ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1. Είναι

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] = \sum_{k=-\infty}^{n} \rho^k u[k] \tag{1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \rho^k = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} \tag{2}$$

για $n \geq 0$. Οπότε

$$s[n] = \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} u[n] \tag{3}$$

Άσκηση 2.

i. Είναι εμφανές από το σχήμα ότι

$$h[n] = h_1[n] * (h_2[n] + h_3[n]) = h_1[n] * h_2[n] + h_1[n] * h_3[n] \tag{4}$$

λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης.

ii. Θα είναι

$$h_1[n] * h_2[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] * \delta[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] \tag{5}$$

λόγω ιδιοτήτων της συνάρτησης Δέλτα. Επίσης

$$h_1[n] * h_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k+2]u[n-k-1] = \sum_{k=-2}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{6}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

$$= 8 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \ \ n \geq -1 \tag{8}$$

αφού

$$u[k+2]u[n-k-1] = 1, \quad \text{για } -2 \leq k \leq n-1 \Longrightarrow n \geq -1 \tag{9}$$

κι έτσι

$$h_1[n] * h_3[n] = 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1] \tag{10}$$

Οπότε συνολικά

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2] + \left(8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) u[n+1] \tag{11}$$

Άσκηση 3.

i.
- Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο

$$y_1[n] = nx_1[n+2]$$

Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος είναι

$$y_2[n] = nx_2[n+2]$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = n(ax_1[n+2] + bx_2[n+2]) = nax_1[n+2] + nbx_2[n+2] = ay_1[n] + by_2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- Ευστάθεια: αν $|x[n]| < B_x$, τότε $|y[n]| = |n||x[n+2]| < |n|B_x \to +\infty$, για μεγάλα n. Άρα είναι ασταθές.
- Αιτιατότητα: η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές χρονικές στιγμές της εισόδου, άρα το σύστημα δεν είναι αιτιατό.
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$, η έξοδος θα είναι

$$y[n] = nx[n-n_0+2]$$

Η έξοδος για $n := n - n_0$ είναι

$$y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0+2] \neq nx[n-n_0+2]$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

ii.
- Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο

$$y_1[n] = \sin(x_1[n+1]) - x_1[n]$$

Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος είναι

$$y_2[n] = \sin(x_2[n+1]) - x_2[n]$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = \sin((ax_1[n+1] + bx_2[n+1])) - (ax_1[n] + bx_2[n]) \neq ay_1[n] + by_2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι μη-γραμμικό.

- Ευστάθεια: αν $|x[n]| < B_x$, τότε

$$|y[n]| = |\sin(x[n+1]) - x[n]| \leq |\sin(x[n+1])| + |x[n]| \leq 1 + |x[n]| < 1 + B_x$$

αρα το σύστημα είναι ευσταθές.

- Αιτιατότητα: η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές χρονικές στιγμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι μη αιτιατό.
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$, η έξοδος θα είναι

$$y[n] = \sin(x[n-n_0+1]) - x[n-n_0]$$

Η έξοδος για $n := n - n_0$ είναι

$$y[n-n_0] = \sin(x[n-n_0+1]) - x[n-n_0]$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά αμεταβλητό.

iii.

- Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο $y_1[n] = 2x_1[2^n]$. Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος είναι
$$y_2[n] = 2x_2[2^n]$$
Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι
$$y[n] = 2(ax_1[2^n] + bx_1[2^n]) = 2ax_1[2^n] + 2bx_2[2^n]$$
Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.
- Ευστάθεια: αν $|x[n]| < B_x$, τότε
$$|y[n]| = 2|x[2^n]| < 2B_x$$
αρα το σύστημα είναι ευσταθές.
- Αιτιατότητα: η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές χρονικές στιγμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι μη αιτιατό (π.χ.$y[2] = 2x[4]$).
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο
$$x_1[n] = x[n - n_0]$$
η έξοδος θα είναι
$$y[n] = 2x[2^n - n_0]$$
Η έξοδος για $n := n - n_0$ είναι
$$y[n - n_0] = 2x[2^{n-n_0}]$$
άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

Άσκηση 4.

(α΄) Είναι
$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k-3]u[n-k] = \sum_{k=3}^{n} 1 = (n-3+1) = n-2,\ n \geq 3 \tag{12}$$
αφού
$$u[k-3]u[n-k] = 1,\ \ 3 \leq k \leq n \tag{13}$$
Άρα
$$c[n] = (n-2)u[n-3] \tag{14}$$

(β΄) Είναι
$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k-2]u[n-k] = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{15}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},\ \ n \geq 2 \tag{16}$$
αφού
$$u[k-2]u[n-k] = 1,\ \ 2 \leq k \leq n \tag{17}$$
Άρα
$$c[n] = \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u[n-2] \tag{18}$$

(γ') Η γραφική λύση είναι διαισθητικότερη σε αυτήν την άσκηση αλλά ας δοκιμάσουμε την αλγεβρική λύση. Είναι

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]u[n-k-2] = \sum_{k=-\infty}^{-1} u[n-k-2]\gamma^k + \sum_{k=0}^{+\infty} u[n-k-2]\psi^k \tag{19}$$

Η βηματική $u[n-k-2]$ είναι ίση με 1, αν $k \leq n-2$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $n-2 < 0$: τότε

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-2} \gamma^k = \sum_{k=2-n}^{+\infty} (\gamma^{-1})^k = \frac{\gamma^{n-2}}{1-\gamma^{-1}} = \frac{\gamma^{n-1}}{\gamma-1}, \;\; |\gamma| > 1 \tag{20}$$

- $n-2 \geq 0$: τότε

$$c[n] = \sum_{k=-\infty}^{-1} \gamma^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \psi^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma^{-k} + \sum_{k=0}^{n-2} \psi^k \tag{21}$$

$$= \frac{\gamma^{-1}}{1-\gamma^{-1}} + \frac{1-\psi^{n-1}}{1-\psi} = \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1-\psi^{n-1}}{1-\psi}, \;\; |\psi| < 1 \tag{22}$$

ωστε το δεύτερο άθροισμα να συγκλίνει. Συνολικά

$$c[n] = \frac{\gamma^{n-1}}{\gamma-1}u[-n+1] + \Big(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1-\psi^{n-1}}{1-\psi}\Big)u[n-2] \tag{23}$$

Άσκηση 5.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς εξίσωσης είναι $\gamma - \frac{1}{5}$, με χαρακτηριστική ρίζα το $\gamma = \frac{1}{5}$. Άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\Big(\frac{1}{5}\Big)^n \tag{24}$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$y[-1] = c\Big(\frac{1}{5}\Big)^{-1} = 5c = 1 \Longleftrightarrow c = \frac{1}{5} \tag{25}$$

και έτσι

$$y_{zi}[n] = \Big(\frac{1}{5}\Big)^{n+1}, \; n \geq 0 = \Big(\frac{1}{5}\Big)^{n+1} u[n] \tag{26}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε το σύστημα

$$S_0 \;\; : \;\; y[n] - \frac{1}{5}y[n-1] = x[n] \tag{27}$$

με κρουστική απόκριση $h_0[n]$. Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και θεωρούμε μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τότε το σύστημα γράφεται ως

$$h[n] - \frac{1}{5}h[n-1] = \delta[n] \tag{28}$$

Η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h_0[n] = c\Big(\frac{1}{5}\Big)^n, \; n \geq 0 \tag{29}$$

Για $n = 0$, εχουμε $h[0] = 1$, και άρα $c = 1$, οπότε

$$h_0[n] = \Big(\frac{1}{5}\Big)^n u[n] \tag{30}$$

Η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος

$$S \ : \ y[n] - \frac{1}{5}y[n-1] = 2x[n] \tag{31}$$

που μας ζητείται θα είναι

$$h[n] = 2h_0[n] = 2\Big(\frac{1}{5}\Big)^n u[n] \tag{32}$$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης είναι η απόκριση του συστήματος για την είσοδο $x[n]$ χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τις αρχικές συνθήκες. Έτσι

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{1}{5}\Big)^k\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n-k}u[k]u[n-k] \tag{33}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{-k}\Big(\frac{1}{5}\Big)^k = 2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{3}{5}\Big)^k \tag{34}$$

$$= 2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\frac{1-\Big(-\frac{3}{5}\Big)^{n+1}}{1+\frac{3}{5}}, \ \ n \geq 0 \tag{35}$$

αφού

$$u[k]u[n-k] = 1, \ \ 0 \leq k \leq n \tag{36}$$

και έτσι

$$y_{zs}[n] = 2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\frac{1-\Big(-\frac{3}{5}\Big)^{n+1}}{1+\frac{3}{5}}u[n] \tag{37}$$

Οπότε συνολικά

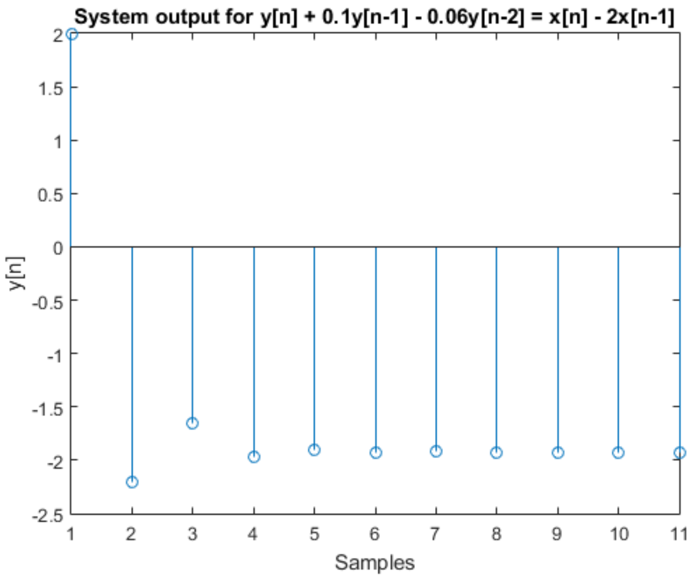
$$y[n] = \left(\Big(\frac{1}{5}\Big)^{n+1} + 2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\frac{1-\Big(-\frac{3}{5}\Big)^{n+1}}{1+\frac{3}{5}}\right)u[n] \tag{38}$$

Άσκηση 6.

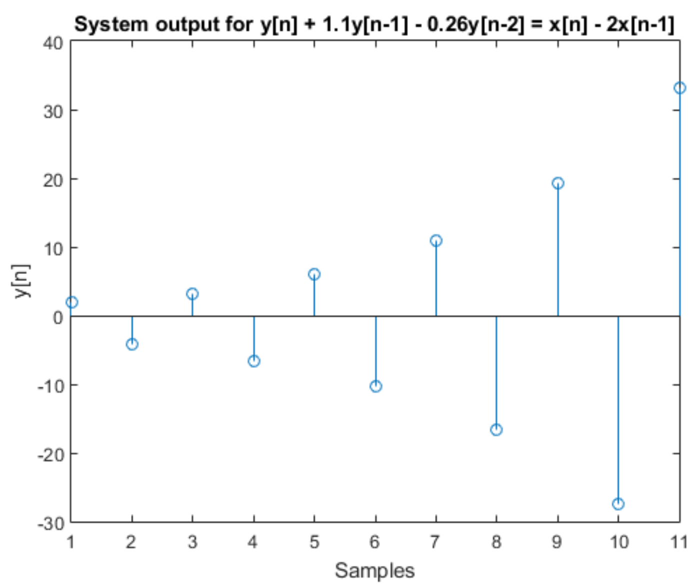
i. Ναι, είναι γιατί οι χαρακτηριστικές του ρίζες είναι μικρότερες της μονάδας.

ii. Οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι $\gamma_1 = -1.3$ και $\gamma_2 = 0.2$, κι εφόσον η μια είναι μεγαλύτερη της μονάδας, τότε το σύστημα είναι ασταθές.

iii. Μετά από την εκτέλεση της συνάρτησης filter, η έξοδος που παίρνουμε για τα δυο συστήματα, για είσοδο $x[n] = 2u[n]$, με $n = 0, 1, \cdots, 10$, φαίνεται στα Σχήματα 1, 2. Παρατηρούμε ότι πράγματι η έξοδος του πρώτου συστήματος μένει σταθερή όσο το $n \to \infty$, πράγμα που αναμενόταν από ένα ευσταθές σύστημα, ενώ αντίθετα η έξοδος του δεύτερου συστήματος μεγαλώνει χωρίς όριο όσο το $n \to \infty$, πράγμα που επίσης αναμενόταν από ένα ασταθές σύστημα.



Σχήμα 1



Σχήμα 2