ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/11/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/12/2017

Άσκηση 1.
Στην τάξη, ορίσαμε την καθυστέρηση ομάδας (group delay) ως

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}\angle H(e^{j\omega}) \tag{1}$$

με $\angle H(e^{j\omega})$ την ξετυλιγμένη απόκριση φάσης του ΓΧΑ συστήματος. Δείξαμε ότι ισούται με την καθυστέρηση (σε δείγματα) που δέχονται διάφορες συχνοτικές συνιστώσες ενός σήματος εισόδου όταν περνά από ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$. Όταν η απόκριση φάσης του συστήματος είναι γραμμική, τότε η καθυστέρηση ομάδας είναι σταθερή, και όλες οι συχνότητες της εισόδου καθυστερούν το ίδιο πλήθος δειγμάτων στην έξοδο. Όταν η φάση είναι μη γραμμική, τότε η καθυστέρηση ομάδας μας πληροφορεί για την καθυστέρηση διαφόρων ομάδων (groups) συχνοτήτων στην έξοδο. Ας το δούμε πιο συγκεκριμένα.

(α΄) Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$. Έστω ότι η είσοδος είναι ένα σήμα της μορφής

$$x[n] = w[n]\cos(\omega_0 n) \tag{2}$$

Υποθέστε επίσης ότι το $w[n]$ είναι χαμηλοπερατής φύσεως και στενής ζώνης: αυτό σημαίνει ότι ο μετασχ. Fourier του είναι ένας σχετικά στενός και "ψηλός" λοβός γύρω από το $\omega = 0$, δηλ.

$$W(e^{j\omega}) = 0, \;\; |\omega| > \Delta, \;\; \Delta \ll \omega_0 \tag{3}$$

Με βάση το παραπάνω, ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ θα είναι επίσης στενής ζώνης γύρω από τη συχνότητα $\omega = \pm\omega_0$. Χρησιμοποιήστε ιδιότητες του μετασχ. Fourier και βρείτε τον, και δείξτε ότι όντως ισχύει το παραπάνω για το σήμα $X(e^{j\omega})$.

(β΄) Αν το ΓΧΑ σύστημα έχει αποκρίσεις

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \;\; \forall\omega \tag{4}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \phi_0, & -\pi < \omega < 0 \\ -\phi_0, & 0 \le \omega \le \pi \end{cases} \tag{5}$$

τότε δείξτε ότι

$$y[n] = w[n]\cos(\omega_0 n - \phi_0) \tag{6}$$

(γ΄) Αν το ΓΧΑ σύστημα έχει αποκρίσεις

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \;\; \forall\omega \tag{7}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} \phi_0 - \omega n_d, & -\pi < \omega < 0 \\ -\phi_0 - \omega n_d, & 0 \le \omega \le \pi \end{cases} \tag{8}$$

δείξτε ότι

$$y[n] = w[n - n_d]\cos(\omega_0 n - \phi_0 - \omega_0 n_d) \tag{9}$$

Δείξτε επίσης ότι η έξοδος $y[n]$ μπορεί να γραφεί και ως

$$y[n] = w[n - n_d] \cos(\omega_0 n - \phi_1) \tag{10}$$

με $-\phi_1$ η φάση του συστήματος στη συχνότητα $\omega = \omega_0$.

(δ΄) Αν πέραν της καθυστέρησης ομάδας $\tau_g(e^{j\omega})$ σας δίνεται ότι η *καθυστέρηση φάσης* $\tau_p(e^{j\omega})$ ισούται με

$$\tau_p = -\frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega} \tag{11}$$

τότε δείξτε - βασισμένοι/ες στα προηγούμενα αποτελέσματά σας - ότι αν η απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ είναι περίπου μονάδα γύρω από τη συχνότητα $\pm\omega_0$, και ότι αν οι τιμές $\tau_g(e^{j\omega_0})$ και $\tau_p(e^{j\omega_0})$ είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε

$$y[n] = w[n - \tau_g(e^{j\omega_0})] \cos(\omega_0(n - \tau_p(e^{j\omega_0}))) \tag{12}$$

Άσκηση 2.

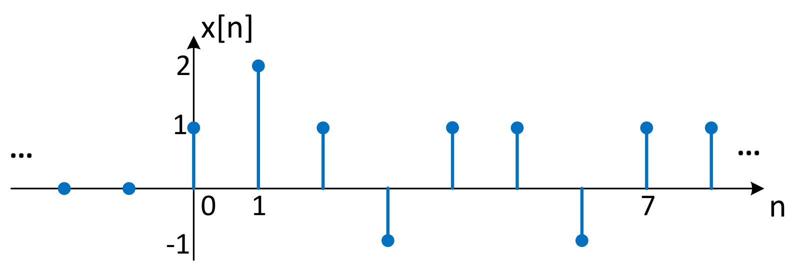
Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \tag{13}$$

(α΄) Έστω ότι το σύστημα είναι ευσταθές. Βρείτε την έξοδο $y[n]$ όταν η είσοδός του είναι $x[n] = u[n]$.

<u>Απ:</u> $y[n] = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{5}(3)^n u[-n-1] - u[n]$

(β΄) Έστω ότι η περιοχή σύγκλισης του $H(z)$ περιλαμβάνει το $z = \infty$. Βρείτε την τιμή του $y[2]$ όταν το $x[n]$ δίνεται όπως στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 2.

<u>Απ:</u> $y[0] = 0, \;\; y[1] = 0, \;\; y[2] = 1$

(γ΄) Έστω ότι θέλουμε να ανακτήσουμε το $x[n]$ από το $y[n]$ περνώντας το τελευταίο από ένα αντίστροφο σύστημα με κρουστική απόκριση $h_i[n]$. Βρείτε την. Εξαρτάται η μορφή της από το πεδίο σύγκλισης του $H(z)$;

<u>Απ:</u> $h_i[n] = \delta[n+2] - \frac{7}{2}\delta[n+1] + \frac{3}{2}\delta[n]$

Άσκηση 3.
Σας δίνονται τα παρακάτω FIR συστήματα.

$$H_1(z) = 6 + z^{-1} - z^{-2} \tag{14}$$
$$H_2(z) = 1 - z^{-1} - 6z^{-2} \tag{15}$$
$$H_3(z) = 1 - \frac{5}{2}z^{-1} - \frac{3}{2}z^{-2} \tag{16}$$
$$H_4(z) = 1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} \tag{17}$$

Βρείτε ποιό από τα παραπάνω είναι ελάχιστης φάσης. Δικαιολογήστε την επιλογή σας επαρκώς.

Απ: Προφανώς πρέπει να τη βρείτε μόνοι/ες σας! :)

Άσκηση 4.
Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 4z^{-1}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.3z^{-1})} \tag{18}$$

Διασπάστε τη σε έναν όρο ελάχιστης φάσης και έναν όρο all-pass, σχεδιάζοντας τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών τους. Περιγράψτε ακριβώς τα βήματα που ακολουθείτε.

Απ: $H(z) = \dfrac{z^{-1} - 4}{(1 - \frac{3}{10}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \times \dfrac{z^{-1} - \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$

Άσκηση 5.
Η συνάρτηση μεταφοράς $H_{II}(z)$ αντιπροσωπεύει ένα Τύπου ΙΙ FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης με κρουστική απόκριση $h_{II}[n]$. Αυτό το σύστημα συνδέεται σε σειρά με ένα άλλο ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(z) = 1 - z^{-1}$, για να φτιάξουν τελικά ένα συνολικό σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ και κρουστική απόκριση $h[n]$. Δείξτε ότι το συνολικό σύστημα είναι γενικευμένης γραμμικής φάσης και καθορίστε τι Τύπου είναι.

Απ: Τύπου ΙΙΙ.