ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/12/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 22/12/2017

Άσκηση 1.

i. Ο μετασχ Z του συστήματος είναι

$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n] \tag{1}$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + \frac{1}{4}z^{-2}Y(z) = X(z) \tag{2}$$

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2} \tag{4}$$

Το σύστημα έχει έναν πόλο δεύτερης τάξης στο $z = 1/2$. Αυτό μας πληροφορεί ότι οι συχνότητες γύρω από το $\omega = 0$ θα λάβουν ενίσχυση, και άρα είναι ένα χαμηλοπερατό φίλτρο. Αφού

$$H_2(e^{j\omega}) = H_1(-e^{j\omega}) \tag{5}$$

δηλ.

$$H_2(z) = H_1(-z) \tag{6}$$

και τότε

$$H_2(z) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})^2} \tag{7}$$

Το σύστημα έχει έναν πόλο δεύτερης τάξης στη θέση $z = -1/2 = 1/2e^{j\pi}$, άρα ενισχύονται οι συχνότητες γύρω από την $\omega = \pi$, άρα το φίλτρο είναι υψιπερατό.

ii. Το σύστημα S_3 είναι το αντίστροφο του S_1, αφού $H_3(e^{j\omega})H_1(e^{j\omega}) = 1$. Άρα $H_3(z)H_1(z) = 1$. Σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα

$$H_3(z) = \frac{1}{H_1(z)} = (1 - \frac{1}{2}z^{-1})^2 \tag{8}$$

οπότε το S_3 έχει ένα δεύτερης τάξης μηδενικό στη θέση $z = 1/2$, και άρα καταστέλει μερικώς τις συχνότητες γυρω από την $\omega = 0$. Άρα το σύστημα χαρακτηρίζεται ως υψιπερατό. Επίσης, το σύστημα S_3 είναι ελάχιστης φάσης, αφού όλοι οι πόλοι και τα μηδενικά βρίσκονται εντός μοναδιαίου κύκλου. Όμως τα μηδενικά του $_3$ δε βρίσκονται σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη, άρα το S_3 δεν είναι γραμμικής φάσης. Εναλλακτικά,

$$h_3[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2] \tag{9}$$

όπου και φαίνεται ότι δεν υπάρχει κάποια από τις γνωστές συμμετρίες των FIR φίλτων γραμμικής φάσης.

Άσκηση 2. Αφού όλα τα συστήματα είναι πραγματικά, τότε όλα έχουν συζυγή ζεύγη μηδενικών και πόλων ή κάποιοι πόλοι ή μηδενικά είναι πραγματικά. Επίσης, αφού όλα είναι αιτιατά, κανένα δε θα έχει πόλο στο άπειρο.

i. Το $H_1(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0.9e^{j\pi/3}$, και όταν $x[n] = u[n]$, ισχύει $\lim_{n\to+\infty} y[n] = 0$:
Αφού το $h_1[n]$ είναι πραγματικό, θα έχει και ένα συζυγή πόλο στη θέση $z = 0.9e^{-\pi/3}$. Όταν $x[n] = u[n]$, τότε

$$Y(z) = H_1(z)X(z) = \frac{H_1(z)}{1 - z^{-1}} \tag{10}$$

Κάνοντας ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, θα βρούμε έναν όρο της μορφής $u[n]$ λόγω του πόλου στη θέση $z = 1$. Αφού το $y[n]$ σβήνει στο μηδέν όταν $n \to +\infty$, αυτός ο όρος πρέπει υποχρεωτικά να ακυρώνεται από κάποιο μηδενικό. Άρα το σύστημα έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 1$. Η διάρκεια της κρουστικής απόκρισης είναι άπειρη. Μόνο αυτά μπορούμε να συνάγουμε από τα δεδομένα, δηλ.

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(1 - 0.9e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j\pi/3}z^{-1})} H_o(z) \tag{11}$$

με $H_o(z)$ την περιγραφή όσων δε γνωρίζουμε για το σύστημα.

ii. Το $H_2(z)$ έχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 0.8e^{j\pi/4}$, έχει γραμμική φάση με $\angle H_2(e^{j\omega}) = -2.5\omega$, και $|H_2(e^{j0})| = 0$:
Η γραμμικότητα της φάσης και η πραγματική κρουστική απόκριση υποδηλώνουν ότι τα μηδενικά πρέπει να έρχονται σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη, έτσι ώστε αν το $z_1 = 0.8e^{j\pi/4}$ είναι μηδενικό, τότε επίσης είναι μηδενικά τα $1/z_1, 1/z_1^*, z_1^*$. Αφού το $h_2[n]$ είναι και αιτιατό και γραμμικής φάσης, πρέπει να είναι ένα από τους γνωστούς τύπους που ξέρουμε. Άρα οι πολοι του συστήματος πρέπει να είναι μόνο στη θέση $z = 0$. Επιπλέον, αφού $\angle H_2(e^{j\omega}) = -2.5\omega$, το σύστημα είναι τύπου II ή IV γραμμικής φάσης. Από αυτό, συμπεραίνουμε ότι η κρουστική απόκριση είναι διάρκειας 6 δειγμάτων, και ότι υπάρχουν 5 μηδενικά, και κατά συνέπεια, έχουμε 5 πόλους στο $z = 0$. Τέλος, αφού $|H_2(e^{j0})| = 0$, πρέπει να έχουμε ένα μηδενικό στο $\omega = 0$, δηλ. στο $z = 1$, κι έτσι καταλήγουμε μόνο στο τύπου IV σύστημα γραμμικής φάσης. Από όλα τα παραπάνω,

$$H_2(z) = A(1 - z^{-1})(1 - z_1)(1 - z_1^*)(1 - 1/z_1)(1 - 1/z_1^*) \tag{12}$$

που ορίζει σχεδόν πλήρως το σύστημα.

iii. Το $H_3(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = 0.8e^{j\pi/4}$ και $|H_3(e^{j\omega})| = 1$ για κάθε ω:
αφού το σύστημα είναι allpass, ξέρουμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη. Επίσης, σίγουρα η κρουστική απόκριση είναι άπειρης διάρκειας και εν γένει μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$H_3(z) = \frac{(z^{-1} - 0.8e^{j\pi/4})(z^{-1} - 0.8e^{-j\pi/4})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})} H_{ap}(z) \tag{13}$$

με $H_{ap}(z)$ ένα allpass σύστημα με πόλους και μηδενικά σε διάφορες θέσεις - η εκφώνηση δεν αναφέρει ότι ο πόλος είναι μοναδικός.

Άσκηση 3.

i. Το σύστημα δεν έχει απαραίτητα γραμμική φάση, αφού η απόκριση φάσης

$$G_1(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{\Im\{H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})\}}{\Re\{H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})\}} \tag{14}$$

δεν είναι απαραίτητα γραμμική. Ως αντιπαράδειγμα, έστω

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \tag{15}$$

$$h_2[n] = 2\delta[n] - 2\delta[n-1] \tag{16}$$

$$g_1[n] = h_1[n] + h_2[n] = 3\delta[n] - \delta[n-1] \tag{17}$$

$$G_1(e^{j\omega}) = 3 - \cos(\omega) + j\sin(\omega) \tag{18}$$

$$\angle G_1(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{\sin(\omega)}{3 - \cos(\omega)} \tag{19}$$

Είναι εμφανές ότι το σύστημα δεν έχει γραμμική φάση, παρ'όλο που τα επιμέρους συστήματα έχουν γραμμική φάση.

ii. Το σύστημα έχει γραμμική φάση αφού

$$G_2(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}) \tag{20}$$
$$\angle G_2(e^{j\omega}) = \angle H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega}) \tag{21}$$

και το άθροισμα δυο γραμμικών αποκρίσεων φάσης δίνει γραμμική απόκριση φάσης.

iii. Το σύστημα δεν έχει απαραίτητα γραμμική φάση. Από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier, το ολοκλήρωμα αυτό (συνέλιξη) δίνει γινόμενο στο πεδίο του χρόνου. Είναι

$$h_1[n] = \delta[n] + \delta[n-1] \tag{22}$$
$$h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2] \tag{23}$$
$$g_3[n] = h_1[n]h_2[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] \tag{24}$$
$$G_3(e^{j\omega}) = 1 + 2\cos(\omega) - 2j\sin(\omega) \tag{25}$$
$$\angle G_3(e^{j\omega}) = \tan^{-1}\frac{2\sin(\omega)}{1+2\cos(\omega)} \tag{26}$$

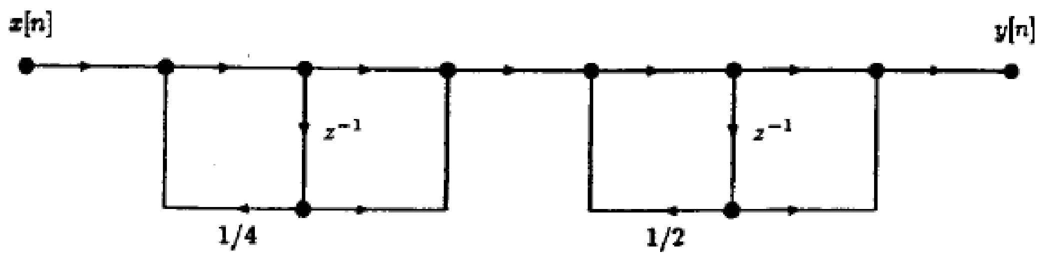
το οποίο δεν έχει γραμμική φάση.

Άσκηση 4.
Η συνάρτηση μεταφοράς

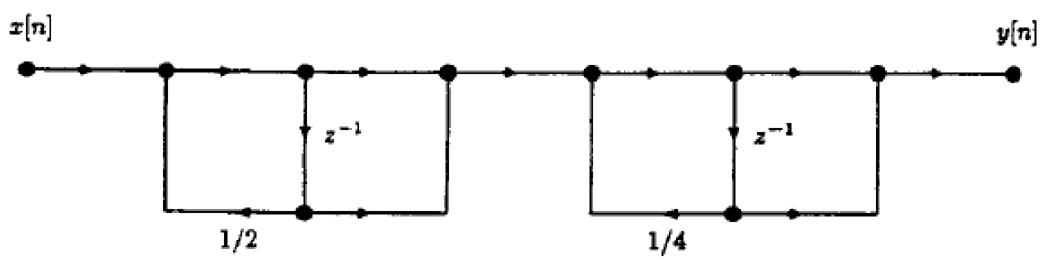
$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}} \tag{27}$$

μπορεί να γραφεί υλοποιηθεί με τους ακόλουθους δυο τρόπους όπως στο Σχήμα 1.

$$H(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)\left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right).$$

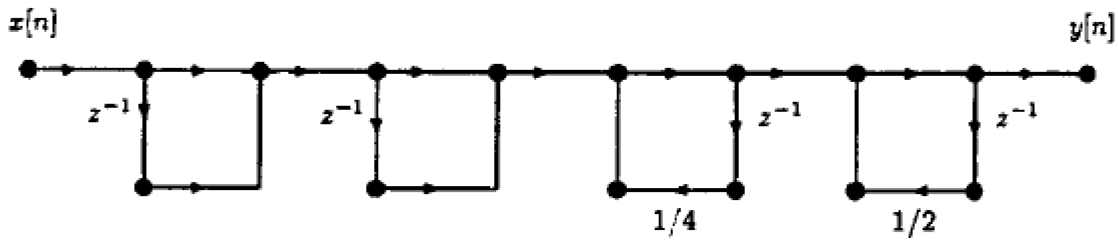


$$H(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right).$$



Σχήμα 1: *Σχήμα Άσκησης 4α.*

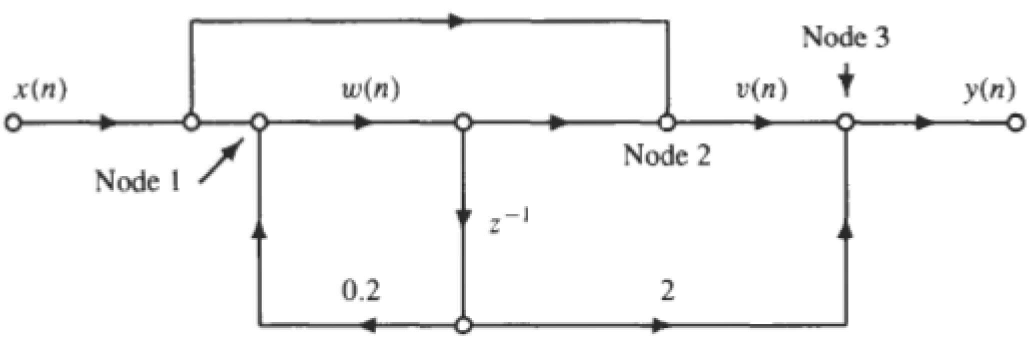
Αυτές είναι υλοποιήσεις Direct Form II σε σειρά, όμως θα μπορούσε κανείς να υλοποιήσει Direct Form I σε σειρά, όπως στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2: *Σχήμα Άσκησης 4β.*

Οι τρόποι που μπορούμε να αναδιατάξουμε τα τέσσερα συστήματα πρώτης τάξης του Σχήματος 2 είναι 12 το πλήθος.

Άσκηση 5.
Ο γράφος της εκφώνησης μπορεί να τροποποιηθεί με ενδιάμεσες μεταβλητές για ευκολία όπως ο γράφος του Σχήματος 3. Για τους τρεις σημειωμένους κόμβους του Σχήματος 3, έχουμε τις εξισώσεις



Σχήμα 3: *Γράφος Άσκησης 5.*

$$w[n] = x[n] + 0.2w[n-1] \tag{28}$$

$$u[n] = x[n] + w[n] \tag{29}$$

$$y[n] = u[n] + 2w[n-1] \tag{30}$$

και πηγαίνοντας στο χώρο του Z, έχουμε

$$W(z) = \frac{1}{1-0.2z^{-1}}X(z) \tag{31}$$

ενώ για τη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$U(z) = X(z) + W(z) = X(z) + \frac{1}{1-0.02z^{-1}}X(z) = \frac{2-0.2z^{-1}}{1-0.2z^{-1}}X(z) \tag{32}$$

Τέλος, με μετασχ. Z στην τρίτη εξίσωση, έχουμε

$$Y(z) = V(z) + 2z^{-1}W(z) = \frac{2+1.8z^{-1}}{1-0.2z^{-1}}X(z) \tag{33}$$

Οπότε

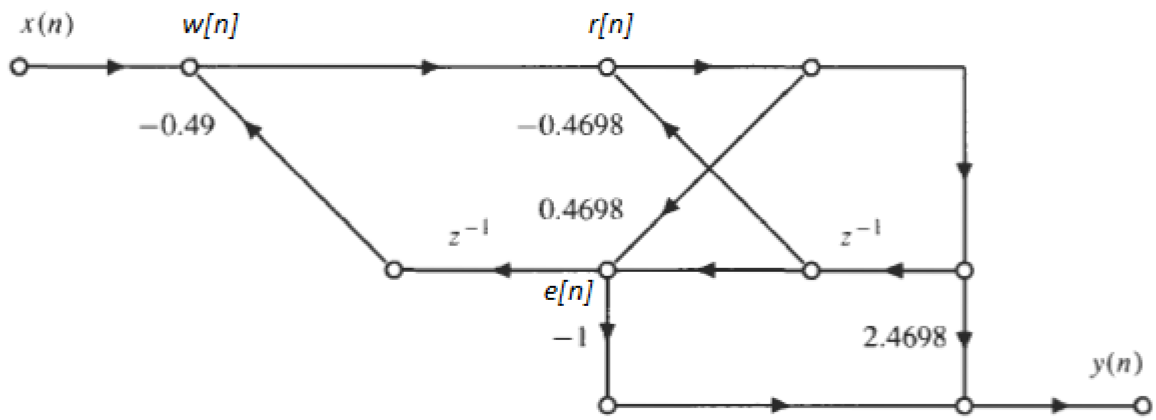
$$H(z) = \frac{2 + 1.8z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}} \tag{34}$$

Η κρουστική απόκριση, ανάλογα την αιτιατότητα ή μη του συστήματος, είναι

$$h[n] = 2(0.2)^n u[n] + 1.8(0.2)^{n-1} u[n-1] \tag{35}$$
$$h[n] = -2(0.2)^n u[-n-1] - 1.8(0.2)^{n-1} u[-n] \tag{36}$$

Άσκηση 6.

Προσθέτοντας ενδιάμεσες μεταβλητές, έχουμε τον παρακάτω γράφο του Σχήματος 4. Οι εξισώσεις του δίνονται ως



Σχήμα 4: *Γράφος Άσκησης 6.*

$$w[n] = x[n] - 0.49e[n-1] \tag{37}$$
$$r[n] = w[n] - 0.4698r[n-1] \tag{38}$$
$$e[n] = 0.4698r[n] + r[n-1] \tag{39}$$
$$y[n] = 2.4698r[n] - e[n] \tag{40}$$

και στο χώρο του Z, είναι

$$W(z) = X(z) - 0.49z^{-1}E(z) \tag{41}$$
$$R(z) = W(z) - 0.4698z^{-1}R(z) \tag{42}$$
$$E(z) = 0.4698R(z) + z^{-1}R(z) \tag{43}$$
$$Y(z) = 2.4698R(z) - E(z) \tag{44}$$

και ισοδύναμα

$$W(z) = X(z) - 0.49z^{-1}(0.4698R(z) + z^{-1}R(z)) \tag{45}$$
$$W(z) = R(z)(1 + 0.4698z^{-1}) \tag{46}$$
$$Y(z) = 2R(z) - z^{-1}R(z) \tag{47}$$

δηλ.

$$X(z) = R(z)(1 + 0.4698z^{-1}) + 0.49z^{-1}(0.4698R(z) + z^{-1}R(z)) \tag{48}$$
$$Y(z) = (2 - z^{-1})R(z) \tag{49}$$

και τέλος

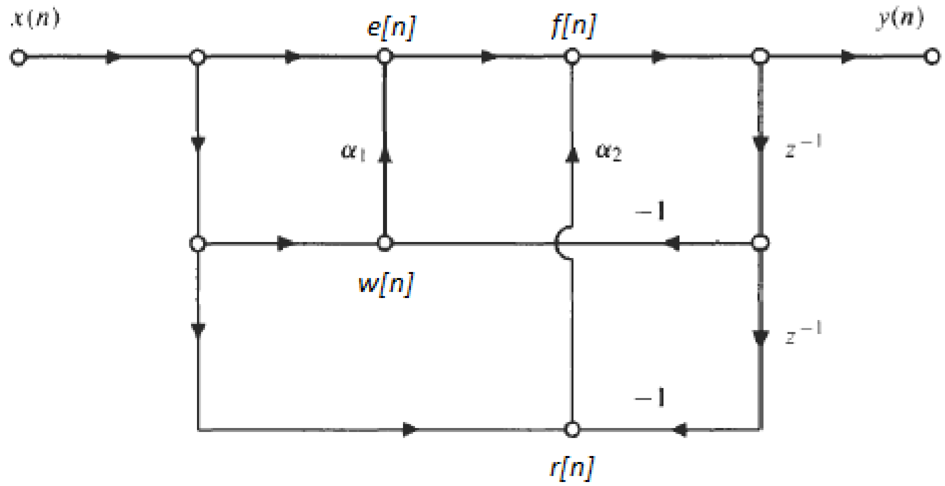
$$X(z) = R(z)(1 + 0.4698z^{-1} + 0.23z^{-1} + 0.49z^{-2}) \tag{50}$$

$$Y(z) = (2 - z^{-1})\frac{1}{1 + 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2}}X(z) \tag{51}$$

οπότε

$$H(z) = \frac{2 - z^{-1}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2}} \tag{52}$$

Άσκηση 7.
Με χρήση ενδιαμεσων μεταβλητών, έχουμε τον παρακάτω γράφο του Σχήματος 5. Οι εξισώσεις στο πεδίο του χρόνου



Σχήμα 5: *Γράφος Άσκησης 7.*

είναι

$$y[n] = f[n] \tag{53}$$

$$e[n] = x[n] + a_1 w[n] \tag{54}$$

$$f[n] = e[n] + a_2 r[n] \tag{55}$$

$$r[n] = x[n] - f[n-2] \tag{56}$$

$$w[n] = x[n] - f[n-1] \tag{57}$$

και βλέποντας ότι η μεταβλητή $f[n]$ είναι περιττή, έχουμε

$$e[n] = x[n] + a_1 w[n] \tag{58}$$

$$y[n] = e[n] + a_2 r[n] \tag{59}$$

$$r[n] = x[n] - y[n-2] \tag{60}$$

$$w[n] = x[n] - y[n-1] \tag{61}$$

Στο πεδίο του μετασχ. Ζ είναι

$$E(z) = X(z) + a_1 W(z) \tag{62}$$

$$Y(z) = E(z) + a_2 R(z) \tag{63}$$

$$R(z) = X(z) - z^{-2}Y(z) \tag{64}$$

$$W(z) = X(z) - z^{-1}Y(z) \tag{65}$$

και λύνοντας έχουμε

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= X(z) + a_1(X(z) - z^{-1}Y(z)) + a_2(X(z) - z^{-2}Y(z)) && (66)\\
&= X(z) + a_1X(z) + a_1z^{-1}Y(z) + a_2X(z) - a_2z^{-2}Y(z) && (67)\\
Y(z) + a_2z^{-2}Y(z) - a_1z^{-1}Y(z) &= X(z) + a_1X(z) + a_2X(z) && (68)\\
Y(z)(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}) &= X(z)(1 + a_1 + a_2) && (69)\\
H(z) &= \frac{1 + a_1 + 1_2}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} && (70)
\end{aligned}
$$

που είναι και το ζητούμενο.