Κεφάλαιο 13

Ανάλυση Σημάτων και Συστημάτων στο Πεδίο του Διακριτού Χρόνου

13.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα συζητήσουμε για το πως μπορούμε να μελετάμε συστήματα στο πεδίο του διακριτού χρόνου. Η ανάλυσή μας θα ακολουθήσει την ίδια φιλοσοφία με αυτή του συνεχούς χρόνου.

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο κάποια εισαγωγικά στοιχεία για τα σήματα και τα συστήματα διακριτού χρόνου. Στο εξής, θα θεωρούμε ότι ένα σύστημα περιγράφεται στο πεδίο του χρόνου από μια γραμμική **εξίσωση διαφορών** (και όχι διαφορική εξίσωση!) της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \tag{13.1}$$

με a_k, b_k σταθερές.

13.2 Μια μικρή εφαρμογή-κίνητρο

Ας υποθέσουμε ότι λαμβάνετε μια φωτογραφία με την (ασπρόμαυρη, χάριν ευκολίας ☺) φωτογραφική σας μηχανή, όπως στο Σχήμα 13.1. Η ψηφιακή ασπρόμαυρη φωτογραφία δεν είναι τίποτε άλλο από μια διδιάστατη διάταξη από ακέραιες τιμές στο διάστημα $[0, 255]$ (8 bits). Κάθε τέτοια τιμή αποτελεί ένα pixel της εικόνας. Η συγκεκριμένη εικόνα είναι μεγέθους 512 x 512 pixels. Όπως μπορείτε να διαπιστώσετε, κάποιο πρόβλημα κατά τη λήψη οδήγησε σε διαταραχή της εικόνας. Η διαταραχή αυτή έχει τη μορφή μαύρων και λευκών pixels και ονομάζεται - για προφανείς λόγους - ως *θόρυβος αλατιού και πιπεριού (salt and pepper noise)*. Ένα pixel-αλάτι έχει τιμή 255 ενώ ένα pixel-πιπέρι έχει την τιμή 0.

Το πρόβλημα-ερώτημα που τίθεται είναι αν και πώς θα μπορούσαμε να ανακτήσουμε τη φωτογραφία μας; Υπάρχει κάποιο σύστημα που να μπορεί να αφαιρέσει το θόρυβο; Αν σκεφτείτε την εικόνα ως μια ''συλλογή'' από μονοδιάστατα σήματα (κάθε γραμμή της εικόνας είναι ένα σήμα διακριτού χρόνου με 512 δείγματα), τότε μπορούμε να επεξεργαστούμε κάθε τέτοιο σήμα ξεχωριστά. Μια πολύ απλή ιδέα θα ήταν να σκεφτούμε το θόρυβο αλατιού και πιπεριού ως απότομες μεταβολές στην, εν γένει, ομαλή ακολουθία τιμών κατά ''μήκος '' του μονοδιάστατου σήματος. Έτσι, ένα φίλτρο ''εξομάλυνσης '' θα ήταν κατάλληλο για την περίσταση. Το περίφημο *κυλιόμενο φίλτρο μέσης τιμής - moving average filter* είναι ένα σύστημα που μπορεί να ''απαλύνει'' τις απότομες μεταβολές που οφείλονται στο θόρυβο, και μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=-M/2}^{M/2} x[n-k] \tag{13.2}$$

Φυσικά ένα τέτοιο σύστημα δε λαμβάνει υπ΄ όψη του τη διδιάστατη μορφή της εισόδου, μια και στο σύγγραμμα αυτό δεν αντιμετωπίζουμε διδιάστατα σήματα. Αν εφαρμόσουμε λοιπόν το παραπάνω σύστημα θεωρώντας ως είσοδο διαδοχικά τις γραμμές και τις στήλες του, θα πάρουμε το αποτέλεσμα του Σχήματος 13.2. Παρατηρήστε ότι ο θόρυβος είναι λιγότερος απ΄ ό,τι πρίν, αλλά η φωτογραφία σας έχει ''θολώσει'', δηλ. η ευκρίνειά της έχει χαθεί. Προφανώς το σύστημα της Σχέσης (13.2) δεν είναι το πιο πετυχημένο για το σκοπό που θέλουμε αλλά είναι ένα

Σχήμα 13.1: Φωτογραφία με θόρυβο αλατιού και πιπεριού.

Σχήμα 13.2: Φωτογραφία ως έξοδος από το σύστημα (13.2) εφαρμοζόμενο σε γραμμές και στήλες.

καλό παράδειγμα ενός πραγματικού συστήματος για μια πραγματική εφαρμογή!

Ένα πιο δημοφιλές (και ικανότερο) σύστημα αφαίρεσης θορύβου αλατιού και πιπεριού είναι το περίφημο σύστημα *αναδρομικής μεσαίας τιμής* - *recursive median filter*, και περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = \text{median}(y[n-N], y[n-N+1], \cdots, y[n-1], x[n], x[n+1], \cdots, x[n+N-1], x[n+N]), \quad N \in \mathrm{N} \quad (13.3)$$

όπου η συνάρτηση median διατάσσει τα ορίσματά της σε αύξουσα σειρά τιμών και επιλέγει ως έξοδο τη μεσαία τιμή σε αυτή τη διάταξη. Το παραπάνω σύστημα *δεν* είναι γραμμικό, όπως επίσης δεν είναι και αιτιατό (απαιτεί μελλοντικές τιμές της εισόδου). Παρατηρήστε επίσης ότι απαιτεί κάποιες αρχικές τιμές της εξόδου, όπως η $y[n-N]$. Αυτό σημαίνει ότι για να εφαρμόσουμε το σύστημα στο pixel στη θέση $n=0$, στην πρώτη γραμμή της εικόνας, χρειαζόμαστε τις τιμές $y[-N], y[-N+1], \cdots, y[-1]$, οι οποίες αποτελούν *αρχικές συνθήκες* του συστήματος.

Πριν είμαστε σε θέση να εφαρμόζουμε τέτοια συστήματα πρέπει να είμαστε σε θέση να μπορούμε να προβλέψουμε την έξοδό τους σε απλούστερα, θεωρητικά, αλλά πολύ χρήσιμα (όπως θα δούμε) σήματα. Προς αυτήν την κατεύθυνση λοιπόν θα κινηθούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου.

13.3 Αποκρίσεις Μηδενικής Κατάστασης και Μηδενικής Εισόδου

Ένας εύκολος τρόπος για να υπολογίζουμε την έξοδο από τέτοια συστήματα, δεδομένης μιας συγκεκριμένης εισόδου, είναι η διάσπαση της εξόδου στην **απόκριση μηδενικής κατάστασης** και στην **απόκριση μηδενικής εισόδου**. Έστω ότι εφαρμόζουμε λοιπόν μια είσοδο $x[n]$ τη χρονική στιγμή $n=0$. Η έξοδος του συστήματος είναι το αποτέλεσμα δυο ανεξάρτητων αιτιών:

1. των *αρχικών συνθηκών* του συστήματος, οι οποίες ονομάζονται *κατάσταση του συστήματος*, τη χρονική στιγμή $n=0$
2. της εισόδου $x[n]$, για $n \geq 0$

Η έξοδος του συστήματος που απορρέει από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος για $n=0$, θεωρώντας την είσοδο $x[n]=0$, ονομάζεται **απόκριση μηδενικής εισόδου - zero-input response**. Η έξοδος του συστήματος που απορρέει από την παρουσία της μη μηδενικής εισόδου $x[n]$, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες, ονομάζεται **απόκριση μηδενικής κατάστασης - zero-state response**. Όταν το σύστημα έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες, τότε το σύστημα θεωρείται πως βρίσκεται **σε ηρεμία**. Μπορούμε να εκφράσουμε την ολική έξοδο $y[n]$ του συστήματος ως το άθροισμα των παραπάνω δυο αποκρίσεων ως

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] \quad (13.4)$$

με $y_{zi}[n]$ και $y_{zs}[n]$ την απόκριση μηδενικής εισόδου και την απόκριση μηδενικής κατάστασης αντίστοιχα.

Όπως στα συστήματα συνεχούς χρόνου, θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς ποιός είναι λόγος ύπαρξης αρχικών συνθηκών σε ένα *πραγματικό* σύστημα. Όπως και στα συστήματα συνεχούς χρόνου, από μαθηματικής πλευράς, οι αρχικές συνθήκες είναι απαραίτητες για την εύρεση μοναδικής λύσης μιας εξίσωσης διαφορών. Όμως ποιά είναι η φυσική σημασία των αρχικών συνθηκών; Σε τι αντιστοιχούν σε πραγματικά συστήματα; Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε το σύστημα

$$y[n] = y[n-1] - x[n-1]x[n+1] \tag{13.5}$$

Το σύστημα αυτό είναι μη γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, αλλά και μη αιτιατό, γιατί η χρονική στιγμή n της εξόδου χρειάζεται τη χρονική στιγμή $n+1$ της εισόδου. Για την εφαρμογή του τη χρονική στιγμή $n=0$, χρειαζόμαστε την αρχική τιμή $y[-1]$, καθώς και την τιμή $x[-1]$, οι οποίες μπορούν να πάρουν οποιεσδήποτε τιμές. Η τιμή $y[-1]$ αποτελεί *αρχική συνθήκη* του συστήματος, και πρέπει να είναι αποθηκευμένη στη μνήμη (σε κάποιον καταχωρητή ή σε αποθηκευτικό χώρο). Ένα δεύτερο παράδειγμα, πιο οικείο στην επιστήμη Η/Υ, αποτελεί το σύστημα που υλοποιεί την *ακολουθία Fibonacci*:

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] \tag{13.6}$$

Παρατηρήστε ότι για την εύρεση του όρου $y[0]$ απαιτούνται οι τιμές $y[-1], y[-2]$, οι οποιες για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχουν μηδενική και μοναδιαία τιμή αντίστοιχα, και αποτελούν τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Ας μελετήσουμε αναλυτικά την έξοδο ενός συστήματος στις επιμέρους συνιστώσες των αρχικών συνθηκών και της εισόδου ξεχωριστά.

13.4 Απόκριση Μηδενικής Εισόδου

Όπως αναφέραμε ήδη, η απόκριση μηδενικής εισόδου ορίζεται ως η έξοδος ενός συστήματος όταν η είσοδος είναι μηδενική, άρα και η έξοδος καθορίζεται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος.

Αν και στη συνέχεια δε θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα η απόκριση μηδενικής εισόδου, καθώς θα θεωρούμε τα συστήματά μας *σε αρχική ηρεμία*[1], είναι ενδιαφέρον να δει κανείς τη μορφή και τον τρόπο υπολογισμού της απόκρισης μηδενικής εισόδου. Η μηδενική είσοδος μετατρέπει τη Σχέση (13.1) στην ακόλουθη

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{zi}[n-k] = 0 \tag{13.7}$$

Μπορεί κανείς να δείξει αναλυτικά ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\gamma^n \tag{13.8}$$

με $\gamma, c \neq 0$ σταθερές. Έχοντας αυτό ως δεδομένο, αντικαθιστούμε στη Σχέση (13.7) και έχουμε

$$\sum_{k=0}^{N} a_k c\gamma^{(n-k)} = 0 \tag{13.9}$$

$$c\gamma^n \sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0 \tag{13.10}$$

Η μη τετριμμένη λύση της παραπάνω σχέσης δίνεται για

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \gamma^{-k} = 0 \Longleftrightarrow a_N\gamma^{-N} + a_{N-1}\gamma^{-N+1} + \cdots + a_1\gamma^{-1} + a_0 = 0 \tag{13.11}$$

το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$a_N\gamma^{-N} + a_{N-1}\gamma^{-N+1} + \cdots + a_1\gamma^{-1} + a_0 = 0 \Longleftrightarrow \gamma^{-N}\big(a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N\big) = 0 \tag{13.12}$$

[1] Δηλ. με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Άρα η $y_{zi}[n] = c\gamma^n$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης της Σχέσης (13.7) μόνον αν

$$a_N + a_{N-1}\gamma + \cdots + a_1\gamma^{N-1} + a_0\gamma^N = 0 \tag{13.13}$$

Η παραπάνω ομογενής εξίσωση ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του συστήματος, και το αντίστοιχο πολυώνυμο ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του συστήματος. Το τελευταίο μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\cdots(\gamma - \gamma_N) = 0 \tag{13.14}$$

με γ_i, $i = 1, \cdots, N$, τις ρίζες του πολυωνύμου, οι οποίες ονομάζονται **χαρακτηριστικές ρίζες** ή **φυσικές συχνότητες** του συστήματος. Άρα υπάρχουν N το πλήθος διαφορετικά γ που ικανοποιούν την (13.7):

$$c_1\gamma_1^n,\ c_2\gamma_2^n, \cdots, c_N\gamma_N^n \tag{13.15}$$

με c_i, $i = 1, \cdots, N$, σταθερές. Ο προσδιορισμός αυτών των σταθερών εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Άρα τελικά μπορεί να δειχθεί ότι

$$y_{zi}[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + \cdots, c_N\gamma_N^n = \sum_{k=1}^{N} c_k\gamma_k^n \tag{13.16}$$

για $n \geq 0$. Αν χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας βηματική συνάρτηση, μπορούμε να γράψουμε την απόκριση μηδενικής εισόδου ως

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k\gamma_k^n u[n] \tag{13.17}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει αν οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι διακριτές μεταξύ τους. Αν υπάρχουν ρίζες πολλαπλότητας $r \geq 2$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως

$$(\gamma - \gamma_1)^r(\gamma - \gamma_{r+1})\cdots(\gamma - \gamma_N) \tag{13.18}$$

και μπορεί να δειχθεί ότι η απόκριση μηδενικής εξόδου δίνεται από τη σχέση

$$y_{zi}[n] = (c_1 + c_2 n + \cdots + c_r n^{r-1})\gamma_1^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \cdots + c_N\gamma_N^n \tag{13.19}$$

για $n \geq 0$, και ξανά με χρήση της βηματικής συνάρτησης, έχουμε

$$y_{zi}[n] = \Big((c_1 + c_2 n + \cdots + c_r n^{r-1})\gamma_1^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \cdots + c_N\gamma_N^n\Big)u[n] \tag{13.20}$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{r} c_i n^{i-1}\gamma_i^n + \sum_{k=r+1}^{N} c_k\gamma_k^n\Big)u[n] \tag{13.21}$$

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα 13.1:

Βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

(α΄) $y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n]$ με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 0$ και $y[-1] = 1$

(β΄) $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = x[n] + 3x[n-1]$ με αρχικές συνθήκες $y[-1] = 2$ και $y[-2] = -1$

(γ΄) $y[n] + \frac{7}{12}y[n-1] + \frac{1}{12}y[n-2] = 2x[n]$ με αρχικές συνθήκες $y[-2] = 1$ και $y[-1] = 0$

Λύση:

(α΄) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6 \tag{13.22}$$

και η ομογενής εξίσωση είναι η

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6 = (\gamma + 2)(\gamma + 3) = 0 \tag{13.23}$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι οι $\gamma = -2, \gamma = -3$, και άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n \tag{13.24}$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες. Έχουμε

$$y_{zi}[-2] = \Big(c_1(-2)^n + c_2(-3)^n\Big)\Big|_{n=-2} = c_1\frac{1}{4} + c_2\frac{1}{9} = 0 \tag{13.25}$$

$$y_{zi}[-1] = \Big(c_1(-2)^n + c_2(-3)^n\Big)\Big|_{n=-1} = -c_1\frac{1}{2} - c_2\frac{1}{3} = 1 \tag{13.26}$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει λύσεις

$$c_1 = -4, \quad c_2 = 9 \tag{13.27}$$

Άρα τελική η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = -4(-2)^n + 9(-3)^n \tag{13.28}$$

για $n \geq 0$, ή πιο συνοπτικά, ως

$$y_{zi}[n] = (-4(-2)^n + 9(-3)^n)u[n] = (-(-2)^{n+2} + (-3)^{n+2})u[n] \tag{13.29}$$

(β′) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\gamma^2 + 2\gamma + 1 \tag{13.30}$$

και η ομογενής εξίσωση είναι η

$$\gamma^2 + 2\gamma + 1 = (\gamma + 1)^2 = 0 \tag{13.31}$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι οι $\gamma = -1, \gamma = -1$, δηλ. η ρίζα είναι πολλαπλότητας $r = 2$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = (c_1 + c_2 n)(-1)^n \tag{13.32}$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες, δηλ.

$$y_{zi}[-1] = \Big((c_1 + c_2 n)(-1)^n\Big)\Big|_{n=-1} = -c_1 + c_2 = 2 \tag{13.33}$$

$$y_{zi}[-2] = \Big((c_1 + c_2 n)(-1)^n\Big)\Big|_{n=-2} = c_1 - 2c_2 = -1 \tag{13.34}$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει τελικά

$$c_1 = -3, \quad c_2 = -1 \tag{13.35}$$

Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = (-3 - n)(-1)^n u[n] \tag{13.36}$$

(γ′) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} \tag{13.37}$$

και η ομογενής εξίσωση είναι η

$$\gamma^2 + \frac{7}{12}\gamma + \frac{1}{12} = \Big(\gamma + \frac{1}{3}\Big)\Big(\gamma + \frac{1}{4}\Big) = 0 \tag{13.38}$$

Οι χαρακτηριστικές ρίζες του συστήματος είναι οι $\gamma = -1/3, \gamma = -1/4$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = c_1\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n + c_2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n \tag{13.39}$$

Οι σταθερές c_1, c_2 θα βρεθούν από τις αρχικές συνθήκες, δηλ.

$$y_{zi}[-1] = \Big(c_1\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n + c_2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big)\Big]_{n=-1} = -4c_1 - 3c_2 = 0 \tag{13.40}$$

$$y_{zi}[-2] = \Big(c_1\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n + c_2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big)\Big]_{n=-2} = 16c_1 + 9c_2 = 1 \tag{13.41}$$

Το παραπάνω σύστημα δίνει τελικά

$$c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{3} \tag{13.42}$$

Οπότε η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται ως

$$y_{zi}[n] = \Big(\frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{4}\Big)^n - \frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big)u[n] \tag{13.43}$$

■

Παρατηρήσεις

1. Παρατηρήστε ότι ο υπολογισμός της απόκρισης μηδενικής εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά από τις αρχικές συνθήκες. Πουθενά στην ανάλυσή μας δε χρειαστήκαμε την οποιαδήποτε είσοδο $x[n]$, καθώς τη θεωρήσαμε μηδενική. Η γνώση της εισόδου $x[n]$ δε μας λέει τίποτα για την απόκριση μηδενικής εισόδου, αλλά ούτε και οι αρχικές συνθήκες μας πληροφορούν για τη μορφή της απόκρισης μηδενικής κατάστασης. Οι δυο αποκρίσεις είναι εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους.

2. Ο ρόλος των αρχικών συνθηκών, πέρα από τον υπολογισμό της απόκρισης μηδενικής εισόδου, μας παρέχει μοναδική λύση για το σύστημα που περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών.

3. Δείξαμε νωρίτερα ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n] \tag{13.44}$$

για απλές, διακριτές χαρακτηριστικές ρίζες γ_k, τις οποίες θεωρούμε πραγματικές χάριν απλότητας[2]. Παρατηρήστε ότι αν $|\gamma_k| < 1 \ \forall k$, τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου φθίνει προς το μηδέν, όταν $n \to +\infty$, καταλήγοντας σε κατάσταση ηρεμίας. Αν $|\gamma_i| > 0$ για ένα τουλάχιστον i, τότε το σύστημα *δεν* επιστρέφει σε κατάσταση ηρεμίας, διότι

$$c_i \gamma_i^n u[n] \to +\infty \tag{13.45}$$

και άρα το σύστημα δίνει απόκριση μηδενικής εισόδου που απειρίζεται. Σκεφτείτε το: μια οποιαδήποτε είσοδος του συστήματος μπορεί να οδηγήσει το σύστημα να παράξει έξοδο η οποία απειρίζεται όταν $n \to +\infty$!

4. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι η επιστροφή (ή μη) του συστήματος σε κατάσταση ηρεμίας δε γίνεται με οποιονδήποτε τρόπο. Οι Σχέσεις (13.17, 13.21) καθιστούν σαφές ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου έχει συγκεκριμένη μορφή η οποία εξαρτάται από τις χαρακτηριστικές ρίζες.

13.4.1 Η κρουστική απόκριση $h[n]$ ΓΧΑ Συστήματος

Θα θέλαμε να γνωρίζουμε την έξοδο ενός συστήματος όταν παρουσιάζουμε ως είσοδο ένα ‘‘θεμελιώδες ’’ σήμα, το οποίο μπορεί να περιγράψει ένα οποιοδήποτε σήμα. Έχουμε δει ότι ένα τέτοιο σήμα είναι η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$. Η είσοδος αυτή θα διεγείρει το σύστημα, και θα το αναγκάσει να παράξει κάποια έξοδο. Η έξοδος αυτή πρέπει να ‘‘μοιάζει’’ με την απόκριση μηδενικής εισόδου, αφού η ύπαρξή της οφείλεται σε μια είσοδο που υπάρχει μόνο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή ($n = 0$), και μετά χάνεται. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η διέγερση αυτή δημιουργεί νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα, και η λύση της ομογενούς εξίσωσης για αυτές τις αρχικές συνθήκες θα μας δώσει μια τέτοια έξοδο!

Ας ορίσουμε λοιπόν την **κρουστική απόκριση - impulse response**[3] $h[n]$ ενός συστήματος ως την έξοδο του συστήματος όταν στην είσοδο του παρουσιάζεται η συνάρτηση Δέλτα $\delta[n]$, και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες (για $n < 0$). Από τη στιγμή όμως που οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, το σύστημά

[2] Φυσικά οι χαρακτηριστικές ρίζες μπορούν να είναι μιγαδικές!

[3] Σκεφτείτε το: η απόκριση (έξοδος) σε μια κρούση (ακαριαία διέγερση).

μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ)![4] Αν χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του τελεστή $T[\cdot]$ για το σύστημα, θα είναι

$$h[n] = T[\delta[n]] \tag{13.46}$$

ή εναλλακτικά

$$\delta[n] \longrightarrow h[n] \tag{13.47}$$

Εν αντιθέσει με τα συστήματα συνεχούς χρόνου, η εύρεση της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο του χρόνου είναι αρκετά πιο εύκολη και δημοφιλής, λόγω της φύσεως του χρόνου (διακριτός χρόνος). Η συζήτηση που ακολουθεί δείχνει πώς η παρουσία της συνάρτησης Δέλτα ''γεννά'' νέες αρχικές συνθήκες στο σύστημα, τις οποίες και α- ναζήτούμε, ώστε το πρόβλημα να αναχθεί στην εύρεση της ομογενούς λύσης της εξίσωσης διαφορών με αρχικές συνθήκες αυτές που ''γεννιούνται'' από τη συνάρτηση Δέλτα.

Στο εξής, υποθέτουμε ότι η εξίσωση διαφορών που περιγράφει ένα ΓΧΑ σύστημα είναι της γενικής μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \tag{13.48}$$

με $N > M$.

13.4.1.1 ΓΧΑ Σύστημα Εξόδου Πρώτης Τάξης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια απλή εξίσωση διαφορών πρώτου βαθμού με $N = 1$, $M = 0$, και $b_0 = 1$, της μορφής

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = x[n] \tag{13.49}$$

Η κρουστική απόκριση $h[n]$ βρίσκεται θέτοντας $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας ότι

$$y[-1] = 0 \tag{13.50}$$

δηλ. το σύστημα βρίσκεται *σε ηρεμία*. Τότε, η εξίσωση διαφορών γράφεται ως

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] = \delta[n] \tag{13.51}$$

Για $n = 0$, εχουμε

$$a_0 h[0] + a_1 h[-1] = 1 \tag{13.52}$$

και άρα

$$h[0] = \frac{1}{a_0} \tag{13.53}$$

όπου υποθέσαμε ότι

$$h[-1] = y[-1]\Big|_{x[n]=\delta[n]} = 0 \tag{13.54}$$

λόγω αρχικής ηρεμίας και αιτιατότητας. Άρα οι αρχικές συνθήκες που ''γεννά'' η παρουσία της συνάρτησης Δέλτα είναι αυτές των Σχέσεων (13.53, 13.54). Η ομογενής λύση της εξίσωσης διαφορών είναι

$$h[n] = c_1 \gamma^n u[n] \tag{13.55}$$

με γ η χαρακτηριστική ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a_1\gamma + a_0 = 0 \Longleftrightarrow \gamma = -\frac{a_1}{a_0}$, οπότε

$$h[n] = c_1 \Big(-\frac{a_1}{a_0} \Big)^n u[n] \tag{13.56}$$

Η Σχέση (13.56) πρέπει να ικανοποιεί τη Σχέση (13.53), οπότε

$$c_1 = h[0] = \frac{1}{a_0} \tag{13.57}$$

Άρα τελικά η κρουστική απόκριση δίνεται ως

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \Big(-\frac{a_1}{a_0} \Big)^n u[n] \tag{13.58}$$

[4] Δείτε τις Παραγράφους 12.6.2.4 και 12.6.2.5, ενώ στην ακόλουθη Παράγραφο 13.4.3 θα εξηγήσουμε περισσότερα.

13.4.1.2 ΓΧΑ Σύστημα Εξόδου Δευτέρας Τάξης

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η διαφορική εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού με $N = 2$, $M = 0$, και $b_0 = 1$, δηλ.

$$a_2 y[n-2] + a_1 y[n-1] + a_0 y[n] = x[n] \tag{13.59}$$

και θέτοντας $y[n] = h[n]$ και $x[n] = \delta[n]$, έχουμε

$$a_2 h[n-2] + a_1 h[n-1] + a_0 h[n] = \delta[n] \tag{13.60}$$

Υποθέτοντας ξανά συνθήκες αρχικής ηρεμίας, θα έχουμε για $n = 0$ ότι

$$a_2 h[-2] + a_1 h[-1] + a_0 h[0] = \delta[0] = 1 \tag{13.61}$$

$$a_0 h[0] = 1 \tag{13.62}$$

$$h[0] = \frac{1}{a_0} \tag{13.63}$$

η οποία και είναι μια αρχική συνθήκη. Όμοια, για $n = 1$ έχουμε

$$a_2 h[-1] + a_1 h[0] + a_0 h[1] = \delta[1] \tag{13.64}$$

$$a_1 h[0] + a_0 h[1] = 0 \tag{13.65}$$

$$a_1 \frac{1}{a_0} + a_0 h[1] = 0 \tag{13.66}$$

$$\frac{a_1}{a_0} + a_0 h[1] = 0 \tag{13.67}$$

$$h[1] = -\frac{a_1}{a_0^2} \tag{13.68}$$

Η ομογενής λύση της εξίσωσης διαφορών είναι

$$h[n] = (c_1 \gamma_1^n + c_2 \gamma_2^n) u[n] \tag{13.69}$$

με $\gamma_1 \neq \gamma_2$ οι χαρακτηριστικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a_2\gamma^2 + a_1\gamma + a_0 = 0$, οπότε οι σταθερές c_1, c_2 υπολογίζονται ως

$$c_1 = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{a_1 + a_0\gamma_2}{a_0^2} \tag{13.70}$$

$$c_2 = -\frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{a_1 + a_0\gamma_1}{a_0^2} \tag{13.71}$$

Άρα τελικά η κρουστική απόκριση δίνεται ως

$$h[n] = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \left(\frac{a_1 + a_0\gamma_2}{a_0^2} \gamma_1^n - \frac{a_1 + a_0\gamma_1}{a_0^2} \gamma_2^n \right) u[n] \tag{13.72}$$

13.4.1.3 ΓΧΑ Σύστημα Εξόδου N-οστής Τάξης

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, μπορούμε να γενικεύσουμε για εξισώσεις διαφορών $N-$οστού βαθμού, της μορφής

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \tag{13.73}$$

και να εξάγουμε τις νέες αρχικές συνθήκες με τον επαναληπτικό τρόπο που δείξαμε στις περιπτώσεις $N = 1, 2$. Έτσι, η κρουστική απόκριση $h[n]$ ενός τέτοιου συστήματος δίνεται από τη λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k] = 0 \tag{13.74}$$

με τις αρχικές συνθήκες που βρίσκουμε.

13.4.1.4 ΓΧΑ Συστήματα

Παρ' όλα αυτά, η λύση που βρήκαμε είναι αρκετά περιορισμένη γιατί αφορά συστήματα με τάξη εισόδου $M = 0$ με $b_0 = 1$. Πώς θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε για συστήματα όπου $0 < M < N$ και $b_k \neq 1$, $0 \leq k \leq M$; Η απάντηση είναι τελικά πολύ απλή, αφού το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών έχει την ιδιότητα της *γραμμικότητας*, οπότε αν η κρουστική απόκριση στο σύστημα

$$\mathbf{S} \quad : \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n] \tag{13.75}$$

είναι $h[n]$, τότε η κρουστική απόκριση στο σύστημα

$$\mathbf{S_0} \quad : \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = b_0 x[n] \tag{13.76}$$

θα είναι $h_0[n] = b_0 h[n]$. Επίσης, η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$\mathbf{S_K} \quad : \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x_k[n] \tag{13.77}$$

θα είναι

$$h_K[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k h_k[n] \tag{13.78}$$

με $h_k[n]$ τις κρουστικές αποκρίσεις του συστήματος στις εισόδους $x_k[n]$. Στην περίπτωση που

$$x_k[n] = x[n-k] \tag{13.79}$$

τότε μπορεί να δειχθεί ότι η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$\mathbf{S_g} \quad : \quad \sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{13.80}$$

είναι

$$h_g[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k h[n-k] \tag{13.81}$$

με $h[n]$ να είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0 \tag{13.82}$$

με τις αρχικές συνθήκες που βρίσκονται με τον επαναληπτικό τρόπο που δείξαμε.

Με βάση την παραπάνω συζήτηση, ας διατυπώσουμε μερικές ενδιαφέρουσες και πολύ σημαντικές παρατηρήσεις.

<u>Παρατηρήσεις:</u>

1. Υποθέσαμε στη συζήτησή μας ότι οι χαρακτηριστικές ρίζες της διαφορικής εξίσωσης είναι απλές. Στην περίπτωση που δεν είναι, ακολουθούμε τη μέθοδο που περιγράφηκε στην παράγραφο περί εύρεσης της απόκρισης μηδενικής εισόδου. Για παράδειγμα, αν η χαρακτηριστική ρίζα είναι διπλή, η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης θα είναι της μορφής

$$h[n] = \frac{1}{a_0} n \gamma^n u[n] \tag{13.83}$$

2. Η γενικότερη μορφή της κρουστικής απόκρισης για κάθε δυνατή τιμή των M, N είναι η εξής:

$$h_g[n] = \sum_{k=0}^{M-N} \alpha_k \delta[n-k] + f\{\gamma_k^n, n^r\gamma_k^n\} \tag{13.84}$$

   με α_k σταθερούς συντελεστές και $f\{\gamma_k^n, n^r\gamma_k^n\}$ ξανά μια συνάρτηση που περιλαμβάνει όρους της ομογενούς λύσης, όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Θα δούμε ένα απλό παράδειγμα τέτοιας μορφής.

3. Εν γένει, υπάρχουν αρκετές διαφορετικές μέθοδοι εύρεσης της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος, τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας, που θα συζητηθεί αργότερα. Για την εύρεση της κρουστικής απόκρισης στη συνέχεια του βιβλίου, θα βασιστούμε περισσότερο στις μεθόδους της συχνότητας, καθώς είναι αρκετά απλούστερες για οσοδήποτε μεγάλη τάξη εξίσωσης διαφορών.

13.4.2 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Έχοντας ολοκληρώσει τη συζήτηση για την απόκριση μηδενικής εισόδου και την κρουστική απόκριση, ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.2:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] \tag{13.85}$$

Λύση:
Στην περίπτωση αυτή έχουμε $M < N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από απλούς όρους. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = \delta[n] \tag{13.86}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$h[n] + \frac{5}{6}h[n-1] + \frac{1}{6}h[n-2] = 0 \tag{13.87}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης διαφορών είναι

$$\gamma^2 + \frac{5}{6}\gamma + \frac{1}{6} = 0 \tag{13.88}$$

το οποίο γράφεται ως

$$\Big(\gamma + \frac{1}{3}\Big)\Big(\gamma + \frac{1}{2}\Big) = 0 \tag{13.89}$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\gamma_1 = -\frac{1}{3}$ και $\gamma = -\frac{1}{2}$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h[n] = c_1\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n + c_2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n, \;\; n \geq 0 \tag{13.90}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες.

$$h[0] + \frac{5}{6}h[-1] + \frac{1}{6}h[-2] = \delta[0] = 1 \tag{13.91}$$

$$h[1] + \frac{5}{6}h[0] + \frac{1}{6}h[-1] = \delta[1] = 0 \tag{13.92}$$

το οποίο δίνει

$$c_1 + c_2 = 1 \tag{13.93}$$

$$-\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + \frac{5}{6} = 0 \tag{13.94}$$

οπότε είναι

$$c_1 = -2 \tag{13.95}$$
$$c_2 = 3 \tag{13.96}$$

και άρα η κρουστική απόκριση είναι ίση με την ομογενή λύση, δηλ.

$$h_g[n] = h[n] = (-2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n + 3\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n)u[n] \tag{13.97}$$

■

Παράδειγμα 13.3:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + \frac{2}{3}y[n-1] + \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] \tag{13.98}$$

Λύση:
Στην περίπτωση αυτή έχουμε ξανά $M < N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$h[n] + \frac{2}{3}h[n-1] + \frac{1}{9}h[n-2] = \delta[n] \tag{13.99}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$h[n] + \frac{2}{3}h[n-1] + \frac{1}{9}h[n-2] = 0 \tag{13.100}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma + \frac{1}{9} = 0 \tag{13.101}$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\gamma + \frac{1}{3})^2 = 0 \tag{13.102}$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -\frac{1}{3}$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h[n] = (c_0 + c_1 n)\gamma^n = (c_0 + c_1 n)\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n, \ \ n \geq 0 \tag{13.103}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_0, c_1 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h[0] + \frac{2}{3}h[-1] + \frac{1}{9}h[-2] = \delta[0] = 1 \tag{13.104}$$
$$h[1] + \frac{2}{3}h[0] + \frac{1}{9}h[-1] = \delta[1] = 0 \tag{13.105}$$
$$\tag{13.106}$$

και αντικαθιστώντας έχουμε

$$h[0] = 1 = c_0 \tag{13.107}$$
$$h[1] = -\frac{2}{3} = -(c_0 + c_1)\Big(\frac{1}{3}\Big) \tag{13.108}$$

Λύνοντας το σύστημα, έχουμε

$$c_0 = 1 \tag{13.109}$$
$$c_1 = 1 \tag{13.110}$$

Άρα η ομογενής λύση είναι

$$h[n] = (1+n)\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[n] \tag{13.111}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι τελικά

$$\begin{aligned} h_g[n] &= h[n] + 2h[n-1] &(13.112)\\ &= (1+n)\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[n] + 2(1+(n-1))\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n-1} u[n-1] &(13.113)\\ &= (1-5n)\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[n] &(13.114)\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 13.4:

Βρειτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = x[n-1] \tag{13.115}$$

Λύση:

Στην περίπτωση αυτή έχουμε πάλι $M < N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$h[n] + 2h[n-1] + h[n-2] = \delta[n] \tag{13.116}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$h[n] + 2h[n-1] + h[n-2] = 0 \tag{13.117}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\gamma^2 + 2\gamma + 1 = 0 \tag{13.118}$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\gamma+1)(\gamma+1) = 0 \tag{13.119}$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -1$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h[n] = (c_0 + c_1 n)(-1)^n = (c_0 + c_1 n)(-1)^n,\ \ n \geq 0 \tag{13.120}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_0, c_1 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$\begin{aligned} h[0] + 2h[-1] + h[-2] = h[0] = \delta[0] = 1 &\quad (13.121)\\ h[1] + 2h[0] + h[-1] = h[1] + 2 = \delta[1] = 0 &\quad (13.122)\end{aligned}$$

τα οποία μας δίνουν το σύστημα

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 &(13.123)\\ c_1 &= 1 &(13.124)\end{aligned}$$

$$h[n] = (1+n)(-1)^n,\ \ n \geq 0 \tag{13.125}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$h_g[n] = h[n-1] = n(-1)^{n-1} u[n-1] \tag{13.126}$$

■

Παράδειγμα 13.5:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] \tag{13.127}$$

Λύση:
Στην περίπτωση αυτή έχουμε $M = N$, οπότε η κρουστική απόκριση θα αποτελείται μόνο από εκθετικούς όρους και από συναρτήσεις Δέλτα. Θέτουμε ως είσοδο $x[n] = \delta[n]$, και θεωρώντας συνθήκες αρχικής ηρεμίας στο σύστημα, έχουμε

$$h[n] + 5h[n-1] + 6h[n-2] = \delta[n] \tag{13.128}$$

Η ομογενής εξίσωση είναι

$$h[n] + 5h[n-1] + 6h[n-2] = 0 \tag{13.129}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6 = 0 \tag{13.130}$$

το οποίο γράφεται ως

$$(\gamma + 2)(\gamma + 3) = 0 \tag{13.131}$$

οπότε οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι οι $\gamma_1 = -2$ και $\gamma_2 = -3$. Άρα η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η

$$h[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n, \;\; n \geq 0 \tag{13.132}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2 χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες. Άρα

$$h[0] + 5h[-1] + 6h[-2] = h[0] = \delta[0] = 1 \tag{13.133}$$

$$h[1] + 5h[0] + 6h[-1] = h[1] + 5 = \delta[1] = 0 \tag{13.134}$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε

$$c_1 + c_2 = 1 \tag{13.135}$$

$$-2c_1 - 3c_2 = -4 \tag{13.136}$$

το οποίο δίνει $c_1 = -2$, $c_2 = 3$ και άρα η ομογενής λύση είναι

$$h[n] = -2(-2)^n u[n] + 3(-3)^n u[n] = ((-2)^{n+1} - (-3)^{n+1})u[n] \tag{13.137}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$h_g[n] = h[n] + h[n-1] + h[n-2] \tag{13.138}$$

$$= ((-2)^{n+1} - (-3)^{n+1})u[n] \tag{13.139}$$

$$+ ((-2)^n - (-3)^n)u[n-1] \tag{13.140}$$

$$+ ((-2)^{n-1} - (-3)^{n-1})u[n-2] \tag{13.141}$$

$$= \delta[n] - 4\delta[n-1] - \frac{3}{2}(-2)^n u[n-2] + \frac{7}{3}(-3)^n u[n-2] \tag{13.142}$$

■

13.4.3 ΓΧΑ Συστήματα και Εξισώσεις Διαφορών

Στη συζήτησή μας σε προηγούμενο κεφάλαιο, είχαμε επισημάνει ότι μας ενδιαφέρουν πολύ τα γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Ένα ερώτημα που πρέπει να ξεκαθαριστεί είναι το εξής: *Πότε ένα σύστημα που περιγράφεται από εξισώσεις διαφορών είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο;*

Χρησιμοποιοώντας την έννοια της γραμμικότητας, μπορούμε να πούμε τα εξής:

Για κάποια είσοδο $x_1[n]$, το σύστημα θα δίνει έξοδο

$$x_1[n] \longrightarrow y_1[n] = y_{1_{zi}}[n] + y_{1_{zs}}[n] \tag{13.143}$$

και για είσοδο $x_2[n]$ θα είναι

$$x_2[n] \longrightarrow y_2[n] = y_{1_{zi}}[n] + y_{2_{zs}}[n] \tag{13.144}$$

αφού η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν εξαρτάται από την είσοδο! Τέλος, για μια γραμμική είσοδο $ax_1[n]+bx_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow y_{1_{zi}}[n] + y_{3_{zs}}[n] \tag{13.145}$$

με $y_{3_{zs}}[n]$ την απόκριση μηδενικής κατάστασης όταν η είσοδος είναι η $ax_1[n] + bx_2[n]$, η οποία εξαρτάται από την είσοδο και είναι γραμμική, όπως έχουμε δείξει στην Παράγραφο 12.6.2.4.

Άρα για να είναι γραμμικό ένα σύστημα που περιγράφεται από μια διαφορική εξίσωση, πρέπει η απόκριση μηδενικής εισόδου να είναι μηδενική, ή με άλλα λόγια, **οι αρχικές συνθήκες του συστήματος να είναι μηδενικές**.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση XXXX) ότι αν η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μηδενική, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. Δεν είναι δύσκολο να το επιβεβαιώσουμε διαισθητικά: η χρονική αμεταβλητότητα σημαίνει ότι αν το σήμα εισόδου καθυστερήσει κατά n_0, η έξοδος θα είναι ένα σήμα όμοιο σε μορφή με το σήμα εξόδου για είσοδο $x[n]$, αλλά καθυστερημένο κατά τον ίδιο χρόνο n_0. Όμως η απόκριση μηδενικής εισόδου δεν εξαρτάται από την είσοδο, και άρα έχει την ίδια μορφή ανεξαρτήτως καθυστέρησης της εισόδου.

Τέλος, η ίδια η κρουστική απόκριση ορίζεται όπως έχουμε συζητήσει μόνο για γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Για παράδειγμα, ένα μη γραμμικό σύστημα δε θα ικανοποιούσε την ιδιότητα της ομογένειας, οπότε η κρουστική απόκριση δε θα ήταν μοναδική, ενώ η χρονική μεταβλητότητα θα μας έδινε μια διδιάστατη κρουστική απόκριση, αφού για κάθε καθυστέρηση εισόδου $\delta[n - n_0]$, θα είχαμε διαφορετική κρουστική απόκριση $h_{n_0}[n] = h[n_0, n]$. Στη συζήτησή μας για την κρουστική απόκριση εμμέσως υποθέσαμε ότι το σύστημά μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο.

Άρα μπορούμε να συνοψίσουμε ότι

Εξισώσεις Διαφορών και ΓΧΑ Συστήματα

Ένα σύστημα που περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \tag{13.146}$$

είναι Γραμμικό και Χρονικά Αμετάβλητο αν οι αρχικές συνθήκες του είναι μηδενικές, δηλ.

$$y[-1] = 0 \tag{13.147}$$
$$y[-2] = 0 \tag{13.148}$$
$$y[-3] = 0 \tag{13.149}$$
$$\vdots \tag{13.150}$$
$$y[-N] = 0 \tag{13.151}$$

13.5 Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης

Ας εστιάσουμε τώρα την προσοχή μας στην εύρεση της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας εισόδου και μηδενικών αρχικών συνθηκών, δηλ. στην εύρεση της *απόκρισης μηδενικής κατάστασης* $y_{zs}[n]$.

Δεδομένης της ποικιλίας των εισόδων που μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα σύστημα, θα θέλαμε έναν ενιαίο και ομοιόμορφο τρόπο εύρεσης της απόκρισης μηδενικής κατάστασης. Ενώ στα συστήματα συνεχούς χρόνου, ορίσαμε τη συνάρτηση Δέλτα συνεχούς χρόνου στην προσπάθειά μας, τα πράγματα είναι πολύ πιο απλά στο διακριτό χρόνο.

Είδαμε μόλις ότι η έξοδος ενός συστήματος σε ένα δείγμα-είσοδο που ορίζεται μονάχα για μια χρονική στιγμή, όπως η $\delta[n]$, ονομάζεται *κρουστική απόκριση* $h[n]$. Επειδή τα συστήματα που συζητάμε είναι γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα, αν μπορούσαμε να εκφράσουμε ένα οποιοδήποτε σήμα εισόδου ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα, τότε η έξοδος θα μπορούσε να υπολογιστεί πολύ εύκολα, ως άθροισμα κρουστικών αποκρίσεων. Ευτυχώς η διαδικασία είναι πολύ απλούστερη από την αντίστοιχη του συνεχούς χρόνου, αφού η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου είναι πολύ εύκολα διαχειρίσιμη.

Έχουμε ήδη πει ότι ένα οποιοδήποτε διακριτό σήμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ως

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{13.152}$$

Η έξοδος ενός συστήματος για την παραπάνω είσοδο θα είναι

$$y[n] = T[x[n]] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x[k]\delta[n-k]] \tag{13.153}$$

με την τελευταία ισότητα να ισχύει λόγω γραμμικότητας. Όπως είπαμε και νωρίτερα, επειδή οι τιμές $x[k]$ είναι αριθμοί, έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x[k]\delta[n-k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T[\delta[n-k]] \tag{13.154}$$

Η χρονική αμεταβλητότητα υποδηλώνει ότι αν ορίσουμε ότι η απόκριση του συστήματος, $h_k[n]$, σε μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $n = k$, δηλ.

$$h_k[n] = T[\delta[n-k]] \tag{13.155}$$

μπορεί να γραφεί ως

$$h_k[n] = h[n-k] \tag{13.156}$$

είναι δηλαδή μια απλή μετατόπιση της κρουστικής απόκρισης! Έτσι,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \tag{13.157}$$

Συνοψίζοντας, αφού το σύστημά μας είναι γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο, θα έχουμε τα ακόλουθα ζεύγη εισόδου-εξόδου:

$$\text{(α) κρουστική απόκριση: } \delta[n] \longrightarrow h[n] \tag{13.158}$$

$$\text{(β) χρον. αμεταβλητότητα: } \delta[n-k] \longrightarrow h[n-k] \tag{13.159}$$

$$\text{(γ) γραμμικότητα/ομογένεια: } x[k]\delta[n-k] \longrightarrow x[k]h[n-k] \tag{13.160}$$

$$\text{(δ) γραμμικότητα/αθροιστικότητα: } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \tag{13.161}$$

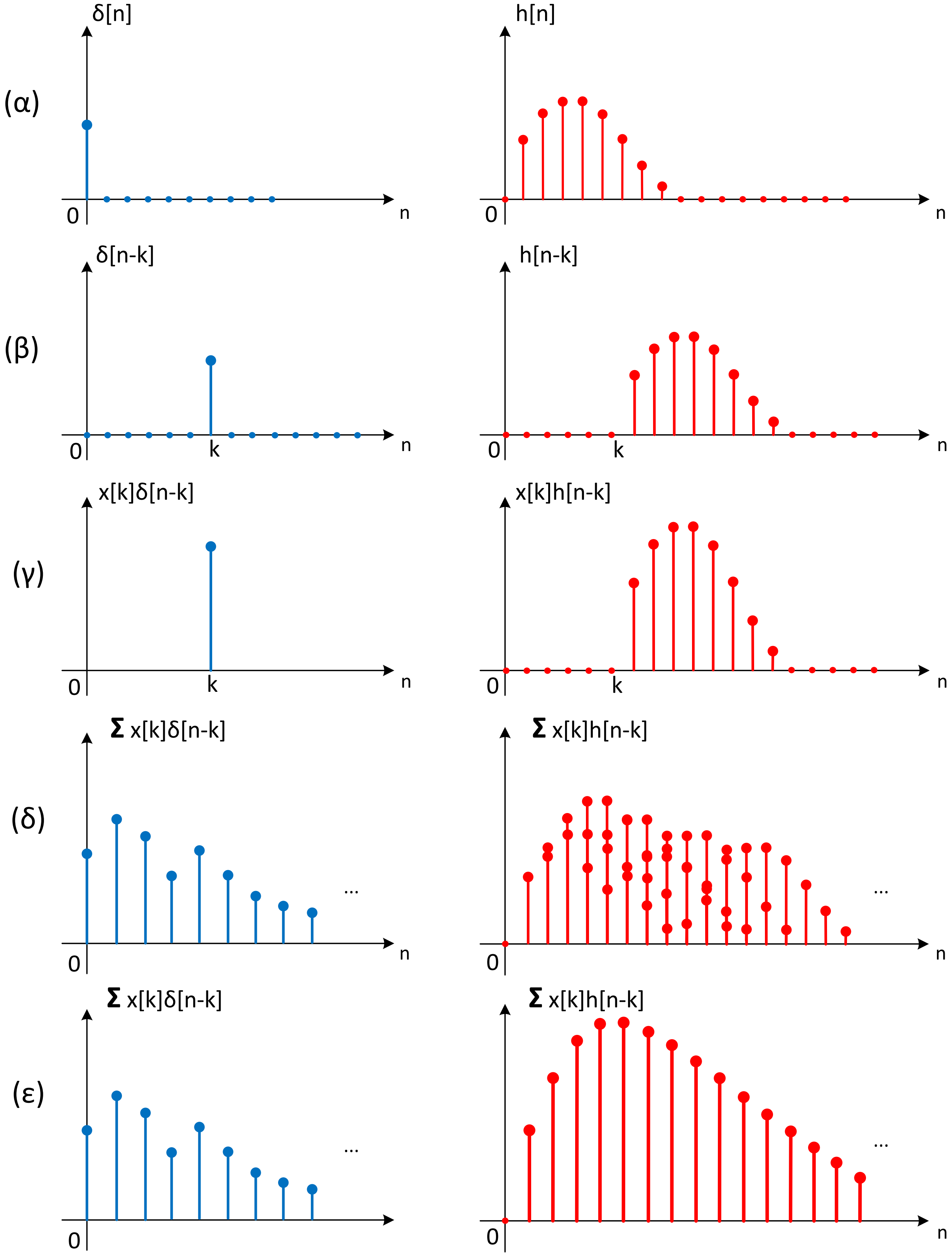
$$\text{(ε) είσοδος: } x[n] = x[n] * \delta[n] \longrightarrow \text{απόκριση μηδεν. κατάστασης: } y[n] = x[n] * h[n] \tag{13.162}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι: εφαρμόζοντας τις απλές ιδιότητες των ΓΧΑ συστημάτων που γνωρίζουμε επάνω στην αναπαράσταση ενός σήματος εισόδου ως συνέλιξη με συναρτήσεις Δέλτα, η απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$ αναπαρίσταται ως η *συνέλιξη της εισόδου* $x[n]$ *με την κρουστική απόκριση του συστήματος* $h[n]$! Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$y_{zs}[n] = x[n] * h[n] \tag{13.163}$$

Μια σχηματική αναπαράσταση της παραπάνω διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 13.3. Συγκρίνετε τη διαδικασία που ακολουθήσαμε παραπάνω με αυτήν της Παραγράφου 4.3.1, και δείτε πόσο πιο εύκολα βρήκαμε την απόκριση μηδενικής κατάστασης στο πεδίο του διακρτού χρόνου.

Η γνώση της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ μπορεί να μας δώσει την απόκριση μηδενικής κατάστασης για οποιαδήποτε είσοδο!



Σχήμα 13.3: *Σχηματική παραγωγή της πράξης της συνέλιξης που αναφέρονται στις Σχέσεις (13.158-13.162).*

13.6 Συνέλιξη

Η πράξη της συνέλιξης είναι θεμελιώδους σημασίας, λόγω του ότι εμφανίζεται συχνά στις φυσικές επιστήμες, στη μηχανική, και στα μαθηματικά, οπότε της αξίζει ξεχωριστή και εκτενής αναφορά. Αμέσως παρακάτω, θα την εξετάσουμε ως γενικότερη πράξη, χωρίς να τη συνδέουμε απαραίτητα με την είσοδο και την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος.

Προτού μελετήσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα της συνέλιξης, ας δούμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες με βάση τον ορισμό της.

13.6.1 Ιδιότητες Συνέλιξης

Η πράξη της συνέλιξης απλοποιείται σημαντικά από ιδιότητες, όπως αυτές στον Πίνακα 13.1.

Ιδιότητες Συνέλιξης	
Ομογένεια	$ax[n] * y[n] = x[n] * ay[n] = a(x[n] * y[n]),\ \ a \in \Re$
Αντιμεταθετικότητα	$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$
Προσεταιριστικότητα	$(x[n] * y[n]) * z[n] = x[n] * (y[n] * z[n])$
Επιμεριστικότητα	$x[n] * (y[n] + z[n]) = x[n] * y[n] + x[n] * z[n]$
Γραμμικότητα	$\begin{cases} z_1[n] = x_1[n] * y[n] \\ z_2[n] = x_2[n] * y[n] \\ \text{αν } x[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \\ \text{τότε } z[n] = x[n] * y[n] = az_1[n] + bz_2[n] \end{cases}$
Εύρος	$\begin{cases} x[n] : [n_1, n_2] \longrightarrow \Re \\ y[n] : [n_3, n_4] \longrightarrow \Re \\ x[n] * y[n] : [n_1 + n_3, n_2 + n_4] \longrightarrow \Re \end{cases}$
Ουδέτερο στοιχείο	$x[n] * \delta[n] = \delta[n] * x[n] = x[n]$

Πίνακας 13.1: *Ιδιότητες συνέλιξης Διακριτού Χρόνου*

Ακολουθούν οι αποδείξεις αυτών των ιδιοτήτων, με αποκλειστική χρήση του ορισμού.

13.6.1.1 Ομογένεια

Έχουμε

$$(ax[n]) * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ax[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]ay[n-k] = x[n] * (ay[n]) \tag{13.164}$$

και

$$x[n] * (ay[n]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]ay[n-k] = a\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = a(x[n] * y[n]) \tag{13.165}$$

13.6.1.2 Αντιμεταθετικότητα

Θέτοντας $u = n - k$ στον ορισμό της συνέλιξης, έχουμε

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{u=+\infty}^{-\infty} x[n-u]y[u] = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} x[n-u]y[u] = y[n] * x[n] \tag{13.166}$$

13.6.1.3 Προσεταιριστικότητα

Είναι

$$(x[n] * y[n]) * z[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x[k] * y[k])z[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Big(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]y[k-l] \Big) z[n-k] \tag{13.167}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \Big(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[k-l]z[n-k] \Big) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l] \Big(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m]z[n-m-l] \Big) \tag{13.168}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l](y[n-l] * z[n-l]) = x[n] * (y[n] * z[n]) \tag{13.169}$$

όπου στη Σχέση (13.168) θέσαμε $m = k - l$.

13.6.1.4 Επιμεριστικότητα

Είναι

$$x[n] * (y[n] + z[n]) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k](y[n-k] + z(n-k)) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \big(x[k]y[n-k] + x[k]z[n-k]\big) \tag{13.170}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]y[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z[n-k] = x[n] * y[n] + x[n] * z[n] \tag{13.171}$$

13.6.1.5 Γραμμικότητα

Είναι

$$z[n] = x[n] * y[n] = (ax_1[n] + bx_2[n]) * y[n] = ax_1[n] * y[n] + bx_2[n] * y[n] \tag{13.172}$$

$$= a(x_1[n] * y[n]) + b(x_2[n] * y[n]) = az_1[n] + bz_2[n] \tag{13.173}$$

με

$$z_1[n] = x_1[n] * y[n] \tag{13.174}$$

$$z_2[n] = x_2[n] * y[n] \tag{13.175}$$

λόγω των ιδιοτήτων της ομογένειας και της επιμεριστικότητας.

13.6.1.6 Εύρος

Η απόδειξη της ιδιότητας του εύρους φαίνεται σχήματικά στο Σχήμα 13.4. Στο ολοκλήρωμα της συνέλιξης, το σήμα $y[n]$ χρησιμοποιείται ως $y[n-k]$, με μεταβλητή το k. Άρα υπόκειται σε πράξεις αντιστροφής χρόνου και μετατόπισης. Ως εκ τούτου, το σήμα θα είναι μη μηδενικό στο $[n - n_4, n - n_3]$. Στη διαδικασία της συνέλιξης, το γινόμενο $x[k]y[n-k]$ είναι μη μηδενικό για $n - n_3 \geq n_1$ και $n - n_4 \leq n_2$, δηλ. στο διάστημα $[n_1 + n_3, n_2 + n_4]$.

13.6.1.7 Ουδέτερο στοιχείο

Είναι

$$x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] \tag{13.176}$$

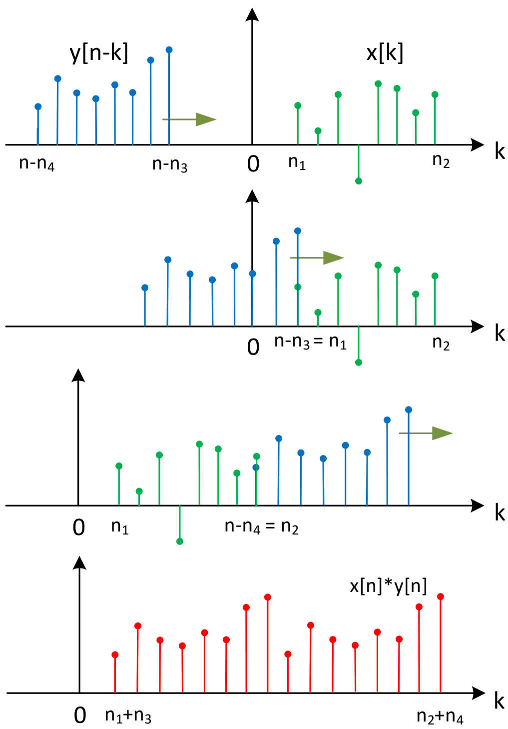
από την ανάλυση ενός σήματος σε άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα. ■

Η συνέλιξη είναι διαβόητη ως μια πράξη αρκετά περίπλοκη και δύσκολη, και σε πρώτη επαφή αποθαρρύνει τον αναγνώστη. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη της άθροισης εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *ανάκλαση και μετατόπιση*.

13.6.2 Η συνέλιξη διακριτού χρόνου αναλυτικά

Εδώ θα επικεντρωθούμε στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \tag{13.177}$$



Σχήμα 13.4: *Γραφική απόδειξη της ιδιότητας του εύρους.*

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το άθροισμα έχει ως μεταβλητή το k και *όχι* το n. Το n το θεωρούμε σταθερό μέσα στο άθροισμα. Έπειτα, το άθροισμα αυτό περιέχει δυο σήματα: το $x[k]$ και το $y[n-k]$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας: *ανάκλαση και μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

$$y[n] \to y[k] \to y[-k] \to y[-k+n] = y[n-k] \tag{13.178}$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο άθροισμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση ως προς* n. Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x[k]$ και αθροίζεται ως προς n.

13.6.3 Γραφική λύση

Συχνά προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, λόγω οπτικής ευκολίας, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα 13.5. Ας πούμε ότι εδώ έχουμε $x[n] = a^n u[n], \ |a| < 1$ και $y[n] = a^{n-1}, |a| < 1, 1 \le n \le 4$.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $x[n]$ και το $y[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε το $y[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε σύμφωνα με τον ορισμό.

- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n, όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης, και το $y[k]$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά n. Θυμίζουμε ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $y[k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.

- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $y[n-k]$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ''ολισθαίνουμε'' πάνω στον ίδιο άξονα με το $x[k]$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.

- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $x[k]$. Όταν το συναντάει, έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης. Άρα, αυτές οι διακριτές χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί άκρο του $y[n-k]$ συναντά το αριστερό άκρο του $x[k]$ και πέρα, ΚΑΙ όταν το αριστερό άκρο του $y[n-k]$ ΔΕΝ έχει περάσει το 0, δηλ. όταν

  $$n-1 \ge 0 \Rightarrow n \ge 1 \text{ και } n-4 \le 0 \Rightarrow n \le 4 \tag{13.179}$$

  οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $n-1$, εκεί δηλαδή που υπάρχει γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων, ως

  $$c_{xy}[n] = \sum_{k=0}^{n-1} x[k]y[n-k] \tag{13.180}$$
  $$= \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} \tag{13.181}$$
  $$= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} \tag{13.182}$$
  $$= a^{n-1}(n-1-0+1) = na^{n-1} \tag{13.183}$$

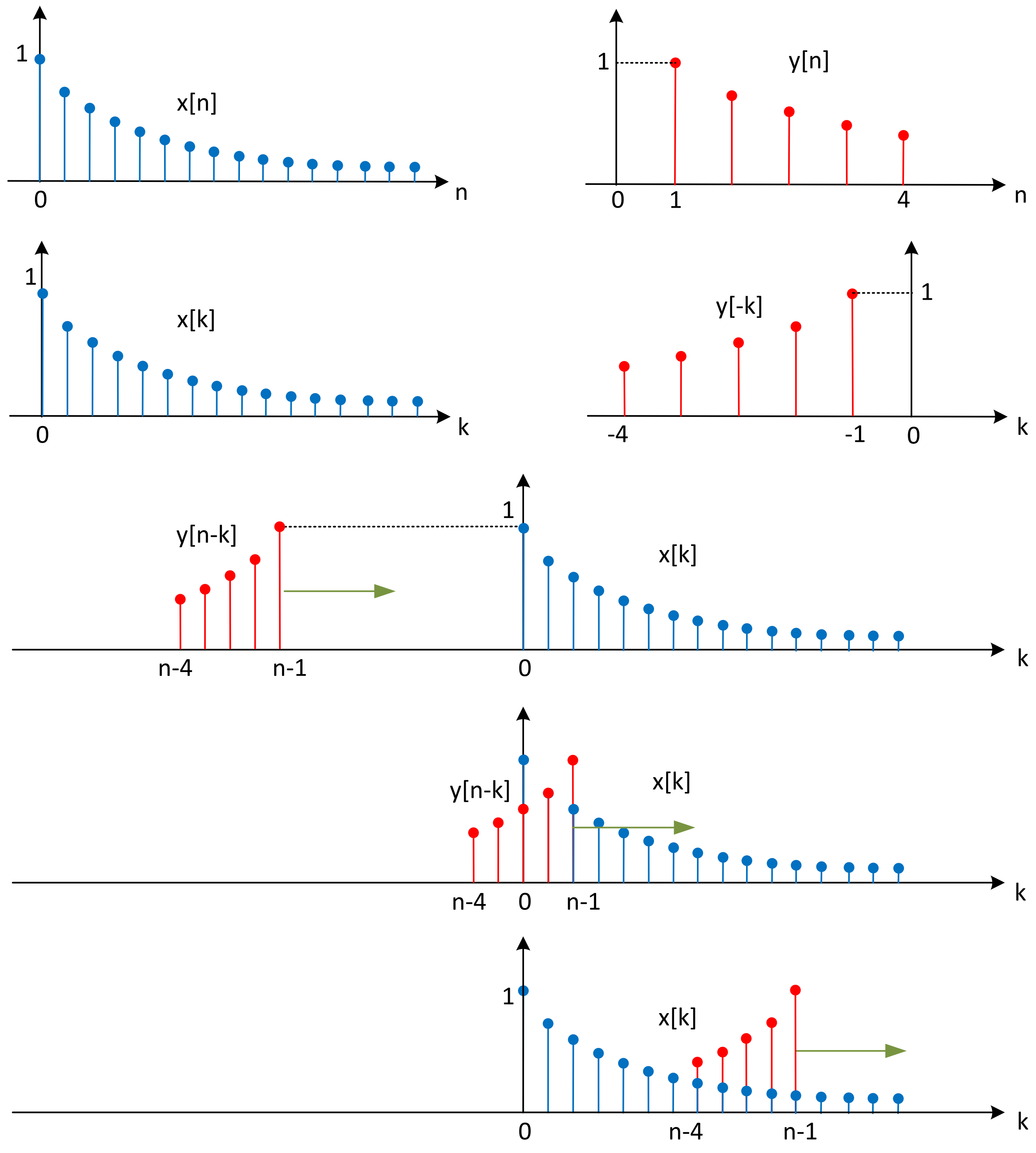
  για $1 \le n \le 4$.

- Στην πέμπτη γραμμή, το $y[n-k]$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $x[k]$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη ορίζεται όταν το αριστερό άκρο της $y[n-k]$ περάσει το 0, δηλ. όταν

  $$n-4 > 0 \Rightarrow n > 4 \tag{13.184}$$

  και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

  $$c_{xy}[n] = \sum_{k=n-4}^{n-1} x[k]y[n-k] \tag{13.185}$$
  $$= \sum_{k=n-4}^{n-1} a^k a^{n-k-1} \tag{13.186}$$



Σχήμα 13.5: *Γραφική απεικόνιση της συνέλιξης.*

$$= \sum_{k=n-4}^{n-1} a^{n-1} \tag{13.187}$$

$$= a^{n-1}(n-1-(n-4)+1) = 4a^{n-1} \tag{13.188}$$

για $n > 4$.

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο n εκτός από τα παραπάνω, η συνέλιξη είναι μηδέν, άρα

$$c_{xy}[n] = 0, \ \ n < 1 \tag{13.189}$$

- Οπότε συγκεντρωτικά θα είναι:

$$c_{xy}[n] = \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \le n \le 4 \\ 4a^{n-1}, & n > 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{13.190}$$

13.6.4 Αλγεβρικοί τρόποι

Ας δούμε αν ο αλγεβρικός τρόπος μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα... θα υπολογίσουμε τη συνέλιξη αλγεβρικά με τρεις τρόπους ($x[n] * y[n], y[n] * x[n]$, συν ένας ακόμα τρόπος που υπάρχει λόγω του ότι το δεύτερο σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας). Αρχικά, ας προσέξουμε ότι

$$y[n] = a^{n-1},\ 1 \le n \le 4 \Longleftrightarrow y[n] = a^{n-1}(u[n-1] - u[n-5]) \tag{13.191}$$

13.6.4.1 Συνέλιξη $x[n] * y[n]$

Θα είναι:

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \tag{13.192}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] a^{n-k-1}(u[n-k-1] - u[n-k-5]) \tag{13.193}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-1] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-5] \tag{13.194}$$

Το πρώτο γινόμενο βηματικών είναι 1 όταν $k \le n-1, k \ge 0$, ενώ το δεύτερο όταν $k \le n-5, k \ge 0$. Άρα θα έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-1] = \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} \tag{13.195}$$

$$= a^{n-1}(n-1-0+1) \tag{13.196}$$

$$= na^{n-1} \tag{13.197}$$

για $0 \le k \le n-1$ και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-5] = -\sum_{k=0}^{n-5} a^k a^{n-k-1} \tag{13.198}$$

$$= -a^{n-1}(n-5-0+1) \tag{13.199}$$

$$= (4-n)a^{n-1} \tag{13.200}$$

για $0 \le k \le n-5$, οπότε θα είναι

$$na^{n-1},\ 0 \le k \le n-1 \Longleftrightarrow na^{n-1},\ n \ge 1 \tag{13.201}$$

και

$$-(n-4)a^{n-1},\ 0 \le k \le n-5 \Longleftrightarrow -(n-4)a^{n-1},\ n \ge 5 \tag{13.202}$$

αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι υπάρχει επικάλυψη στα διαστήματα. Μπορούμε όμως να γράψουμε την παραπάνω σχέση, γράφοντας τους περιορισμούς στα διαστήματα ως βηματικές, ως

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-1] = na^{n-1}u[n-1] \tag{13.203}$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-5] = -(n-4)a^{n-1}u[n-5] \tag{13.204}$$

και άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} c_{xy}[n] &= na^{n-1}u[n-1] - (n-4)a^{n-1}u[n-5] && (13.205)\\ &= na^{n-1}(u[n-1]-u[n-5]) + 4a^{n-1}u[n-5] && (13.206)\\ &= \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \le n \le 4 \\ 4a^{n-1}, & n \ge 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} && (13.207) \end{aligned}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το γραφικό τρόπο λύσης.

13.6.4.2 Συνέλιξη $y[n] * x[n]$

Θα είναι:

$$\begin{aligned} c_{xy}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] && (13.208)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}(u[k-1]-u[k-5])a^{n-k}u[n-k] && (13.209)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-1]u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-5]u[n-k] && (13.210) \end{aligned}$$

Το πρώτο γινόμενο των βηματικών είναι 1 όταν $k \le n, k \ge 1$, ενώ το δεύτερο όταν $k \le n, k \ge 5$. Άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-1]u[n-k] &= \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}a^{n-k} && (13.211)\\ &= a^{n-1}(n-1+1) && (13.212)\\ &= na^{n-1} && (13.213) \end{aligned}$$

για $1 \le k \le n$ και

$$\begin{aligned} -\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-5]u[n-k] &= -\sum_{k=5}^{n} a^{k-1}a^{n-k} && (13.214)\\ &= -a^{n-1}(n-5+1) && (13.215)\\ &= (4-n)a^{n-1} && (13.216) \end{aligned}$$

για $5 \le k \le n$, οπότε θα είναι

$$na^{n-1},\ 1 \le k \le n \Longleftrightarrow na^{n-1},\ n \ge 1 \tag{13.217}$$

και

$$-(n-4)a^{n-1},\ 5 \le k \le n \Longleftrightarrow -(n-4)a^{n-1},\ n \ge 5 \tag{13.218}$$

Βλέπουμε κι εδώ ότι υπάρχει επικάλυψη στα διαστήματα, αλλά μπορούμε και πάλι να γράψουμε αυτούς τους περιορισμούς ως βηματικές συναρτήσεις, δηλ.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-1]u[n-k] = na^{n-1}u[n-1] \tag{13.219}$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-5]u[n-k] = -(n-4)a^{n-1}u[n-5] \tag{13.220}$$

και άρα θα έχουμε

$$c_{xy}[n] = na^{n-1}u[n-1] - (n-4)a^{n-1}u[n-5] \tag{13.221}$$

$$= na^{n-1}(u[n-1] - u[n-5]) + 4a^{n-1}u[n-5] \tag{13.222}$$

$$= \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \le n \le 4 \\ 4a^{n-1}, & n \ge 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{13.223}$$

που είναι ξανά το ίδιο αποτέλεσμα με το γραφικό τρόπο λύσης αλλά και την προηγούμενη αλγεβρική μέθοδο.

13.6.4.3 Τρίτος τρόπος

Είναι

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=1}^{4} a^{k-1}a^{n-k}u[n-k] \tag{13.224}$$

Εδώ εκμεταλλευτήκαμε ότι το $y[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και αλλάξαμε τα άκρα επιτόπου. Όμως πρέπει να δούμε τι θα γίνει με το σήμα $u[n-k]$. Προφανώς η συνάρτηση αυτή είναι ίση με 1 όταν $k \le n$. Αφού $1 \le k \le 4$, θα έχουμε επίσης ότι

$$1 \le k \le n \le 4 \tag{13.225}$$

$$\text{ή} \tag{13.226}$$

$$1 \le k \le 4 < n \tag{13.227}$$

Άρα θα έχουμε αντίστοιχα,

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}a^{n-k} \tag{13.228}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a^{n-1} \tag{13.229}$$

$$= a^{n-1}(n-1+1) \tag{13.230}$$

$$= na^{n-1} \tag{13.231}$$

για $1 \le n \le 4$ ή

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=1}^{4} a^{k-1}a^{n-k} \tag{13.232}$$

$$= \sum_{k=1}^{4} a^{n-1} \tag{13.233}$$

$$= a^{n-1}(4-1+1) \tag{13.234}$$

$$= 4a^{n-1} \tag{13.235}$$

για $n > 4$. Άρα συγκεντρωτικά

$$c_{xy}[n] = \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \leq n \leq 4 \\ 4a^{n-1}, & n > 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{13.236}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τα προηγούμενα.

Συνοψίζοντας:

Γραφική Λύση Συνέλιξης Σημάτων

1. Επιλέγουμε ένα εκ των δυο σημάτων, έστω το $x[n]$, και το μετατρέπουμε σε $x[k]$.
2. Εφαρμόζουμε επάνω του την πράξη της χρονικής αντιστροφής και της χρονικής μετατόπισης, λαμβάνοντας έτσι το σήμα $x[n-k]$.
3. Φέρουμε τα δυο σήματα σε κοινό άξονα ως προς k, και ''σύρουμε'' το $x[n-k]$ από το $-\infty$ προς το $+\infty$.
4. Καθορίζουμε προσεκτικά τις περιοχές του χρόνου όπου τα δυο σήματα ''συνυπάρχουν'', δηλ. όπου το γινόμενο $x[n-k]y[k]$ είναι μη μηδενικό.
5. Στις παραπάνω περιοχές, υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης.

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις...

1. Προφανώς, το Σχήμα 13.5 δεν είναι ακριβές γιατί οι μετακινήσεις του αριστερού σήματος γίνονται ανά ακέραιες χρονικές στιγμές, οπότε τα δείγματα του ενός σήματος πέφτουν πάντα πάνω στα δείγματα του άλλου. Απλά τα έχουμε ξεχωρίσει για οπτικούς λόγους.

2. Όπως βλέπετε, το πιο σημαντικό πράγμα είναι να μπορείτε να υπολογίσετε το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του αθροίσματος, όσον αφορά τη γραφική λύση.

3. Η συνέλιξη, όπως ξέρετε, είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{xy}[n] = x[n] * y[n] = y[n] * x[n] = c_{yx}[n] \tag{13.237}$$

   δηλ. αν παίζαμε στη γραφική λύση με το $x[n]$ αντί για το $y[n]$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα. Το είδατε άλλωστε στην αλγεβρική μέθοδο.

4. Προτιμούμε να παίξουμε με το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.

5. Χρήσιμη παρατήρηση για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a+c, b+d]$. Είναι χρήσιμη παρατήρηση για να μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο Σχήμα 13.5, είχαμε συνέλιξη της $y[n]$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{yy}[n] = y[n] * y[n]$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.

6. Ο τρόπος που προτιμά ο καθένας για την επίλυση της συνέλιξης εξαρτάται από τον ίδιο. Συνήθως, στο διακριτό χρόνο προτιμούμε κάποια αλγεβρική μέθοδο, ενώ στο συνεχή χρόνο είναι σύνηθες να βλέπουμε γραφικές λύσεις - φυσικά αυτό δεν είναι δεσμευτικό.

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα, λιγότερο εποπτικό και περισσότερο πρακτικό.

Παράδειγμα:

Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση

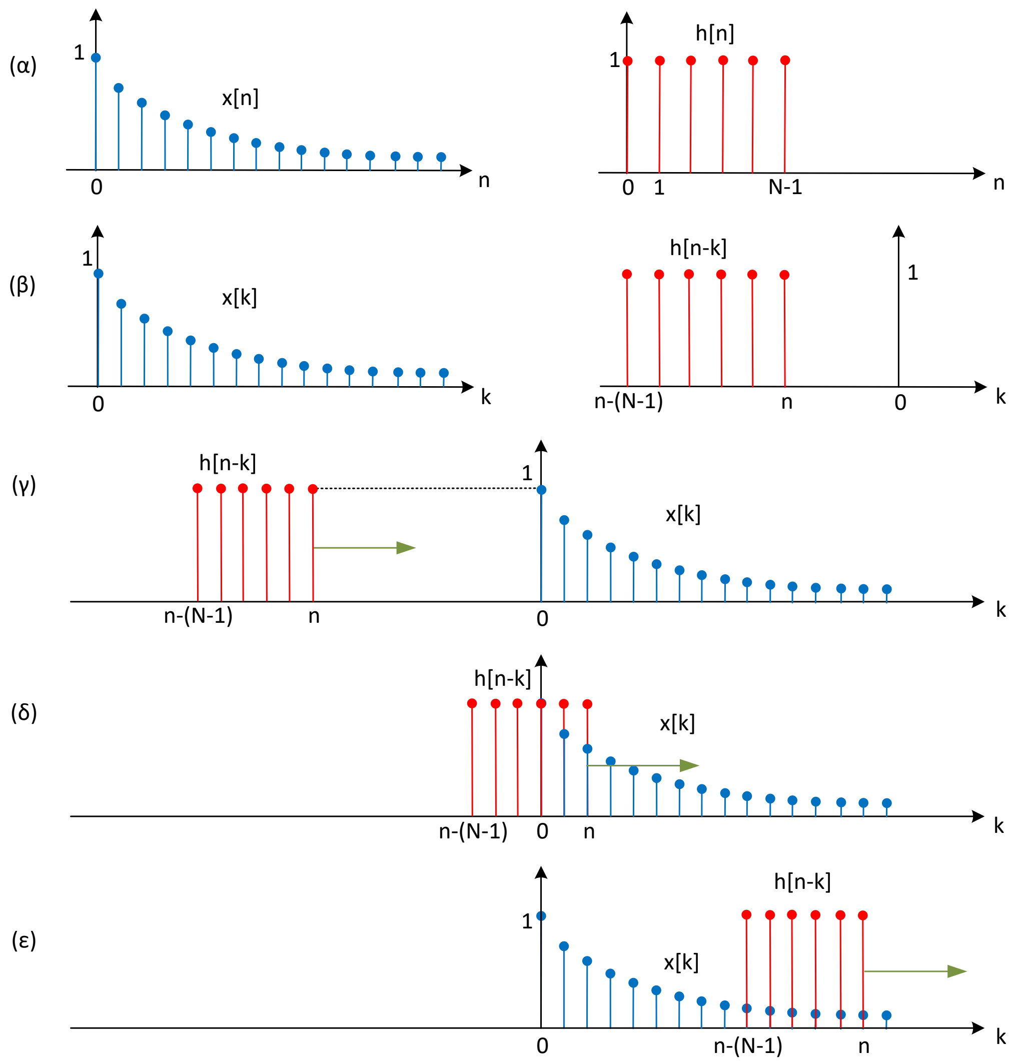
$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{13.238}$$

Η είσοδος είναι

$$x[n] = a^n u[n] = \begin{cases} a^n, & n \ge 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{13.239}$$

Υπολογίστε τη συνέλιξη των δυο σημάτων.

Λύση:
Αρχικά, ας σχεδιάσουμε τα σήματα $x[n]$ και $h[n-k]$ ως συναρτήσεις του k. Δείτε το Σχήμα 13.6.



Σχήμα 13.6: *Σήματα $x[n]$ και $h[n-k]$ και υπολογισμός συνέλιξης.*

- Παρατηρήστε ότι όλες οι αρνητικές τιμές του n δε δίνουν γινόμενο των δυο σημάτων (δηλ. δίνουν γινόμενο ίσο με μηδέν - Σχήμα 13.6(γ). Άρα έχουμε ότι

$$y[n] = 0, \quad n < 0 \tag{13.240}$$

- Στο Σχήμα 13.6(δ), φαίνονται τα δυο σήματα με το $h[n-k]$ να έχει πλησιάσει περισσότερο το $x[k]$, και συγκεκριμένα αναπαριστάται η θέση των δυο σημάτων όταν $n \geq 0$ (δηλ. το δεξί ``άκρο'' του σήματος $h[n-k]$ έχει επικάλυψη με το $x[k]$) και $n - N + 1 \leq 0$ (δηλ. όταν το αριστερό ``άκρο'' του σήματος $h[n-k]$ δεν έχει συναντήσει το σήμα $x[k]$). Αυτές οι δυο συνθήκες μπορούν να ενωθούν στην εξής μια,

$$0 \leq n \leq N-1 \tag{13.241}$$

  Για αυτό το διάστημα, βλέπουμε στο Σχήμα ότι

$$x[k]h[n-k] = a^k, \quad 0 \leq k \leq n \tag{13.242}$$

  αφού τα δείγματα που θα αθροιστούν δίνουν γινόμενο μόνο στο $0 \leq k \leq n$, κι αυτό συμβαίνει όταν $0 \leq n \leq N-1$. Άρα έχουμε ότι

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{13.243}$$

- Τέλος, στο Σχήμα 13.6(ε), ολόκληρο το σήμα $h[n-k]$ έχει επικάλυψη με το $x[k]$, που αυτό συμβαίνει όταν $0 < n - N + 1 \Leftrightarrow n > N - 1$. Κάνοντας όπως προηγουμένως,

$$x[k]h[n-k] = a^k, \quad n - N + 1 \leq k \leq n \tag{13.244}$$

  και άρα

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a} = a^{n-N+1}\Big(\frac{1-a^N}{1-a}\Big), \quad n > N-1 \tag{13.245}$$

Μαζεύοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα σε μια συνάρτηση, έχουμε ότι το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^{n-N+1}\Big(\dfrac{1-a^N}{1-a}\Big), & n > N-1 \end{cases} \tag{13.246}$$

Εξασκηθείτε στη συνέλιξη υπολογίζοντας αλγεβρικά - χωρίς σχήμα - το παραπάνω πρόβλημα! :-) ■

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα, αυτή τη φορά με αποκλειστικά αλγεβρική λύση.

Παράδειγμα:

Έστω το σήμα

$$h[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \tag{13.247}$$

Βρείτε τη συνέλιξη με τον εαυτό του.

Λύση:
Θα έχουμε

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] a^{n-k} u[n-k] \tag{13.248}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^n u[k]u[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k] \tag{13.249}$$

Όμως

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{13.250}$$

και

$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \Longleftrightarrow k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{13.251}$$

και άρα

$$u[k]u[n-k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{13.252}$$

Άρα η συνέλιξη γράφεται ως

$$c[n] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k] = a^n \sum_{k=0}^{n} 1 = a^n(n+1) \tag{13.253}$$

για $n \geq 0$. Προφανώς, $c[n] = 0, \ n < 0$. Άρα τελικά

$$c[n] = \begin{cases} a^n(n+1), & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{13.254}$$

■

Πολλές φορές όμως η συνέλιξη εμπλέκει δυο σήματα που είναι και τα δυο πεπερασμένης διάρκειας (μερικά δείγματα το καθένα), οπότε η χρήση του ορισμού δεν είναι τόσο βολική. Θα δούμε τώρα μια άλλη μέθοδο η οποία ονομάζεται μέθοδος της *ολισθαίνουσας ταινίας - sliding tape method*, και ταιριάζει πολύ σε τέτοια προβλήματα.

13.6.5 Μέθοδος Ολισθαίνουσας Ταινίας

Έστω δυο σήματα πεπερασμένης διάρκειας, όπως τα

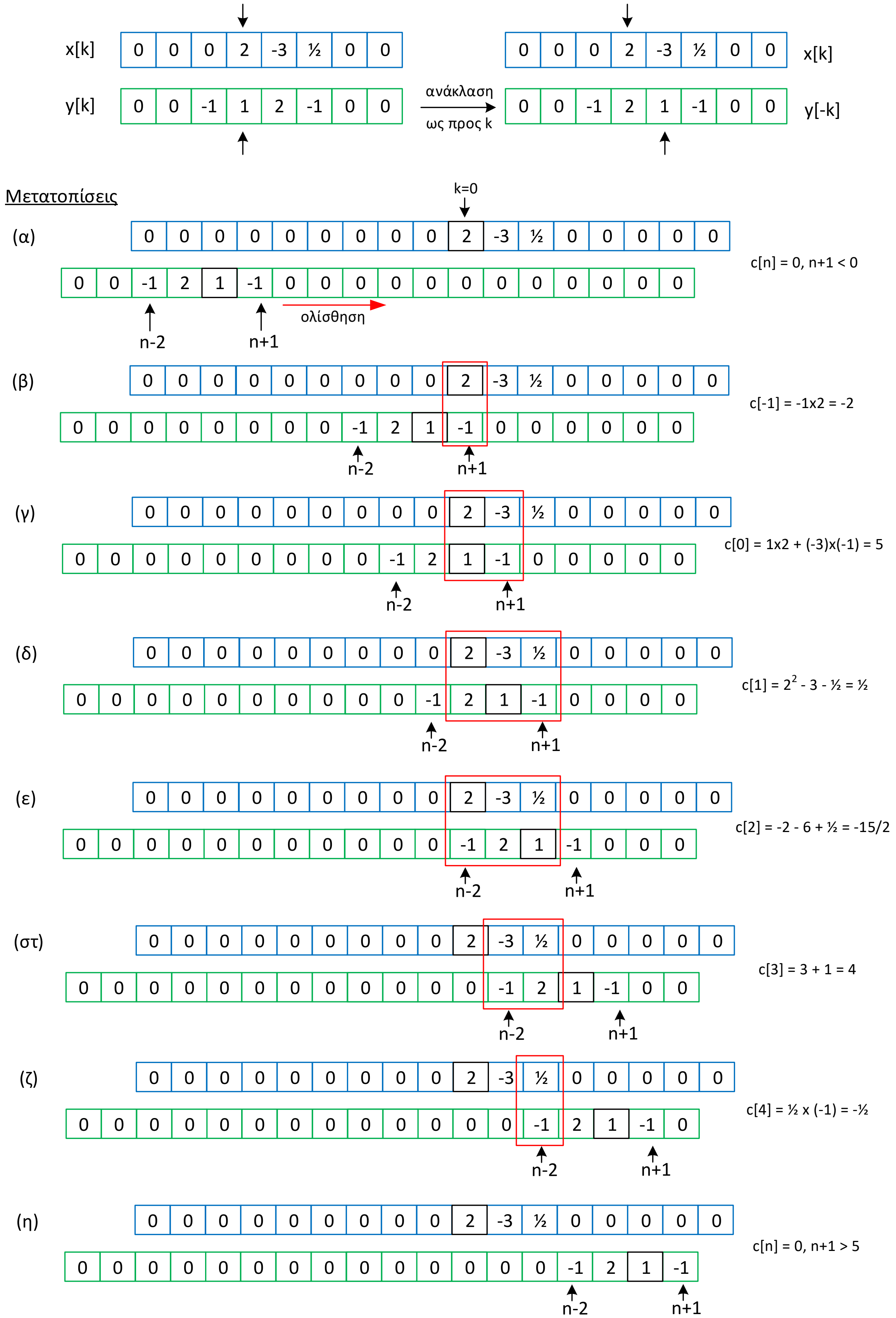
$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 0.5\delta[n-2] \tag{13.255}$$

$$y[n] = -\delta[n+1] + \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-2] \tag{13.256}$$

και αναζητούμε το αποτέλεσμα της συνέλιξής τους. Θα προσομοιώσουμε τη διαδικασία ανάκλασης και μετατόπισης που δείξαμε στη γραφική λύση, αλλά όχι πλέον σε γραφήματα αλλά σε σειρές από ‘‘κελιά’’ που το καθένα παριστάνει μια συνάρτηση Δέλτα και φέρει την τιμή του πλάτους της. Δείτε το Σχήμα 13.7, όπου αρχικά αναπαριστούμε τις τιμές των συναρτήσεων Δέλτα που αποτελούν τα σήματά μας ως τιμές σε διαδοχικά κελιά. Το μαύρο βελάκι σημειώνει το δείγμα που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $n = 0$. Έχουμε ήδη συμβολίσει στο σχήμα μας τα σήματά μας ως προς τη μεταβλητή k. Η πρώτη κίνηση που πρέπει να κάνουμε είναι - κατά τα ήδη γνωστά - η χρονική ανάκλαση του ενός σήματος, έστω του $y[k]$. Στη συνέχεια πρέπει να μετατοπίσουμε το σήμα $y[k]$ κατά n, πράγμα που φαίνεται στο Σχήμα 13.7(α), όπου οι δυο ταινίες έχουν τοποθετηθεί η μια κάτω από την άλλη - ουσιαστικά προσομοιώνουν την αναπαράσταση των σημάτων σε κοινό άξονα k, όπως είδαμε στη γραφική λύση. Για την απλούστερη αναπαράσταση της διαδικασίας, οι τιμές της συνάρτησης Δέλτα που αντιστοιχούν στη χρονική στιγμή $k = 0$ σημειώνονται με μαύρο κελί.

Παρατηρήστε ότι ξεκινάμε να ολισθαίνουμε την ταινία του $y[n-k]$ από το $-\infty$, ένα δείγμα τη φορά προς τα δεξιά, ως ότου έρθουμε σε μια θέση όπως στο Σχήμα 13.7(α). Είναι εμφανές ότι το γινόμενο $x[k]y[n-k]$ είναι μηδενικό - πολλαπλασιάστε τα επιμέρους κελιά για να το διαπιστώσετε. Το γινόμενο παραμένει μηδενικό ως ότου $n+1 = 0$, στο Σχήμα 13.7(β). Τότε λαμβάνουμε την τιμή της συνέλιξης τη χρονική στιγμή $n = -1$, και η οποία είναι

$$c[-1] = x[0]y[-1-0] = -1 \times 2 = -2 \tag{13.257}$$



Σχήμα 13.7: *Μέθοδος ολισθαίνουσας ταινίας για τον υπολογισμό της συνέλιξης.*

και η οποία προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τα επιμέρους κελιά. Ολισθαίνουμε κατά ένα δείγμα την ταινία του σήματος $y[n-k]$, καταλήγοντας στη θέση του Σχήματος 13.7(γ). Πολλαπλασιάζοντας τα επιμέρους κελιά και αθροίζοντας τα αποτελέσματα, λαμβάνουμε την τιμή $n = 0$ της συνέλιξης. Άρα

$$c[0] = x[0]y[0] + x[1]y[1] = 1 \times 2 + (-3) \times (-1) = 5 \tag{13.258}$$

Συνεχίζουμε τη διαδικασία αυτή στα Σχήματα 13.7(δ,ε,στ,ζ), όπου και λαμβάνουμε τις τιμές της συνέλιξης για $n = 1$ ως $n = 4$, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο - πολλαπλασιάζοντας και αθροίζοντας τα επιμέρους γινόμενα. Καταλήγουμε στο τέλος στη θέση του Σχήματος 13.7(η), όπου πλέον το γινόμενο των επιμέρους τιμών είναι ξανά μηδενικό, και παραμένει τέτοιο για κάθε $n > 4$.

Έτσι, το αποτέλεσμα είναι

$$c[n] = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ -2, & n = -1 \\ 5, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 1 \\ -\frac{15}{2}, & n = 2 \\ 4, & n = 3 \\ \frac{1}{2}, & n = 4 \\ 0, & n > 4 \end{cases} \tag{13.259}$$

ή εναλλακτικά

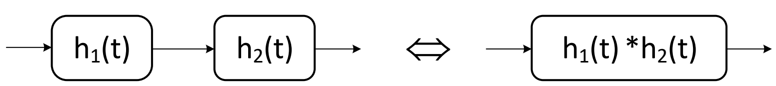
$$c[n] = -2\delta[n+1] + 5\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{15}{2}\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + \frac{1}{2}\delta[n-4] \tag{13.260}$$

■

Πως μπορούμε να γνωρίζουμε αν το παραπάνω είναι σωστό, τουλάχιστον όσον αφορά τη διάρκεια του σήματος[5]; Θυμηθείτε κατ΄ αρχάς την ιδιότητα του εύρους συνέλιξης: αν ένα σήμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[n_1, n_2]$ και ένα δεύτερο σήμα είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[n_3, n_4]$, τότε η συνέλιξή τους θα είναι μη μηδενική στο διάστημα $[n_1 + n_3, n_2 + n_4]$. Στο παράδειγμά μας, έχουμε $[n_1, n_2] = [0, 2]$ και $[n_3, n_4] = [-1, 2]$, οπότε για τη συνέλιξή τους θα είναι $[n_{c_1}, n_{c_2}] = [-1, 4]$, που συμφωνεί ακριβώς στα δείγματα που βρήκαμε.

13.7 Διατάξεις Συστημάτων

Ας δούμε μερικές διατάξεις συστημάτων που συναντώνται συχνά στην πράξη, και τις οποίες μπορούμε να απλοποιήσουμε. Στο Σχήμα 13.8, φαίνονται δυο συστήματα σε σειρά. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y[n]$,



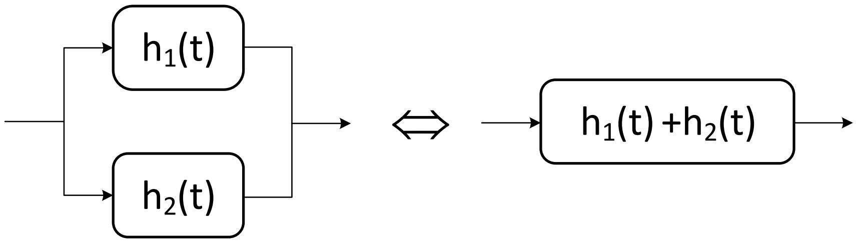
Σχήμα 13.8: *Συστήματα σε σειρά και ισοδύναμη διάταξη.*

είναι:

$$y[n] = (x_1[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x_1[n] * (h_1[n] * h_2[n]) \tag{13.261}$$

λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την ισοδύναμη διάταξη που φαίνεται το ίδιο σχήμα.

[5] Τα υπόλοιπα είναι θέμα πράξεων ☺.



Σχήμα 13.9: *Παράλληλα συστήματα.*

Στο Σχήμα 13.9, φαίνονται δυο συστήματα σε παραλληλία. Η έξοδος από ένα τέτοιο σύστημα, $y[n]$, είναι:

$$y[n] = (x_1[n] * h_1[n]) + (x_1[n] * h_2[n]) = x_1[n] * (h_1[n] + h_2[n]) \tag{13.262}$$

λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την ισοδύναμη διάταξη που φαίνεται το ίδιο σχήμα.

13.8 Συνολική Απόκριση Συστήματος

Έχουμε πλέον αναλυτικές μαθηματικές εκφράσεις για την απόκριση μηδενικής εισόδου και την απόκριση μηδενικής κατάστασης ενός ΓΧΑ συστήματος. Έτσι, η συνολική απόκριση (έξοδος) $y[n]$ ενός ΓΧΑ συστήματος παρουσία εισόδου $x[n]$ είναι

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i \gamma_i^n + x[n] * h_g[n] \tag{13.263}$$

με $h_g[n]$ την κρουστική απόκριση του συστήματος, γ_i τις (απλές) χαρακτηριστικές ρίζες (ή φυσικές συχνότητες) του συστήματος, και c_i σταθεροί συντελεστές, όπως αυτά ορίστηκαν στην Παράγραφο 13.12.1. Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που συνοψίζει όλα όσα έχουμε δει ως τώρα.

Παράδειγμα:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] \tag{13.264}$$

με αρχικές συνθήκες $y[0] = 1$, $y[-1] = 0$. Βρείτε τη συνολική απόκριση του συστήματος αν η είσοδος είναι $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Λύση:
Ας βρούμε πρώτα την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}[n]$. Η ομογενής εξίσωση είναι

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = 0 \tag{13.265}$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\gamma^2 + 3\gamma + 2 = 0 \Longleftrightarrow (\gamma + 1)(\gamma + 2) = 0 \tag{13.266}$$

Η ομογενής λύση θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n = c_1(-1)^n + c_2(-2)^n, \;\; n \geq 0 \tag{13.267}$$

Για να βρούμε τις σταθερές c_1, c_2, θα χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες, οπότε

$$y_{zi}[0] = c_1 + c_2 = 1 \tag{13.268}$$

$$y_{zi}[-1] = -c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 0 \tag{13.269}$$

Οπότε $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, και έτσι η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι

$$y_{zi}[n] = (-(-1)^n - 2(-2)^n)u[n] = (-1)^{n+1}u[n] + (-2)^{n+1}u[n] \tag{13.270}$$

Η κρουστική απόκριση βρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης

$$h[n] + 3h[n-1] + 2h[n-2] = \delta[n] \tag{13.271}$$

Βρήκαμε νωρίτερα τις χαρακτηριστικές ρίζες, και άρα η ομογενής λύση είναι της μορφής

$$h[n] = d_1(-1)^n + d_2(-2)^n, \;\; n \geq 0 \tag{13.272}$$

Χρησιμοποιώντας μηδενικές αρχικές ($n < 0$) συνθήκες, έχουμε

$$h[0] = d_1 + d_2 = \delta[0] = 1 \tag{13.273}$$

$$h[-1] = -d_1 - \frac{1}{2}d_2 = 0 \tag{13.274}$$

και έτσι βρίσκουμε ότι $d_1 = -1$, $d_2 = 2$, οπότε η ομογενής λύση είναι

$$h[n] = (-1)^{n+1}u[n] - (-2)^{n+1}u[n] \tag{13.275}$$

Η κρουστική απόκριση είναι τελικά

$$h_g[n] = h[n] = ((-1)^{n+1} - (-2)^{n+1})u[n] \tag{13.276}$$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$ θα είναι

$$y_{zs}[n] = h_g[n] * x[n] \tag{13.277}$$

$$= ((-1)^{n+1} - (-2)^{n+1})u[n] * \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{13.278}$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1+2(-2)^n}{3} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1+4(-4)^n}{5} \tag{13.279}$$

$$= \frac{1}{15}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^n(3(2)^{n+3} - 10)\right] \tag{13.280}$$

Οπότε τελικά, η συνολική απόκριση του συστήματος όταν στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ είναι

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = (-1)^{n+1}u[n] + (-2)^{n+1}u[n] + \frac{1}{15}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + (-1)^n(3(2)^{n+3} - 10)\right] \tag{13.281}$$

■

Όπως ήταν εμφανές στο παράδειγμα, είναι ιδιαίτερα κοπιαστικό - αν και εύκολο - να βρει κανείς τη συνολική απόκριση (δηλ. την έξοδο) ενός αιτιατού ΓΧΑ συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Άλλες μέθοδοι που θα δούμε σύντομα θα μας δώσουν ευκολότερους τρόπους υπολογισμού της εξόδου.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι η εξής: ο διαχωρισμός σε απόκριση μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου δεν είναι ο μοναδικός που μπορεί να γίνει. Ένας ακόμα διαχωρισμός είναι αυτός της **φυσικής απόκρισης - natural response** $y_n[n]$ και της **εξαναγκασμένης απόκρισης - forced response** $y_f[n]$. Η φυσική και η εξαναγκασμένη απόκριση μπορούν να βρεθούν απ' ευθείας από τη συνολική απόκριση, με τον απλό διαχωρισμό των όρων που περιλαμβάνονται στην απόκριση μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου. Όλοι οι όροι που περιέχουν φυσικές συχνότητες ανήκουν στην φυσική απόκριση, ενώ όλες οι υπόλοιπες ανήκουν στην εξαναγκασμένη απόκριση.

Για παράδειγμα, έστω ένα σύστημα με συνολική απόκριση

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] \tag{13.282}$$

$$= ((-2)^n u[n] + 2(-4)^n u[n]) + (5(-2)^n u[n] + 2(-3)^n u[n] - (-4)^n u[n]) \tag{13.283}$$

Βλέπουμε ότι οι φυσικές συχνότητες του συστήματος είναι $\gamma_i = -2, -4$, απλά ελέγχοντας την $y_{zi}[n]$. Όμως τέτοιες συχνότητες υπάρχουν και στην απόκριση μηδενικής κατάστασης $y_{zs}[n]$. Αν βάλουμε μαζί τους όρους που περιέχουν φυσικές συχνότητες του συστήματος και μαζί όλους τους άλλους, θα έχουμε

$$y[n] = ((-2)^n u[n] + 2(-4)^n u[n]) + (5(-2)^n u[n] + 2(-3)^n u[n] - (-4)^n u[n]) \tag{13.284}$$

$$= (6(-2)^n u[n] + (-4)^n u[n]) + 2(-3)^n u[n] \tag{13.285}$$

$$= y_n[n] + y_f[n] \tag{13.286}$$

με

$$y_n[n] = 6(-2)^n u[n] + (-4)^n u[n] \tag{13.287}$$

$$y_f[n] = 2(-3)^n u[n] \tag{13.288}$$

Παρατηρήστε ότι η φυσική απόκριση έχει τους ίδιους όρους με την απόκριση μηδενικής εισόδου - μόνο οι σταθερές αλλάζουν. Αντίθετα, η εξαναγκασμένη απόκριση δεν έχει ιδιαίτερη σχέση με την απόκριση μηδενικής κατάστασης. Φυσικά, ο τρόπος εύρεσης της συνολικής απόκρισης ως άθροισμα της φυσικής και της εξαναγκασμένης απόκρισης δεν περνά αναγκαστικά μέσα από τη γνώση της απόκρισης μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου. Η φυσική και η εξαναγκασμένη απόκριση μπορούν να βρεθούν κατ΄ ευθείαν από τη διαφορική εξίσωση του συστήματος. Η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι απλούστερη από αυτή που έχουμε δει ως τώρα στις αποκρίσεις μηδενικής κατάστασης και μηδενικής εισόδου. Ας τη δούμε.

13.9 Φυσική και Εξαναγκασμένη Απόκριση

Η εύρεση της φυσικής απόκρισης είναι εύκολη, αφού αυτή αποτελείται μόνο από όρους που περιέχουν φυσικές συχνότητες, άρα θα πρέπει να αποτελεί λύση του ομογενούς συστήματος. Όμως, έχουμε δει ότι η λύση ενός τέτοιου συστήματος απαιτεί κάποιες αρχικές συνθήκες. Θα μπορούσε κανείς να προτείνει τις αρχικές συνθήκες της εξόδου για $n < 0$. Όμως αυτές οι αρχικές συνθήκες εφαρμόζονται μόνο στην απόκριση μηδενικής εισόδου. Στις αποκρίσεις που συζητάμε, δεν μπορεί να γίνει διαχωρισμός της μηδενικής εισόδου και μηδενικής κατάστασης. Άρα οι συνθήκες που θέλουμε πρέπει να αφορούν *όλη* την έξοδο, δηλ. την $y[n]$ η οποία ορίζεται για $n \geq 0$, οπότε οι συνθήκες που θέλουμε πρέπει να θεωρηθούν στο $n \geq 0$.

Η εύρεση της εξαναγκασμένης απόκρισης είναι επίσης εύκολη. Η εξαναγκασμένη απόκριση μπορεί να θεωρηθεί ως γραμμικός συνδυασμός διαφόρων μορφών της εισόδου $x[n]$. Ο Πίνακας 13.2 παρουσιάζει κάποιες συνήθεις μορφές εισόδων, και την αντίστοιχη εξαναγκασμένη απόκριση. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα, η εξαναγκασμένη απόκριση για είσοδο $x[n] = C\delta[n]$ είναι μηδενική, και έτσι η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι μόνο η $y_n[n]$. Όπως έχουμε ήδη δει, για ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών, η κρουστική απόκριση $h[n]$ μπορει να υπολογιστεί λύνοντας την εξίσωση διαφορών για $x[n] = \delta[n]$, θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες στο σύστημά μας. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα.

Εξαναγκασμένη Απόκριση για διάφορες μορφές εισόδου

Όροι του $x[n]$	Εξαναγκασμένη Απόκριση $y_x[n]$
C	C_1
Cn	$C_1 n + C_2$
Ca^n	$C_1 a^n$
$C\cos(n\omega_0)$	$C_1\cos(n\omega_0) + C_2\sin(n\omega_0)$
$C\sin(n\omega_0)$	$C_1\cos(n\omega_0) + C_2\sin(n\omega_0)$
$Ca^n\cos(n\omega_0)$	$C_1 a^n\cos(n\omega_0) + C_2 a^n\sin(n\omega_0)$
$C\delta[n]$	0

Πίνακας 13.2: *Εξαναγκασμένες Αποκρίσει σε Εξισώσεις Διαφορών για διάφορες μορφές εισόδου.*

Παράδειγμα 4.15:

Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] + 5y[n-1] + 6y[n-2] = 6x[n-1] \tag{13.289}$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος για είσοδο

$$x[n] = (n+1)u[n] \tag{13.290}$$

δεδομένων αρχικών συνθηκών $y[0] = 2$ και $y[1] = 0$.

Λύση:
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι

$$\gamma^2 + 5\gamma + 6 = (\gamma + 2)(\gamma + 3) \tag{13.291}$$

Άρα η φυσική απόκριση θα είναι της μορφής

$$y_n[n] = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n, \;\; n \geq 0 \tag{13.292}$$

με c_1, c_2 σταθερές που πρέπει να βρούμε, αλλά αφού υπολογίσουμε τη συνολική απόκριση. Βάσει του Πίνακα 13.2, η εξαναγκασμένη απόκριση θα είναι της μορφής

$$y_f[n] = (C_1 n + C_0)u[n] \tag{13.293}$$

και

$$y_f[n-1] = (C_1(n-1) + C_0)u[n] = C_1 n - C_1 + C_0, \;\; n \geq 0 \tag{13.294}$$

$$y_f[n-2] = (C_1(n-2) + C_0)u[n] = C_1 n - 2C_1 + C_0, \;\; n \geq 0 \tag{13.295}$$

Όμοια

$$6x[n-1] = 6((n-1)+1)u[n] = 6nu[n] \tag{13.296}$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση διαφορών, έχουμε

$$(C_1 n + C_0) + 5(C_1 n - C_1 + C_0) + 6(C_1 n - 2C_1 + C_0) = 6n \tag{13.297}$$

$$12C_1 n + C_0 - 5C_1 + 5C_0 - 12C_1 + 6C_0 = 6n \tag{13.298}$$

$$12C_1 n - 17C_1 + 12C_0 = 6n \tag{13.299}$$

που μας δίνει το σύστημα

$$12C_1 = 6 \tag{13.300}$$

$$-17C_1 + 12C_0 = 0 \tag{13.301}$$

$$\tag{13.302}$$

Το σύστημα αυτό έχει λύση

$$C_1 = \frac{1}{2} \tag{13.303}$$

$$C_0 = \frac{17}{24} \tag{13.304}$$

Άρα η εξαναγκασμένη απόκριση είναι

$$y_{fr}[n] = \frac{1}{2}n + \frac{17}{24}, \;\; n \geq 0 \tag{13.305}$$

Η συνολική απόκριση του συστήματος θα είναι

$$y[n] = y_f[n] + y_n[n] = c_1(-2)^n + c_2(-3)^n + \frac{1}{2}n + \frac{17}{24}, \;\; n \geq 0 \tag{13.306}$$

Από τις αρχικές συνθήκες $y[0] = 2$ και $y[1] = 0$, θα έχουμε

$$c_1 + c_2 + \frac{17}{24} = 2 \tag{13.307}$$

$$-2c_1 - 3c_2 + \frac{1}{2} + \frac{17}{24} = 0 \tag{13.308}$$

που μας δίνει τιμές

$$c_1 = \frac{8}{3} \tag{13.309}$$

$$c_2 = -\frac{11}{8} \tag{13.310}$$

Άρα η συνολική απόκριση είναι

$$y[n] = y_{fr}[n] + y_{nr}[n] = \frac{8}{3}(-2)^n u[n] - \frac{11}{8}(-3)^n u[n] + \frac{1}{2}nu[n] + \frac{17}{24}u[n] \tag{13.311}$$

■

13.10 Αναδρομικές και Μη Αναδρομικές Εξισώσεις Διαφορών

Σε μερικές περιπτώσεις, μπορει να ειναι χρήσιμο να εκφράσουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται με εξισώσεις διαφορών με όρους των προηγούμενων τιμών της εισόδου και της εξόδου. Έστω το σύστημα

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^{M} b_l x[n-l] \tag{13.312}$$

Το παραπάνω σύστημα, για $M = 0$, $N = 1$, μπορει να γραφεί ως

$$a_0 y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] \tag{13.313}$$

ή αλλιώς

$$y[n] = \frac{a_1}{a_0} y[n-1] + \frac{b_0}{a_0} x[n] \tag{13.314}$$

Η γενική μορφή τέτοιων εξισώσεων διαφορών δίνεται ως

$$y[n] = \sum_{l=0}^{M} B_l x[n-l] - \sum_{k=1}^{N} A_k y[n-k] \tag{13.315}$$

όπου $A_k = {}^{a_k}/_{a_0}, B_k = {}^{b_k}/_{b_0}$ είναι κανονικοποιημένες ως προς a_0 σταθερές που ορίζουν το σύστημα. Αν $a_k = 0$, για κάθε k, τότε η εξίσωση λέγεται **μη αναδρομική**, διαφορετικά λέγεται **αναδρομική**.

Όμως για να μπορούμε να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις, χρειαζόμαστε κάποιες τιμές, οι περίφημες *αρχικές συνθήκες*. Για παράδειγμα, για μια είσοδο $x[n]$ που ξεκινάει τη χρονική στιγμή $n = 0$ (δηλ. είναι μηδενική για $n \leq -1$), η λύση στη Σχέση (13.315) τη στιγμή $n = 0$ εξαρτάται από τις τιμές εξόδου $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$. Έτσι, βλέπετε ότι αυτές οι αρχικές συνθήκες πρέπει να καθοριστούν πρώτα πριν λύσουμε την εξίσωση για $n \geq 0$, όπως έχει συμβεί ήδη στα παραδείγματά μας. Όταν οι αρχικές συνθήκες αυτές είναι όλες μηδεν, τοτε λέμε οτι το σύστημα είναι *σε ηρεμία*.

13.11 Συστήματα Πεπερασμένης και Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης

Για μη αναδρομικά συστήματα, η εξίσωση διαφορών δίνεται ως

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{13.316}$$

και η έξοδος, όπως βλέπετε, είναι απλά το άθροισμα των τιμών της εισόδου, με βάρη b_k. Ως αποτέλεσμα, αφού η εξίσωση είναι γραμμένη με τη μορφή συνέλιξης, η μοναδιαία απόκριση βρίσκεται αντικαθιστώντας το $x[n]$ με το $\delta[n]$, και είναι απλά

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \tag{13.317}$$

Έτσι, το $h[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και λέγεται Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης (**Finite Impulse Response - FIR**) σύστημα. Αν όμως $a_k \neq 0$, η μοναδιαία απόκριση ειναι, εν γενει, άπειρη σε διάρκεια, και το σύστημα λέγεται Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης (**Infinite Impulse Response - IIR**) σύστημα.

13.12 Ευστάθεια Συστήματος

Ας αναφερθούμε τώρα αναλυτικότερα σε μια έννοια η οποία είναι πολύ σημαντική, αυτή της *ευστάθειας* ενός ΓΧΑ συστήματος. Συζητήσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο (και υπενθυμίζουμε εδώ) ότι ένα σύστημα λέγεται **Bounded Input - Bounded Output ευσταθές** αν

$$|x[n]| < M_x \Longrightarrow |y[n]| < M_y, \quad M_x, M_y \in \Re \tag{13.318}$$

Αυτή όμως η έξοδος $y[n]$ αποτελείται από δυο συνιστώσες, όπως είδαμε:

1. Την απόκριση μηδενικής εισόδου, $y_{zi}[n]$.

2. Την απόκριση μηδενικής κατάστασης, $y_{zs}[n]$.

Για να είναι λοιπόν η έξοδος φραγμένη κατ΄ απόλυτη τιμή, θα πρέπει να είναι φραγμένες οι επιμέρους συνιστώσες της, δηλ. να είναι κι αυτές ευσταθείς.

13.12.1 Ευστάθεια Απόκρισης Μηδενικής Εισόδου

Εξ ορισμού, η απόκριση μηδενικής είσοδου παράγεται για $x[n] = 0$, οπότε προφανώς η είσοδος είναι φραγμένη. Η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται από τη σχέση

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_k^n u[n] \tag{13.319}$$

αν οι χαρακτηριστικές ρίζες γ_k είναι διακριτές. Πρέπει να σας είναι προφανές ότι η απόκριση αυτή είναι απολύτως φραγμένη μόνον αν το $y_{zi}[n] \not\longrightarrow \infty$ όταν $n \to \infty$. Ας δούμε πότε συμβαίνει αυτό, διακρίνοντας δυο περιπτώσεις.

- Αν οι ρίζες γ_k είναι πραγματικές, τότε για να είναι η αποκριση μηδενικής εισόδου απολύτως φραγμένη θα πρέπει
$$\lim_{n\to\infty} \gamma_k^n = 0, \quad \forall k \tag{13.320}$$
Αυτό όμως συμβαίνει μόνον όταν
$$0 < |\gamma_k| < 1, \quad \forall k \tag{13.321}$$

- Αν οι ρίζες γ_k είναι μιγαδικές, τότε για να είναι η αποκριση μηδενικής εισόδου απολύτως φραγμένη θα πρέπει
$$\lim_{n\to\infty} \gamma_k^n = 0, \quad \forall k \tag{13.322}$$
Αυτό όμως συμβαίνει μόνον όταν
$$|\gamma_k| < 0, \quad \forall k \tag{13.323}$$
Ας το δείξουμε αναλυτικά, μια και αυτό το όριο θα το συναντήσουμε ξανά αρκετές φορές στη συνέχεια.

  Έστω λοιπόν ότι $\gamma = a + jb = re^{j\phi}$, και ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το
$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n = \lim_{n\to\infty} (re^{j\phi})^n = \lim_{n\to\infty} r^n e^{jn\phi} \tag{13.324}$$

Ο όρος $r^n e^{jn\phi}$ έχει μέτρο r^n, ενώ η φάση $e^{jn\phi}$ είναι πάντοτε απολύτως φραγμένη συνάρτηση του n[6]. Οπότε

$$\lim_{n\to\infty} \gamma^n = \lim_{n\to\infty} r^n e^{jn\phi} = \begin{cases} 0, & 0 < r < 1 \\ \\ \infty, & r > 1 \end{cases} \tag{13.325}$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γενικευτεί για δυο οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f[n], g[n]$, για τις οποίες ισχύει ότι αν $|f[n]| < M_f$ και $\lim_{n\to\infty} g[n] = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} f[n]g[n] = 0$. Περιγράφοντας αυτή τη σχέση, το όριο του γινομένου δυο συναρτήσεων $f[n]g[n]$ όταν $n \to \infty$ είναι μηδέν, αν η μια είναι απολύτως φραγμένη και η άλλη τείνει στο μηδέν όταν $n \to \infty$.

- Στην ειδική περίπτωση που $\gamma = jb$, τότε όταν $n \to \infty$, ο όρος γ^n διατηρεί το μοναδιαίο μέτρο του, χωρίς να αυξάνει ή να φθίνει. Από τις σχέσεις του Euler, έχουμε

$$e^{jbn} = \cos(bn) + j\sin(bn) \tag{13.326}$$

που σημαίνει ότι η απόκριση μηδενικής εισόδου θα διατηρεί μια ταλάντωση επ΄ άπειρον, χωρίς αυτή να φθίνει ή να αυξάνει. Άρα αν στο σύνολο των χαρακτηριστικών ριζών υπάρχει μια τουλάχιστον καθαρά φανταστική ρίζα, τότε το σύστημα είναι *οριακά ευσταθές*.

Ας δούμε πως - και αν - διαφοροποιούνται τα πράγματα όταν οι ρίζες έχουν κάποια πολλαπλότητα r. Υπενθυμίζεται ότι τότε η απόκριση μηδενικής εισόδου γράφεται ως

$$y_{zi}[n] = \Big((c_1 + c_2 n + \cdots + c_r n^{r-1})(-\gamma_1)^n + c_{r+1}\gamma_{r+1}^n + \cdots + c_N \gamma_N^n\Big)u[n] \tag{13.327}$$

Για τα εκθετικά που φέρουν τις απλές ρίζες $\gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_N$, η κατάσταση δεν αλλάζει σε σχέση με την ανάλυση που μόλις κάναμε. Τα εκθετικά όμως που φέρουν τη ρίζα πολλαπλότητας r, γ_1, φέρουν ως παράγοντα έναν όρο n^k, με $k = 0, \cdots, r-1$. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί κανείς να δείξει με όμοιο με πριν τρόπο, ότι

$$\lim_{n\to\infty} n^k \gamma^n = 0 \tag{13.328}$$

μόνον αν $0 < |\gamma| < 1$. Αυτό σημαίνει ότι η πολλαπλότητα δεν επηρεάζει την ευστάθεια (ή μη) της απόκρισης μηδενικής εισόδου.

Συνοψίζοντας, ένα ΓΧΑ σύστημα έχει ευσταθή απόκριση μηδενικής εισόδου αν

1. όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας
2. αν υπάρχουν φανταστικές χαρακτηριστικές ρίζες απλής τάξης (οριακή ευστάθεια), και όλες έχουν μοναδιαίο μέτρο

Σε κάθε άλλη περίπτωση, η απόκριση είναι ασταθής.

Σχηματικά, η απόκριση μηδενικής εισόδου πραγματικών συστημάτων για διάφορες θέσεις των χαρακτηριστικών ριζών φαίνεται στο Σχήμα 4.23.

13.12.2 Ευστάθεια Απόκρισης Μηδενικής Κατάστασης

Αντίστοιχα, για την απόκρισης μηδενικής κατάστασης, όπου η είσοδος είναι μη μηδενική και απολύτως φραγμένη

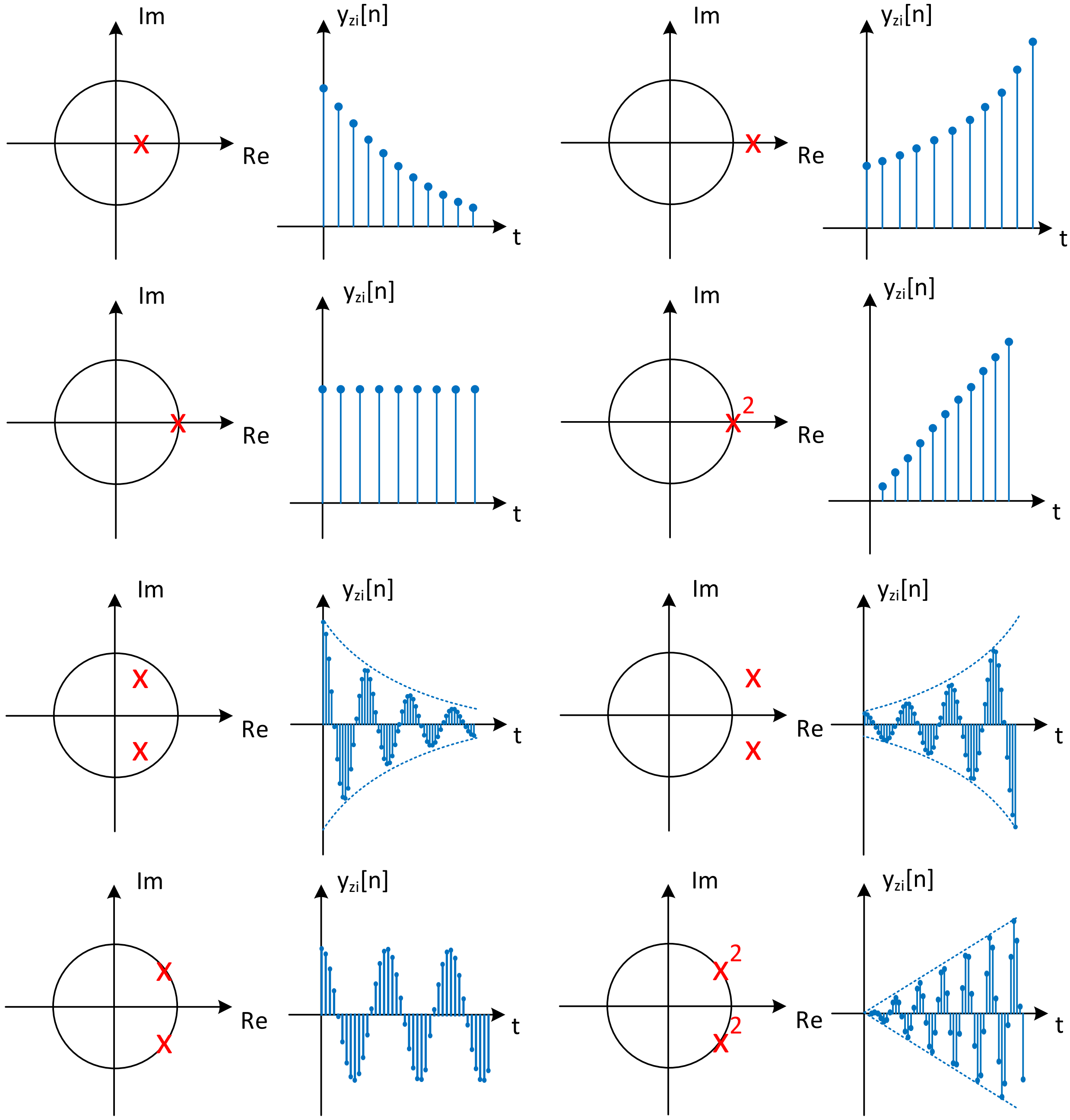
$$|x[n]| < M_x < +\infty \tag{13.329}$$

αλλά οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, η ευστάθεια συνεπάγεται αν

$$|y[n]| = |x[n] * h[n]| = \Big|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]\Big| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]h[n-k]| \tag{13.330}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]||h[n-k]| \leq M_x \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| \not\longrightarrow +\infty \tag{13.331}$$

[6] Το φράγμα του είναι η μονάδα.



Σχήμα 13.10: Θέσεις χαρακτηριστικών ριζών και μορφή απόκρισης μηδενικής εισόδου.

Η τελευταία σχέση ικανοποιείται μόνον όταν

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n-k]| < +\infty \tag{13.332}$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \tag{13.333}$$

Επειδή η κρουστική απόκριση $h[n]$ αποτελείται από όρους που εμφανίζονται στην απόκριση μηδενικής εισόδου, δηλ.

$$h[n] = f\{\gamma_k^n, n^k \gamma_k^n\} \tag{13.334}$$

η Σχέση (13.333) ικανοποιείται μόνον αν

$$\gamma_k < 0, \quad \forall \gamma_k \in \Re \tag{13.335}$$
$$\text{ή} \tag{13.336}$$
$$|\gamma_k| < 0, \quad \forall \gamma_k \in \mathbb{C} \tag{13.337}$$

όπως είδαμε στην Παράγραφο 13.12.1.

Εν κατακλείδει, η ευστάθεια ενός ΓΧΑ συστήματος δεδομένης μιας οποιασδήποτε απολύτως φραγμένης εισόδου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από τις *χαρακτηριστικές ρίζες* του συστήματος!

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να δώσουμε ξανά τον ορισμό της ευστάθειας ενός συστήματος: ένα σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνον αν μια οποιαδήποτε απολύτως φραγμένη είσοδος παράγει απολύτως φραγμένη έξοδο, το οποίο συμβαίνει μόνον όταν οι χαρακτηριστικές ρίζες έχουν μέτρο μικρότερο της μονάδας. Όπως είπαμε, αυτού του είδους η ευστάθεια ονομάζεται **Bounded Input - Bounded Output ευστάθεια**.

Ας συζητήσουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις επάνω στο ζήτημα της ευστάθειας.

Παρατηρήσεις:

1. Σε ένα ευσταθές σύστημα, μια απολύτως φραγμένη είσοδος παράγει πάντα μια απολύτως φραγμένη έξοδο. Όμως, μπορεί κανείς να δείξει ότι σε ένα ευσταθές ή οριακά ευσταθές σύστημα, η έξοδός του είναι μη απολύτως φραγμένη, ακόμα κι αν η είσοδος είναι απολύτως φραγμένη!

2. Όπως μπορείτε να καταλάβετε, ένα ασταθές σύστημα δεν έχει και τόση σημασία στην πράξη - κάθε σύστημα που υλοποιούμε σε υλικό ή λογισμικό πρέπει να είναι ευσταθές. Σκεφτείτε για παράδειγμα έναν απλό ηχείο, το οποίο δέχεται είσοδο από ένα μικρόφωνο. Αν το σύστημα ήταν ασταθές, τότε οποιαδήποτε και οσοδήποτε μικρή είσοδος από το μικρόφωνο, θα παρήγαγε σύντομα μια απόκριση (ήχο) υπερβολικά μεγάλης τιμής με πολύ δυσάρεστα - το λιγότερο! - αποτελέσματα.

3. Τα παραπάνω όμως δε σημαίνουν ότι δεν μπορούν να προκύψουν ασταθή συστήματα στην πράξη. Για παράδειγμα, η θεωρία του *Αυτομάτου Ελέγχου* προσπαθεί να ελέγξει τη συμπεριφορά πραγματικών συστημάτων ‘‘διορθώνοντας ’’ τυχούσες αστάθειες που φυσιολογικά προκύπτουν κατά τη λειτουργία τους. Για παράδειγμα, αν θέλουμε ένα αεροσκάφος να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη πορεία, με συγκεκριμένο υψόμετρο και ταχύτητα, ανεξάρτητα από τις πιθανές ροές ανέμων του περιβάλλοντος που προκαλούν αστάθειες στη συμπεριφορά του, θα πρεπει να έχουμε ένα μηχανισμό ελέγχου της ευστάθειας του συστήματος.

13.13 Αιτιατότητα Συστήματος

Η αιτιατότητα είναι μια πολύ σημαντική ιδιότητα ενός συστήματος, ειδικά αν το σύστημα προορίζεται να υλοποιηθεί σε πραγματικό χρόνο. Όμως πολλά αιτιατά συστήματα διακριτού χρόνου δεν είναι αιτιατά καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν off-line, σε έναν υπολογιστή όπου η είσοδος είναι αποθηκευμένη εξ΄ ολοκλήρου. Εν γένει όμως, ένα αιτιατό σύστημα δεν πρέπει να αποκρίνεται αν δε διεγείρεται, ή με άλλα λόγια, δεν πρέπει να παράγει έξοδο αν δεν του παρασχεθεί μια είσοδος. Προφανώς ένα σύστημα που η απόκριση μηδενικής εισόδου είναι μη μηδενική δεν μπορεί ούτε ΓΧΑ ούτε αιτιατό. Για παράδειγμα, ένα σύστημα με μη μηδενικές αρχικές συνθήκες θα έχει παράξει απόκριση μηδενικής εισόδου πριν του εφαρμόσουμε, π.χ., μια εκθετική συνάρτηση τη χρονική στιγμή $n = n_0$ (δηλ. την $a^n u[n - n_0]$).

Ας επικεντρωθούμε τότε στην αιτιατότητα ενός ΓΧΑ συστήματος.

Σε ένα ΓΧΑ σύστημα, για δυο εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ παράγονται δυο έξοδοι $y_1[n]$ και $y_2[n]$, τότε αυτό είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$x_1[n] = x_2[n] \ \ \forall\, n < n_0 \Rightarrow y_1[n] = y_2[n] \ \ \forall\, n < n_0 \tag{13.338}$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τις συνθήκες αιτιατότητας για ένα σύστημα ως εξής:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος

Ένα σύστημα είναι αιτιατό αν βρίσκεται σε **αρχική ηρεμία**, δηλ.

$$\text{αν } x[n] = 0, \ \ n < n_0$$
$$\text{τότε } y([n] = 0, \ \ n < n_0 \tag{13.339}$$

και για όσους έχουν περάσει από το Κεφάλαιο 4 σας θυμίζει τη φράση "no input, no output". ☺

Μπορούμε άραγε για ένα ΓΧΑ σύστημα να βρούμε μια σχέση αιτιατότητας και κρουστικής απόκρισης, όπως κάναμε για την ευστάθεια; Η απάντηση είναι ναι! Σκεφτείτε ότι αν ένα σύστημα είναι ΓΧΑ και εμφανιστεί στην είσοδό του η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου, τότε γνωρίζουμε ότι η έξοδος θα είναι η κρουστική απόκριση του συστήματος. Η είσοδος όμως εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $n = 0$, και δεν υπήρξε πιο πριν. Άρα ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν $h[n] = 0, \;\; n < 0$.

Οπότε:

Αιτιατότητα ΓΧΑ Συστήματος και Κρουστική Απόκριση

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν

$$h[n] = 0, \;\; n < 0 \tag{13.340}$$