ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 9/11/2017 Ημερομηνία Παράδοσης: 23/11/2017

Άσκηση 1.

Το σύστημα $h[n]$ είναι μια καθυστερημένη κατά $n_0 = 1$ δείγματα και κλιμακωμένη κατά $A = 4$ έκδοση του γνωστού χαμηλοπερατού φίλτρου

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \longleftrightarrow H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

Από τις ιδιότητες του μετασχ. Fourier έχουμε

$$h[n] = 4h_{lp}[n-1] \longleftrightarrow H(e^{j\omega}) = 4H_{lp}(e^{j\omega})e^{-j\omega} = \begin{cases} 4e^{-j\omega}, & |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{2}$$

με

$$|H(e^{j\omega})| = 4 \tag{3}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega \tag{4}$$

για $|\omega| < \frac{\pi}{2}$.

Είναι εμφανές ότι το φίλτρο αυτό κόβει συχνότητες που είναι εκτός του διαστήματος $(-\pi/2, \pi/2)$. Άρα η συνιστώσα $8\sin\left(\frac{3\pi n}{4} - \frac{\pi}{5}\right)$ δε θα περάσει στην έξοδο. Άρα στην έξοδο θα έχουμε (από την ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης) ότι

$$y[n] = 2|H(e^{j\pi/4})|\cos\left(\frac{\pi n}{4} + \angle H(e^{j\pi/4})\right) \tag{5}$$

$$= 2 \times 4\cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{6}$$

$$= 8\cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right) \tag{7}$$

Άσκηση 2.

(α΄) Αν

$$X(e^{j\omega}) = \frac{3}{(1-0.8e^{-j\omega})^5} \tag{8}$$

τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\Big]_{\omega=0} = X(e^{j\omega})\Big]_{\omega=0} \tag{9}$$

Άρα

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = X(e^{j0}) = \frac{3}{(1-0.8)^5} = \frac{3}{0.2^5} = 3 \times 5^5 \tag{10}$$

(β') Αν

$$X(e^{j\omega}) = \cos^3(3\omega) \tag{11}$$

τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{j\omega n}\Big]_{\omega=\pi} = X(e^{j\pi}) \tag{12}$$

Άρα

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n] = X(e^{j\pi}) = \cos^3(3\pi) = (-1)^3 = -1 \tag{13}$$

(γ') Είναι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-0.3e^{-j\omega}} e^{j\omega} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1-0.3e^{-j\omega}} e^{j\omega n} d\omega\Big]_{n=1} = 2\pi(0.3)^n u[n]\Big]_{n=1} = 2\pi 0.3 = 0.6\pi \tag{14}$$

Άσκηση 3.

(α') Είναι

$$2Y(e^{j\omega}) - e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}X(e^{j\omega}) + 3e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) + 2e^{-j3\omega}X(e^{j\omega}) \tag{15}$$

και διαιρώντας με $X(e^{j\omega})$ έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}e^{-j\omega}\frac{1+3e^{-j\omega}+2e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j2\omega}} \tag{16}$$

(β') Τα συστήματα σε σειρά δίνουν συνολική απόκριση πλάτους ίση με το γινόμενο των επιμέρους αποκρίσεων πλάτους. Το πρώτο σύστημα έχει απόκριση πλάτους

$$|H_1(e^{j\omega})| = \left|\frac{e^{-j\omega}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right| = \frac{|e^{-j\omega}-\frac{1}{2}|}{|1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}|} = 1 \tag{17}$$

αφού ο αριθμητής $|e^{-j\omega}-\frac{1}{2}| = |e^{-j\omega}||1-\frac{1}{2}e^{j\omega}| = |1-\frac{1}{2}e^{j\omega}| = |1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}|$, ως συζυγείς παραστάσεις. Το δεύτερο σύστημα έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H_2(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}) \tag{18}$$

με

$$H_{lp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \pi \end{cases} \tag{19}$$

Άρα η απόκριση πλάτους του θα είναι

$$|H_2(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 1, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{20}$$

Συνολικά λοιπόν

$$|H_1(e^{j\omega})||H_2(e^{j\omega})| = 1 \times |H_2(e^{j\omega})| = \begin{cases} 0, & |\omega| < \frac{\pi}{4} \\ 1, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \pi \end{cases} \tag{21}$$

Άσκηση 4.

(α΄) Από τη σχέση

$$y[n] = x[-n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{-n} u[n] \longleftrightarrow Y(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}}, \ |z| > 3 \tag{22}$$

έχουμε ότι

$$Y(z) = X(z^{-1}) = \frac{1}{1-3z}, \ |z| < \frac{1}{3} \tag{23}$$

(β΄) Έχουμε

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n+2] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u[n+2] \longleftrightarrow \frac{4z^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \ |z| > \frac{1}{2} \tag{24}$$

Όμοια,

$$3^n u[-n-1] \longleftrightarrow -\frac{1}{1-3z^{-1}}, \ |z| < 3 \tag{25}$$

Άρα

$$X(z) = \frac{4z^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1-3z^{-1}}, \ \frac{1}{2} < |z| < 3 \tag{26}$$

(γ΄) Έχουμε

$$x[n] = a^{|n|} = a^n u[n] + a^{-n} u[-n] - \delta[n] \tag{27}$$

και εφαρμόζοντας μετασχ. Z και ιδιότητες έχουμε

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-az} - 1 = \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}, \ a < |z| < \frac{1}{a} \tag{28}$$

Άσκηση 5.

Θα έχουμε

$$x[n] = 3^n u[-n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z} = -\frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}}, \ |z| < 3 \tag{29}$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \longleftrightarrow H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{30}$$

και άρα

$$Y(z) = -\frac{3z^{-1}}{1-3z^{-1}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{με} \ \frac{1}{2} < |z| < 3 \tag{31}$$

και με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα έχουμε

$$Y(z) = \frac{A}{1-3z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{με} \ \frac{1}{2} < |z| < 3 \tag{32}$$

$$= \frac{-\frac{6}{5}}{1-3z^{-1}} + \frac{\frac{6}{5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{με} \ \frac{1}{2} < |z| < 3 \Longleftrightarrow \ \{|z| > \frac{1}{2}\} \cap \{|z| < 3\} \tag{33}$$

Στο πεδίο του χρόνου έχουμε, χρησιμοποιώντας γνωστά ζεύγη, ότι

$$y[n] = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{6}{5}3^n u[-n-1] \tag{34}$$

Άσκηση 6.

Για το σήμα

$$X(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}, \ R_x \tag{35}$$

έχουμε

(α΄) Το σήμα γράφεται ως

$$X(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{z^2}{(z+2)(z+1)} \tag{36}$$

άρα έχει δυο πόλους στις θέσεις $z=-1, z=-2$ και δυο μηδενικά στο $z=0$.

(β΄) Εύκολο. :)

(γ΄) Αφού το σήμα έχει δυο πόλους επάνω στον πραγματικό άξονα, θα έχει τρια πιθανά πεδία σύγκλισης.

- $|z| > 2$
- $|z| < 1$
- $1 < |z| < 2$

(δ΄) Με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα, το $X(z)$ γράφεται ως

$$X(z) = \frac{1}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{A}{1+2z^{-1}} + \frac{B}{1+z^{-1}} = \frac{2}{1+2z^{-1}} - \frac{1}{1+z^{-1}} \tag{37}$$

Για τα αντίστοιχα πεδία σύγκλισης όπως αναφέρθηκαν παραπάνω, θα είναι (μέσω των πινάκων ζευγών του μετασχηματισμού)

- $x[n] = 2(-2)^n u[n] - (-1)^n u[n]$
- $x[n] = (-2)^{n+1} u[-n-1] + (-1)^n u[-n-1]$
- $x[n] = (-2)^{n+1} u[-n-1] - (-1)^n u[n]$

(ε΄) Για κανένα, γιατί κανένα πεδίο σύγκλισης δεν περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο - υπάρχει πόλος στη θέση $z=-1$ επάνω στο μοναδιαίο κύκλο.