ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 9/11/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 21/11/2017

Άσκηση 1.
Η είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα δίνεται ως

$$x[n] = 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + 8\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right) \tag{1}$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος, $y[n]$, αν η κρουστική του απόκριση είναι

$$h[n] = 4\frac{\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)}{(n-1)\pi} \tag{2}$$

Εκμεταλλευτείτε την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης, το ζεύγος Fourier για το γνωστό σας χαμηλοπερατό φίλτρο

$$h_1[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \longleftrightarrow H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \tag{3}$$

και χρησιμοποιήστε γνωστές ιδιότητες του μετασχ. Fourier.

<u>Απ:</u> $y[n] = 8\cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right)$

Άσκηση 2.
Χρησιμοποιώντας αποκλειστικά ιδιότητες του μετασχ. Fourier, δείξτε ότι

(α΄) αν

$$X(e^{j\omega}) = \frac{3}{(1-0.8e^{-j\omega})^5} \tag{4}$$

τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 3 \times 5^5 \tag{5}$$

(β΄) αν

$$X(e^{j\omega}) = \cos^3(3\omega) \tag{6}$$

τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n] = -1 \tag{7}$$

(γ΄)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-0.3e^{-j\omega}} e^{j\omega} d\omega = 0.6\pi \tag{8}$$

Άσκηση 3.

(α΄) Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$2y[n] - y[n-2] = x[n-1] + 3x[n-2] + 2x[n-3] \tag{9}$$

Βρείτε την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$.

(β΄) Αν δυο συστήματα

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \tag{10}$$

$$h_2[n] = \delta[n] - \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} \tag{11}$$

συνδέονται σε σειρά μεταξύ τους, βρείτε την απόκριση πλάτους του συνολικού συστήματος, $|H(e^{j\omega})|$.

<u>Απ:</u> (α) $H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{2}e^{-j\omega}\dfrac{1 + 3e^{-j\omega} + 2e^{-j2\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\omega}}$

(β) $|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0, & \text{αλλού} \\ 1, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \pi \end{cases}$

Άσκηση 4.

Βρείτε το μετασχ. Z για τα παρακάτω σήματα. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ιδιότητες του μετασχ. Z για να κάνετε τη λύση σας απλούστερη και ευκολότερη.

(α΄) $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n]$

(β΄) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] + 3^n u[-n-1]$

(γ΄) $x[n] = \alpha^{|n|}$, $|\alpha| < 1$

<u>Απ:</u> (α) $X(z) = \dfrac{1}{1-3z}$, $|z| < \dfrac{1}{3}$

(β) $X(z) = \dfrac{4z^2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \dfrac{1}{1 - 3z^{-1}}$, $\dfrac{1}{2} < |z| < 3$

(γ) $X(z) = \dfrac{1 - \alpha^2}{(1 - az^{-1})(1 - az)}$, $\alpha < |z| < \dfrac{1}{\alpha}$

Άσκηση 5.

Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων

$$x[n] = 3^n u[-n] \tag{12}$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{13}$$

μέσω ιδιοτήτων και γνωστών ζευγών του μετασχ. Z.

<u>Απ:</u> $y[n] = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{6}{5}3^n u[-n-1]$

Άσκηση 6.

Έστω το σήμα $x[n]$ με μετασχ. Z ως

$$X(z) = \frac{1}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} \tag{14}$$

με άγνωστο πεδίο σύγκλισης.

(α΄) Βρείτε *όλους* τους πόλους και *όλα* τα μηδενικά του.

(β΄) Σχεδιάστε το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

(γ΄) Ποιά είναι τα πιθανά πεδία σύγκλισης του παραπάνω μετασχ. Z;

(δ΄) Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχ. Z (δηλ. το σήμα στο χρόνο $x[n]$) για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης.

(ε΄) Για ποιό πεδίο σύγκλισης από όσα βρήκατε μπορεί κανείς να υπολογίσει το μετασχ. Fourier από το μετασχ. Z;

Απ: (δ) $x[n] = \begin{cases} 2(-2)^n u[n] - (-1)^n u[n] \\ (-2)^{n+1} u[-n-1] - (-1)^n u[n] \\ (-2)^{n+1} u[-n-1] + (-1)^n u[-n-1] \end{cases}$