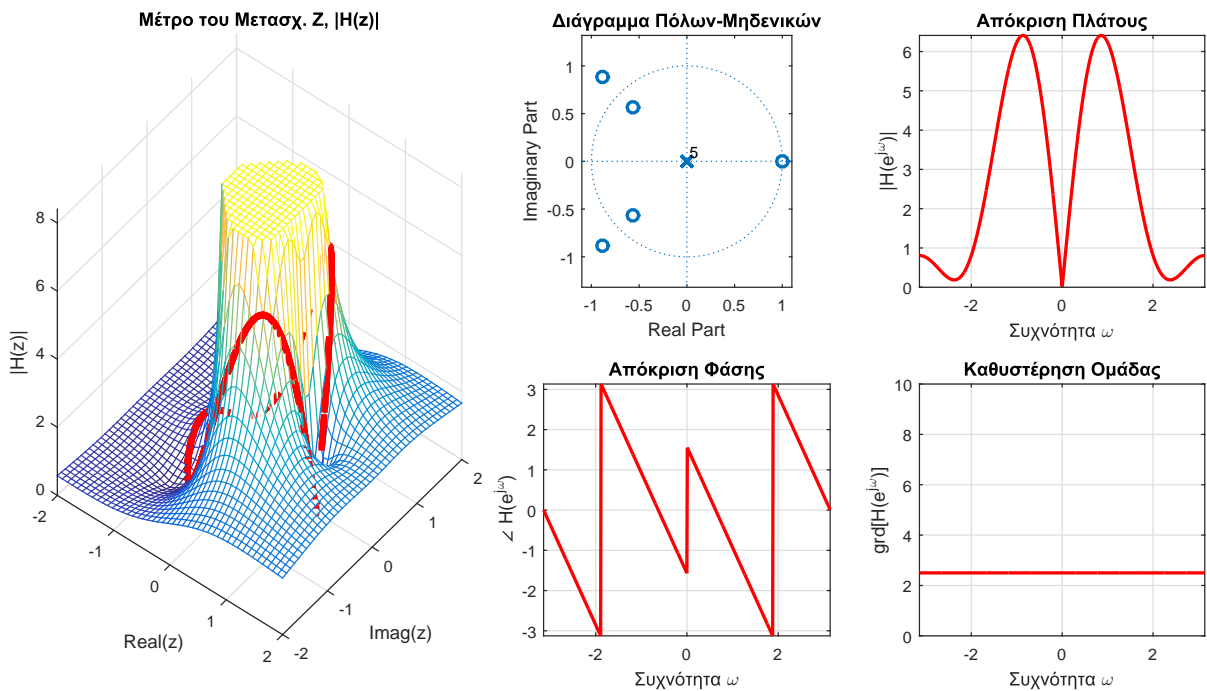
Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο Σχήμα 17.49, όπου φαίνονται οι τέσσερις τύποι συστημάτων γραμμικής φάσης, και οι θέσεις των μηδενικών τους.

Ένα παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης τύπου II φαίνεται στο Σχήμα 17.50. Ένα παράδειγμα συστή-



Σχήμα 17.50: Παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης Τύπου II.

ματος γραμμικής φάσης τύπου IV φαίνεται στο Σχήμα 17.51. Παρατηρήστε τις αποχρίσεις πλάτους και φάσης, καθώς και την καθυστέρηση ομάδας και στα δυο συστήματα.



Σχήμα 17.51: Παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης Τύπου IV.

17.10.7 Σχέση Συστημάτων Γραμμικής Φάσης με Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

Η προηγούμενη κουβέντα κατέδειξε ότι όλα τα FIR συστήματα γραμμικής φάσης με πραγματική κρουστική απόκριση έχουν μηδενικά είτε επάνω στο μοναδιαίο κύκλο είτε σε συζυγή αμοιβαίες θέσεις. Έτσι, μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι οποιοδήποτε FIR σύστημα γραμμικής φάσης, $H_{lin}(z)$, μπορεί να γραφεί ως παράγοντας τριών όρων,

- ενός όρου ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$
- ενός όρου μέγιστης φάσης¹⁵, $H_{max}(z)$
- ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, $H_{uc}(z)$

δηλ.

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z)H_{uc}(z)H_{max}(z) \quad (17.415)$$

όπου

$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1})z^{-M_i} \quad (17.416)$$

όπου M_i είναι ο αριθμός των μηδενικών του $H_{min}(z)$. Στη Σχέση (17.415), το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει όλα τα M_i μηδενικά του μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, και το $H_{uc}(z)$ έχει όλα τα M_o μηδενικά του επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Το σύστημα μέγιστης φάσης, $H_{max}(z)$, έχει όλα τα M_i μηδενικά του εκτός μοναδιαίου κύκλου. Από τη Σχέση (17.416), καταλαβαίνουμε ότι τα μηδενικά του συστήματος μέγιστης φάσης είναι τα αμοιβαία των M_i μηδενικών του συστήματος ελάχιστης φάσης, $H_{min}(z)$. Έτσι, η τάξη του συστήματος $H_{lin}(z)$ είναι $2M_i + M_o$.

Πιο γενικά, η παραπάνω Σχέση (17.415) μπορεί να γραφεί ως

$$H_{lin}(z) = \prod_{k=1}^{M_i/2} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o/2} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_i/2} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*) \quad (17.417)$$

με $|c_k| < 1$. Άρα το $H_{max}(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{M_i/2} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*) \quad (17.418)$$

$$= \prod_{k=1}^{M_i/2} z^{-2} (1 - c_k z)(1 - c_k^* z) \quad (17.419)$$

$$= z^{-M_i} \prod_{k=1}^{M_i/2} (1 - c_k z)(1 - c_k^* z) \quad (17.420)$$

$$= z^{-M_i} H_{min}(z^{-1}) \quad (17.421)$$

Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 13.24:

Έστω το αιτιατό και ευσταθές ΓΧΑ σύστημα

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1})}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})} \quad (17.422)$$

Γράψτε το σε μορφή

$$H(z) = H_{min}(z)H_{lin}(z) \quad (17.423)$$

Λύση:

Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $z = \pm 0.8$, $z = 0$ ενώ τα μηδενικά στις θέσεις $z = 0.5$, $z = \pm 2j$. Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει τους τρεις πόλους που βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, καθώς και το μηδενικό στη θέση $z = -0.5$. Το σύστημα γραμμικής φάσης θα έχει τα μηδενικά στις θέσεις $z = \pm 2j$. Υποχρεωτικά όμως, θα έχει μηδενικά και στις θέσεις $z = \pm j/2$, καθώς και 4 πόλους στη θέση $z = 0$. Άρα το σύστημα ελάχιστης

¹⁵Ένα σύστημα μέγιστης φάσης έχει τους πόλους εντός μοναδιαίου κύκλου, αλλά όλα τα μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

φάσης θα έχει υποχρεωτικά δυο πόλους στις θέσεις $z = \pm j/2$ για να ακυρώσει την επιρροή των δυο μηδενικών στις θέσεις $z = \pm j/2$ του συστήματος γραμμικής φάσης. Επίσης, θα έχει και τρία μηδενικά στη θέση $z = 0$, ώστε να ακυρώνει την επιρροή των τριών πόλων του συστήματος γραμμικής φάσης. Άρα εν τέλει

$$H_{min}(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 0.8z^{-1})(1 + \frac{j}{2}z^{-1})(1 - \frac{j}{2}z^{-1})} \quad (17.424)$$

και

$$H_{lin}(z) = (1 + \frac{j}{2}z^{-1})(1 - \frac{j}{2}z^{-1})(1 + 2jz^{-1})(1 - 2jz^{-1}) \quad (17.425)$$

Παράδειγμα 13.25:

Έστω το σύστημα ελάχιστης φάσης, που είδαμε νωρίτερα,

$$H_{min}(z) = (1.25)^2(1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \times \quad (17.426)$$

$$\times (1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1}) \quad (17.427)$$

Παραγοντοποιήστε το σε ένα σύστημα γραμμικής και κι ένα σύστημα μέγιστης φάσης.

Λύση:

Άρα το σύστημα μέγιστης φάσης που θα μας δώσει ένα σύστημα γραμμικής φάσης κατά την παραγοντοποίηση βρίσκεται από

$$H_{max}(z) = z^{-4}H_{min}(z^{-1}) \quad (17.428)$$

$$= z^{-4}(1.25)^2(e^{j0.8\pi}e^{-j0.8\pi})(1 - 0.9e^{j0.6\pi}z)(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z) \times \quad (17.429)$$

$$\times (1 - 0.8e^{j0.8\pi}z)(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z) \quad (17.430)$$

$$= (1.25)^2(e^{j0.8\pi}e^{-j0.8\pi})(z^{-1} - 0.9e^{j0.6\pi})(z^{-1} - 0.9e^{-j0.6\pi}) \times \quad (17.431)$$

$$\times (z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi}) \quad (17.432)$$

$$= (z^{-1} - 0.9e^{j0.6\pi})(z^{-1} - 0.9e^{-j0.6\pi})(1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1} - 1)(1.25e^{j0.8\pi}z^{-1} - 1) \quad (17.433)$$

$$= (z^{-1} - 0.9e^{j0.6\pi})(z^{-1} - 0.9e^{-j0.6\pi})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1}) \quad (17.434)$$

$$= (0.9)^2(1 - 1.11e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.11e^{j0.6\pi}z^{-1}) \times \quad (17.435)$$

$$\times (1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1}) \quad (17.436)$$

Οπότε το ένα σύστημα γραμμικής φάσης με παράγοντες τα παραπάνω συστήματα γράφεται ως

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z)H_{max}(z) \quad (17.437)$$

$$= (1.25)^2(1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \times \quad (17.438)$$

$$\times (1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1}) \times \quad (17.439)$$

$$\times (1 - 1.11e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.11e^{j0.6\pi}z^{-1}) \times \quad (17.440)$$

$$\times (1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1}) \times \quad (17.441)$$

$$(17.442)$$

Τα χαρακτηριστικά του συστήματος γραμμικής φάσης που προκύπτει φαίνονται στο Σχήμα 17.52.

Άρα

$$H_{lin}(e^{j\omega}) = H_{min}(e^{j\omega})H_{max}(e^{j\omega}) \quad (17.443)$$

και

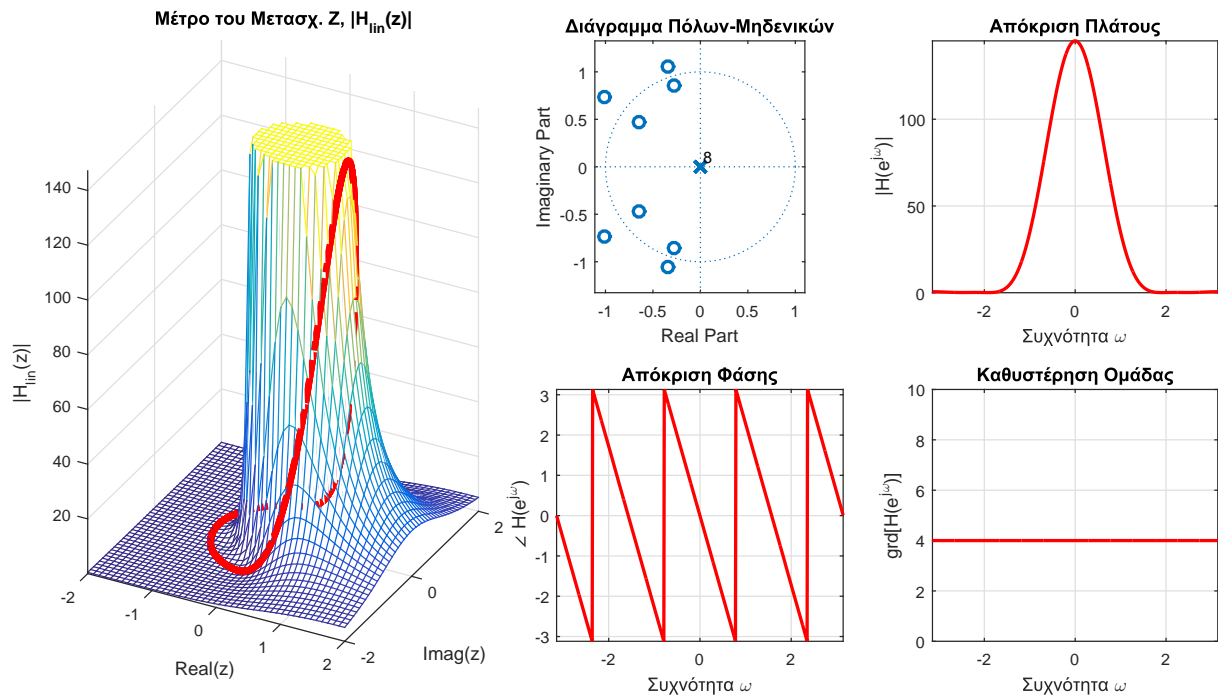
$$|H_{lin}(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})||H_{max}(e^{j\omega})| = 2|H_{min}(e^{j\omega})| \quad (17.444)$$

Επίσης,

$$\angle H_{lin}(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{max}(e^{j\omega}) \quad (17.445)$$

και λόγω της Σχέσης (17.416), έχουμε

$$\angle H_{max}(e^{j\omega}) = -4\omega - \angle H_{min}(e^{j\omega}) \quad (17.446)$$



Σχήμα 17.52: Σύστημα Γραμμικής Φάσης που προκύπτει από παραγοντοποίηση ενός συστήματος ελαχίστης και ενός μέγιστης φάσης.

και άρα

$$\angle H_{lin}(e^{j\omega}) = -4\omega \tag{17.447}$$

Τέλος, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι

$$\text{grd}[H_{lin}(e^{j\omega})] = 4 \tag{17.448}$$

