ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/11/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/12/2017

Άσκηση 1.

(α΄) Είναι

$$F\{x[n]\} = F\{w[n]\cos(\omega_0 n)\} = \frac{1}{2\pi}F\{w[n]\} * F\{\cos(\omega_0 n)\} \tag{1}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\left(W(e^{j\omega}) * \Big(\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)\Big)\right) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{1}{2}W(e^{j(\omega+\omega_0)}) \tag{3}$$

Πράγματι λοιπόν αφού ισχύει ότι

$$W(e^{j\omega}) = 0,\ \ |\omega| > \Delta,\ \ \Delta \ll \omega_0 \tag{4}$$

ο μετασχ. Fourier $X(e^{j\omega})$ θα είναι επίσης στενής ζώνης γύρω από τη συχνότητα $\omega = \pm\omega_0$.

(β΄) Είναι

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j\phi_0}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{1}{2}e^{j\phi_0}W(e^{j(\omega+\omega_0)}) \tag{5}$$

και άρα

$$y[n] = \frac{1}{2}w[n]e^{j(\omega_0 n-\phi_0)} + \frac{1}{2}w[n]e^{-j(\omega_0 n-\phi_0)} = w[n]\cos(\omega_0 n - \phi_0) \tag{6}$$

(γ΄) Σε αυτο το ερώτημα

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j\phi_0}e^{-j\omega n_d}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) + \frac{1}{2}e^{j\phi_0}e^{-j\omega n_d}W(e^{j(\omega-\omega_0)}) \tag{7}$$

με

$$y[n] = \delta[n-n_d] * \left(\frac{1}{2}w[n]e^{j(\omega_0 n-\phi_0)} + \frac{1}{2}w[n]e^{-j(\omega_0 n-\phi_0)}\right) \tag{8}$$

$$= \delta[n-n_d] * w[n]\cos(\omega_0 n - \phi_0) \tag{9}$$

$$= w[n-n_d]\cos(\omega_0 n - \omega_0 n_d - \phi_0) \tag{10}$$

Θέτοντας $\phi_1 = \omega_0 n_d + \phi_0$ έχουμε

$$y[n] = w[n-n_d]\cos(\omega_0 n - \phi_1) \tag{11}$$

(δ΄) Αφού

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d}{d\omega}(-\phi_0 - \omega n_d) = n_d \tag{12}$$

$$\tau_p(e^{j\omega}) = -\frac{1}{\omega}(-\phi_0 - \omega n_d) = \frac{\phi_0}{\omega} - n_d \tag{13}$$

τότε

$$y[n] = w[n - \tau_g(e^{j\omega_0})]\cos(\omega_0(n - \tau_p(e^{j\omega}))) \tag{14}$$

Άσκηση 2.

(α') Είναι

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-3z^{-1})} \tag{15}$$

κι αφού είναι ευσταθές τότε το πεδίο σύγκλισής του περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο και άρα

$$R_H : \left\{\frac{1}{2} < |z| < 3\right\}$$

Είναι

$$x[n] = u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \ |z| > 1 \tag{16}$$

και άρα

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{4}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{5}\frac{1}{1-3z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}}, \ 1 < |z| < 3 \tag{17}$$

αφού εφαρμόσαμε ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα. Αντιστρέφοντας στο χρόνο, έχουμε

$$y[n] = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{5}3^n u[-n-1] - u[n] \tag{18}$$

(β') Αφού η περιοχή σύγκλισης περιλαμβάνει το άπειρο, τότε το $h[n]$ είναι αιτιατό. Δεδομένου ότι και το $x[n]$ είναι αιτιατό, θα είναι και το $y[n]$ αιτιατό. Άρα

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-3z^{-1})} \tag{19}$$

$$Y(z) - \frac{7}{2}z^{-1}Y(z) + \frac{3}{2}Y(z)z^{-2} = z^{-2}X(z) \tag{20}$$

και στο πεδίο του χρόνου θα είναι

$$y[n] - \frac{7}{2}y[n-1] + \frac{3}{2}y[n-2] = x[n-2] \tag{21}$$

Αφού $y[n] = 0, \ n < 0$, τότε με αναδρομικό τρόπο βρίσκουμε ότι

$$y[0] = 0, \ y[1] = 0, \ y[2] = 1 \tag{22}$$

(γ') Το αντίστροφο σύστημα θα είναι το

$$H_i(z) = \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-3z^{-1})}{z^{-2}} = (z-1/2)(z-3) = z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2} \tag{23}$$

με πεδίο σύγκλισης ολόκληρο το z-επίπεδο πλην του άπειρου, και άρα

$$h_i[n] = \delta[n+2] - \frac{7}{2}\delta[n+1] + \frac{3}{2}\delta[n] \tag{24}$$

Άσκηση 3.

Τα δοθέντα συστηματα γράφονται ως

$$H_1(z) = 6 + z^{-1} - z^{-2} = (1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1}) \tag{25}$$

$$H_2(z) = 1 - z^{-1} - 6z^{-2} = (1-3z^{-1})(1+2z^{-1}) \tag{26}$$

$$H_3(z) = 1 - \frac{5}{2}z^{-1} - \frac{3}{2}z^{-2} = (1-3z^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1}) \tag{27}$$

$$H_4(z) = 1 + \frac{5}{3}z^{-1} - \frac{2}{3}z^{-2} = (1+2z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1}) \tag{28}$$

Παρατηρούμε ότι ελάχιστης φάσης είναι το $H_1(z)$, εφ'οσον έχει όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Άσκηση 4.
Η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1-4z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-0.3z^{-1})} \tag{29}$$

γράφεται ως

$$H(z) = \frac{z(z-4)}{(z-0.5)(z-0.3)} \tag{30}$$

και άρα έχει δυο μηδενικά στις θέσεις $z=0$, $z=4$, και δυο πόλους στις θέσεις $z=1/2$ και $z=3/10$. Προφανώς το μηδενικό εκτός μοναδιαίου κύκλου ($z=4$) θα πρέπει να δημιουργήσει ένα σύστημα all-pass, ως συζυγές αμοιβαίο ζεύγος με τον πόλο $z=1/4$, δηλ.

$$H_{ap}(z) = \frac{1-4z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \tag{31}$$

Το παραπάνω σύστημα δεν έχει μοναδιαία απόκριση πλάτους, οπότε

$$H_{ap}(z) = -4\frac{z^{-1}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \tag{32}$$

Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει τα υπόλοιπα στοιχεία του αρχικού συστήματος, με την προσθήκη ενός μηδενικού στη θέση $z=1/4$ που θα ακυρώνει τον πόλο του all-pass στην ίδια θέση. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-0.3z^{-1})} \tag{33}$$

και με τη μεταφορά της σταθεράς -4 από το all-pass σύστημα, θα είναι

$$H_{min}(z) = \frac{z^{-1}-4}{(1-0.5z^{-1})(1-0.3z^{-1})},\ \ H_{ap}(z) = \frac{z^{-1}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \tag{34}$$

Άσκηση 5.
Το Τύπου ΙΙ σύστημα $H_{II}(z)$ έχει γενικευμένη γραμμική φάση. Άρα μπορεί να γραφεί ως

$$H_{II}(e^{j\omega}) = A_{II}(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2} \tag{35}$$

με M περιττό ακέραιο και $A_{II}(e^{j\omega})$ το "ψευδοπλάτος ". Το σύστημα $G(z) = 1 - z^{-1}$ είναι Τύπου IV σύστημα γραμμικής φάσης, αφού

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= 1 - e^{-j\omega} && (36)\\ &= e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) && (37)\\ &= 2\sin(\omega/2)e^{-j\omega/2+j\pi/2} && (38)\\ &= A_{IV}(e^{j\omega})e^{-j\omega/2+j\pi/2} && (39) \end{aligned}$$

δηλ.

$$A_{IV}(e^{j\omega}) = 2\sin(\omega/2) \tag{40}$$

και

$$\angle G(e^{j\omega}) = -\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{2} \tag{41}$$

Η σύνδεση σε σειρά των δυο συστημάτων δίνει ένα σύστημα γραμμικής φάσης $H(z)$.

$$H(e^{j\omega}) = A_{II}(e^{j\omega})A_{IV}(e^{j\omega})e^{-j\omega M/2}e^{-j\omega/2+j\pi/2} = A'(e^{j\omega})e^{j\omega M'/2+j\pi/2} \tag{42}$$

με $A'(e^{j\omega})$ να είναι το νεό ψευδοπλάτος και M' να είναι άρτιος. Άρα το σύστημα είναι Τύπου ΙΙΙ.