

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 17/10/2017

Ημερομηνία Παράδοσης: 24/10/2017

Άσκηση 1. Εκτός από τη γνωστή σας κρουστική απόκριση $h[n]$, μπορεί κανείς να ορίσει και την περίφημη βηματική απόκριση $s[n]$, ως την έξοδο ενός ΓΧΑ συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανίζεται μια βηματική συνάρτηση $u[n]$. Η βηματική απόκριση σχετίζεται με την κρουστική απόκριση από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$h[n] = s[n] - s[n - 1] \quad (1)$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad (2)$$

οι οποίες είναι ουσιαστικά η μια αντίστροφη της άλλης. Χρησιμοποιήστε την κατάλληλη για να βρείτε τη βηματική απόκριση του συστήματος με κρουστική απόκριση

$$h[n] = \rho^n u[n], \quad |\rho| < 1 \quad (3)$$

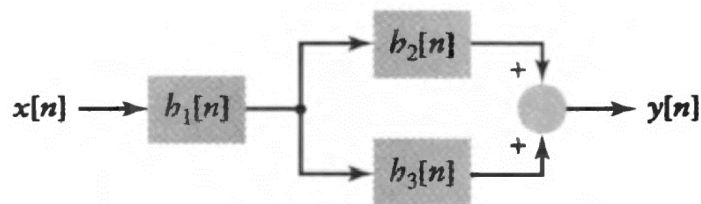
$$\underline{\text{Απ:}} \quad s[n] = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} u[n]$$

Άσκηση 2. Θωρήστε τη διασύνδεση τεσσάρων ΓΧΑ συστημάτων, όπως στο Σχήμα 1. Οι κρουστικές αποκρίσεις δίνονται ως:

$$h_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n + 2] \quad (4)$$

$$h_2[n] = \delta[n] \quad (5)$$

$$h_3[n] = u[n - 1] \quad (6)$$



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 1.

- Εκφράστε τη συνολική κρουστική απόκριση $h[n]$ ως συνάρτηση των $h_i[n]$, $i = 1, 2, 3$.
- Δείξτε ότι η μαθηματική μορφή της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ είναι

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n + 2] + \left(8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) u[n + 1] \quad (7)$$

Άσκηση 3. Για τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα, δείξτε αν το σύστημα είναι (α) γραμμικό, (β) ευσταθές, (γ) αιτιατό, (δ) χρονικά αμετάβλητο.

- i. $y[n] = nx[n + 2]$
- ii. $y[n] = \sin(x[n + 1]) - x[n]$
- iii. $y[n] = 2x[2^n]$

	Γραμμικό	Ευσταθές	Αιτιατό	Χ.Α.
<u>Απ:</u> (α)	✓	✗	✗	✗
(β)	✗	✓	✗	✓
(γ)	✓	✓	✗	✗

Άσκηση 4. Βρείτε τη συνέλιξη των παρακάτω ζευγών σημάτων:

$$x[n] = u[n - 3], \quad y[n] = u[n] \quad (8)$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n - 2], \quad y[n] = u[n] \quad (9)$$

$$x[n] = u[n - 2], \quad y[n] = \begin{cases} \gamma^n, & n < 0, & |\gamma| > 1 \\ \psi^n, & n \geq 0, & |\psi| < 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{Απ: } c[n] = \begin{cases} 0, & n < 3 \\ n - 2, & n \geq 3 \end{cases}$$

$$c[n] = \begin{cases} 0, & n < 2 \\ (1/2) - (1/2)^n, & n \geq 2 \end{cases}$$

$$c[n] = \begin{cases} \frac{\gamma^{n-1}}{\gamma-1}, & n < 2 \\ \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1-\psi^{n-1}}{1-\psi}, & n \geq 2 \end{cases}$$

Άσκηση 5. Για την παρακάτω εξίσωση διαφορών που περιγράφει ΓΧΑ σύστημα, με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες και είσοδο $x[n]$

$$y[n] - \frac{1}{5}y[n - 1] = 2x[n], \quad y[-1] = 1, \quad x[n] = (-1/3)^n u[n] \quad (11)$$

βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου ($y_{zi}[n]$), την κρουστική απόκριση $h[n]$, και την απόκριση μηδενικής κατάστασης ($y_{zs}[n]$). Σχολιάστε την ευστάθειά του. Γράψτε τη συνολική έξοδο $y_t[n]$ του συστήματος.

$$\text{Απ: } h[n] = 2\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n], \quad y_t[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n \frac{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{1 + \frac{3}{5}} \right] u[n]$$

Άσκηση 6. Δίνεται η παρακάτω εξίσωση διαφορών ενός ΓΧΑ συστήματος

$$y[n] + 0.1y[n - 1] - 0.06y[n - 2] = x[n] - 2x[n - 1]$$

- i. Είναι το σύστημα ευσταθές; Αιτιολογήστε.
- ii. Δείξτε ότι το ΓΧΑ σύστημα

$$y[n] + 1.1y[n - 1] - 0.26y[n - 2] = x[n] - 2x[n - 1]$$

είναι ασταθές.

iii. Η συνάρτηση `filter` του MATLAB υλοποιεί ένα σύστημα σε μορφή εξίσωσης διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

ως εξής:

```
y = filter(b, a, x);
```

όπου `b` είναι ένα διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του δεξιού μέλους της εξίσωσης διαφορών (εισόδου), `a` είναι ένα διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του αριστερού μέλους της εξίσωσης διαφορών (εξόδου), και `x` είναι το σήμα εισόδου του συστήματος. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση αυτή, υπολογίστε την έξοδο για καθένα από τα παραπάνω δυο συστήματα όταν η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = 2u[n]$$

για $n = 0, \dots, 10$. Σχεδιάστε με την εντολή `stem` τις εξόδους των δυο συστημάτων. Τι παρατηρείτε σε σχέση με τα ερωτήματα που σας τέθηκαν παραπάνω; Παραδώστε τις δυο γραφικές παραστάσεις.