Κεφάλαιο 11

Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Ως τώρα, τα σήματα που μελετήσαμε ήταν ολα συνεχούς χρόνου. Σε αυτό το κεφάλαιο, ξεκινάμε τη μελέτη μας σχετικά με την επεξεργασία σημάτων διακριτού χρόνου αναπτύσσοντας πρώτα τις ιδέες του *σήματος διακριτού χρόνου* και του *συστήματος διακριτού χρόνου*. Θα επικεντρωθούμε σε προβλήματα που σχετίζονται με την αναπαράσταση σημάτων, πράξεις με σήματα, ιδιότητες σημάτων, ιδιότητες συστημάτων και ταξινόμηση αυτών, ακριβώς ανάλογα με όσα έχουμε ήδη συζητήσει για το συνεχή χρόνο.

Τα σήματα διακριτού χρόνου ουσιαστικά βρίσκονται ένα βήμα πριν τα *ψηφιακά σήματα*. Πολλές φορές η σχετική βιβλιογραφία τιτλοφορείται *Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος*, αντί *Επεξεργασία Σήματος Διακριτού Χρόνου*. Σίγουρα έχετε ακούσει για τα πλεονεκτήματα των ψηφιακών συστημάτων. Αυτά μπορούν να συνοψισθούν στα παρακάτω:

1. Τα ψηφιακά συστήματα έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια και σταθερότητα, ενώ είναι πιο ευέλικτα (τα χαρακτηριστικά τους μπορούν εύκολα να αλλάξουν).

2. Μεγαλύτερη ποικιλία συστημάτων μπορούν να πραγματοποιηθούν στον "ψηφιακό" χώρο.

3. Τα ψηφιακά σήματα μπορούν να αποθηκευτούν εύκολα σε ένα αποθηκευτικό μέσο χωρίς αλλοίωση της ποιότητάς τους.

4. Για την επεξεργασία ψηφιακών σημάτων έχουν αναπτυχθεί πιο εξελιγμένοι αλγόριθμοι.

5. Τα ψηφιακά συστήματα μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, παρέχοντας χαμηλή κατανάλωση ισχύος.

Ελπίζοντας να σας πείσαμε για τη χρησιμότητά τους, ας προχωρήσουμε. ☺

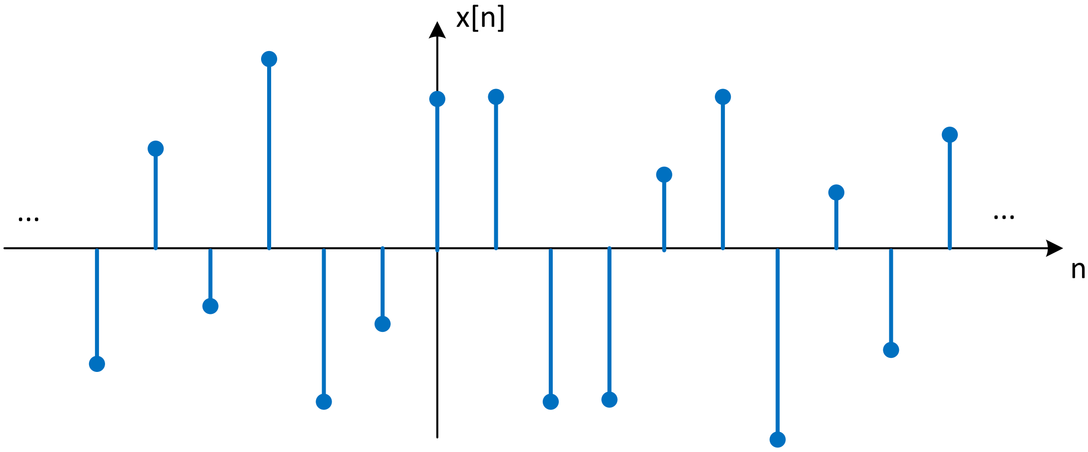
11.1 Σήματα Διακριτού Χρόνου

Ένα *σήμα διακριτού χρόνου* είναι μια διατεταγμένη ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών τιμών. Έτσι, ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι μια συνάρτηση της ακέραιας μεταβλητής n, που συμβολίζεται ως $x[n]$. Το σήμα διακριτού χρόνου δεν ορίζεται για μη ακέραιες τιμές του n. Έτσι, ένα πραγματικό σήμα $x[n]$ αναπαρίσταται γραφικά οπως στο Σχημα (11.1). Τα σήματα διακριτού χρόνου συχνά προέρχονται από δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου, όπως η φωνή. Για παράδειγμα, ένα σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t)$ δειγματοληπτείται με ρυθμό $f_s = \frac{1}{T_s}$ rad/s, και παράγει ένα δειγματοληπτημένο σήμα $x[n]$, που σχετίζεται με το $x_a(t)$ ως

$$x[n] = x_a(nT_s), \;\; n \in \mathbb{Z} \tag{11.1}$$

Όμως, υπάρχουν και σήματα που δεν προήλθαν κατ΄ αυτόν τον τρόπο. Κάποια σήματα υφίστανται εξ΄ αρχής στο διακριτό χρόνο, όπως για παράδειγμα οι ημερίσιες τιμές των μετοχών, τα ετήσια στατιστικά πληθυσμών, το πλήθος των δρομολογίων ενός λεωφορείου ανά ημέρα, κλπ. Σε κάθε περίπτωση, θα καθιστούμε σαφές πότε ένα σήμα προέρχεται από δειγματοληψία ενός σήματος συνεχούς χρόνου και πότε υπάρχει εξ΄ αρχής στο διακριτό χρόνο - θα είναι εμφανές από τα συμφραζόμενα.

Εν γένει, ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορει να ειναι μιγαδικό, και μάλιστα υπάρχουν πολλές σημαντικές εφαρμογές, όπως οι ψηφιακές επικοινωνίες, όπου τα μιγαδικά σήματα έρχονται στο προσκήνιο πολύ εύκολα. Ένα



Σχήμα 11.1: Σήμα Διακριτού Χρόνου

μιγαδικό σήμα μπορει να εκφραστεί είτε ως άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους

$$z[n] = a[n] + jb[n] = \Re\{z[n]\} + j\Im\{z[n]\} \tag{11.2}$$

είτε σε πολική μορφή, με όρους πλάτους και φάσης ως

$$z[n] = |z[n]|e^{j\angle z[n]} = |z[n]|e^{j\angle\{z[n]\}} \tag{11.3}$$

όπου $j = \sqrt{-1}$. Το πλάτος δίνεται από την έκφραση

$$|z[n]| = \sqrt{\Re^2\{z[n]\} + \Im^2\{z[n]\}} \tag{11.4}$$

ενώ η φάση από τη σχέση

$$\angle z[n] = \tan^{-1}\frac{\Im\{z[n]\}}{\Re\{z[n]\}} \tag{11.5}$$

η οποία είναι επιθυμητό να εκφράζεται στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Αν η $z[n]$ είναι μιγαδική ακολουθία, η συζυγής της είναι η $z^*[n]$, και μπορει να υπολογιστεί απλά αλλάζοντας το πρόσημο του φανταστικού μέρους της $z[n]$:

$$z^*[n] = \Re\{z[n]\} - j\Im\{z[n]\} = |z[n]|e^{-j\angle\{z[n]\}} \tag{11.6}$$

Ασφαλώς, εμάς θα μας απασχολήσουν κυρίως πραγματικά σήματα, αλλά όπως και στο συνεχή χρόνο, θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά το μιγαδικό χώρο προς διευκόλυνσή μας! ☺

11.1.1 Περιοδικά Σήματα

Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορει να είναι ειτε περιοδικό είτε απεριοδικό. Ένα σήμα θεωρείται περιοδικό αν, για κάποιο θετικό ακέραιο N, ισχύει οτι

$$x[n] = x[n + N] \tag{11.7}$$

για κάθε n. Η *περιοδος*, που συμβολίζεται ως N, ειναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος που ικανοποιεί τη σχέση (11.7). Αν η σχέση αυτή δεν ικανοποιείται για κανένα ακέραιο N, το σήμα λέγεται απεριοδικό.

Αν $x_1[n]$ είναι ένα περιοδικό σημα με περίοδο N_1 και $x_2[n]$ ένα περιοδικό σήμα με περίοδο N_2, τότε το άθροισμα

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \tag{11.8}$$

θα είναι πάντα περιοδικό και η περιοδός του θα είναι η

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{Μ.Κ.Δ}\{N_1, N_2\}} \tag{11.9}$$

όπου Μ.Κ.Δ$\{N_1, N_2\}$ είναι ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των N_1, N_2, αν αυτός υπάρχει. Εναλλακτικά, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σχέση

$$N = \text{Ε.Κ.Π}\{N_1, N_2\} \tag{11.10}$$

Όμοια ισχύει και για το γινόμενο, δηλ. το σημα

$$x[n] = x_1[n]x_2[n] \tag{11.11}$$

ϑα είναι περιοδικό με (πιϑανή) περίοδο N που δίνεται από τη σχέση (11.9), αν και η πραγματική (μικρότερη) περιοδος μπορεί να είναι μικρότερη.

Δεδομένης μιας ακολουϑίας $x[n]$, ένα περιοδικό σήμα μπορει πάντα να δημιουργηϑεί ‘‘αντιγράφοντας ’’ το $x[n]$ ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n - kN] \tag{11.12}$$

όπου N ένας ϑετικός ακέραιος. Σε αυτήν την περιπτωση, το $y[n]$ είναι περιοδικό με περιοδο N.

11.1.1.1 Ημίτονα Διακριτού Χρόνου

Εδώ είναι καλό να αναφέρουμε ότι υπάρχει μια ‘‘ιδιαιτερότητα’’ στα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου, που τα ξεχωρίζει από αυτά που έχουμε δει στο συνεχή χρόνο. Θυμάστε ότι στο συνεχή χρόνο, ένα ημίτονο συχνότητας ω_0 είναι πάντα περιοδικό με περίοδο $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Στο διακριτό χρόνο όμως, ένα ημίτονο $\cos(\omega_0 n)$ είναι περιοδικό *μόνον αν* η περίοδός του, N, είναι ακέραιος αριϑμός. Ας κάνουμε πιο ξεκάϑαρα τα πράγματα...

Αν ένα ημίτονο διακριτού χρόνου $\cos(\omega_0 n)$ είναι περιοδικό με περίοδο N, τότε ικανοποιεί τη σχέση

$$\cos(\omega_0 n) = \cos(\omega_0(n + N)) = \cos(\omega_0 n + \omega_0 N) \tag{11.13}$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι σωστό μόνον αν το $\omega_0 N$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Δηλαδή

$$\omega_0 N = 2\pi m, \ m \text{ ακέραιος} \tag{11.14}$$

ή αλλιώς

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \tag{11.15}$$

Επειδή και το m και το N είναι ακέραιοι, η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι το ημίτονο που συζητάμε είναι περιοδικό μόνον αν ο αριϑμός $\frac{\omega_0}{2\pi}$ είναι ρητός (δηλ. γράφεται ως πηλίκο δυο ακεραίων). Σε αυτήν την περίπτωση, η περίοδος δίνεται από τη σχέση

$$N = m\frac{2\pi}{\omega_0} \tag{11.16}$$

Για να βρούμε το N, πρέπει να διαλέξουμε το <u>μικρότερο</u> δυνατό m που ϑα κάνει το $m\frac{2\pi}{\omega_0}$ να είναι ακέραιος. Για παράδειγμα, αν $\omega_0 = \frac{4\pi}{17}$, τότε ο μικρότερος δυνατός ακέραιος m που κάνει τον αριϑμό $m\frac{2\pi}{\omega_0} = m\frac{17}{2}$ ακέραιο, είναι προφανώς $m = 2$. Για $m = 2$, η περίοδος είναι $N = 17$ δειγματα.

Η ίδια ακριβώς συζήτηση γίνεται για οποιοδήποτε πιϑανώς περιοδικό σήμα, όπως για παράδειγμα το $e^{j\omega_0 n}$ που είδαμε νωρίτερα, αφού αποτελείται από ένα άϑροισμα πιϑανώς περιοδικών σημάτων συχνότητας ω_0.

11.1.1.2 Μιγαδικά Εκϑετικά Διακριτού Χρόνου

Το μιγαδικό εκϑετικό σήμα $x_d[n] = e^{j\omega_0 n}$ έχει επίσης μια ιδιαιτερότητα σε σχέση με το αντίστοιχο του συνεχούς χρόνου, $x_a(t) = e^{j\omega_0 t}$. Αυτή η ιδιαιτερότητα είναι ότι το $x_d[n]$ είναι **πάντα** περιοδικό στο <u>χώρο της συχνότητας</u> με περίοδο 2π, γιατί

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n} \tag{11.17}$$

αφού

$$e^{j2\pi n} = 1, \forall n \in Z \tag{11.18}$$

Αυτό σημαίνει ότι για να καταλάβουμε - αργότερα - πώς συμπεριφέρεται ένα μιγαδικό εκϑετικό αυτής της μορφής στο χώρο της συχνότητας, αρκεί να το παρατηρήσουμε σε διάστημα μιας περιόδου 2π, αφού εκτός αυτής επαναλαμβάνεται. Συνήθως προτιμούμε το διάστημα $(-\pi, \pi]$. Φυσικά εξακολουθούν να ισχύουν οι σχέσεις του Euler και για τα μιγαδικά εκθετικά διακριτού χρόνου.[1] Αυτή η περιοδικότητα στο χώρο της συχνότητας μας λέει πρακτικά ότι οι συχνότητες ω_0 και $\omega_0 + 2\pi k$ είναι ουσιαστικά ίδιες. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με όσα ξέρατε από το συνεχή χρόνο, ότι δηλαδή όσο αυξάνουμε τη συχνότητα, τόσο πιο γρήγορα ταλαντώνεται ένα σήμα. Για παράδειγμα, το σήμα συνεχούς χρόνου

$$x(t) = A\cos(\Omega_0 t) \tag{11.22}$$

ταλαντώνεται όλο και πιο γρήγορα αν αυξάνουμε συνεχώς τη συχνότητα Ω_0. Για ένα ημίτονο διακριτού χρόνου

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n) \tag{11.23}$$

όσο αυξάνουμε τη συχνότητα ω_0 από το $\omega_0 = 0$ ως το $\omega_0 = \pi$, τότε πράγματι οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο γρήγορες. Όμως, όταν αυξήσουμε το ω_0 από $\omega_0 = \pi$ ως $\omega_0 = 2\pi$, τότε οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο αργές! Το ίδιο μοτίβο επαναλαμβάνεται και μετά το $\omega_0 = 2\pi$, ξεκινώντας από γρήγορες ταλαντώσες γύρω από το 2π, φτάνοντας σε πιο αργές γύρω από το 3π, και ξανά σε πιο γρήγορες γύρω από το $\omega_0 = 4\pi$.

Αντίστοιχα, στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, οι γρήγορες ταλαντώσεις γίνονται γύρω από τις συχνότητες $\omega_0 = \pm\pi$, ενώ οι πιο αργές (προφανώς) γύρω από τη συχνότητα $\omega_0 = 0$. Για ένα οπτικό παράδειγμα, δείτε το Σχήμα (11.2).

Εν γένει λοιπόν, οι συχνότητες γύρω από περιοχές κοντά στη συχνότητα $\omega_0 = 2\pi k$, για $k \in Z$, αναφέρονται ως *χαμηλές* συχνότητες, ενώ οι αντίστοιχες γύρω από περιοχές της μορφής $\omega_0 = \pi + 2\pi k$, για $k \in Z$, λέγονται *υψηλές* συχνότητες.

11.2 Μετασχηματισμοί Σημάτων

Συχνά, θέλουμε να τροποποιήσουμε τα σήματα μέσω του δεικτη τους, n. Δηλ. θέλουμε να κάνουμε ένα μετασχηματισμό της μορφης

$$y[n] = x[f[n]] \tag{11.24}$$

με $f[n]$ μια συνάρτηση του n. Οι πιο συχνοί μετασχηματισμοί περιλαμβάνουν την *ολίσθηση*, την *αντιστροφή*, και την *κλιμάκωση*[2]. Ας τις δούμε αναλυτικά.

11.2.0.1 Χρονική ολίσθηση

Η ολίσθηση οριζεται ως ο μετασχηματισμός της μορφής

$$f[n] = n - n_0 \tag{11.25}$$

Αν $y[n] = x[n - n_0]$, το $x[n]$ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά n_0 δείγματα, αν το n_0 είναι θετικός (αναφερεται ως καθυστέρηση), ενώ μετατοπίζεται προς τα αριστερά κατά n_0 δειγματα, αν το n_0 είναι αρνητικό (αναφέρεται ως προήγηση-προπόρευση).

11.2.0.2 Χρονική Αντιστροφή

Η αντιστροφή ορίζεται ως ο μετασχηματισμός

$$f[n] = -n \tag{11.26}$$

και απλά ειναι η αντιστροφή του σηματος στο χρόνο, ως προς n.

11.2.0.3 Κλιμάκωση στο χρόνο

Η κλιμάκωση στο χρόνο ορίζεται ως

$$f[n] = Mn \text{ ή } f[n] = n/N \tag{11.27}$$

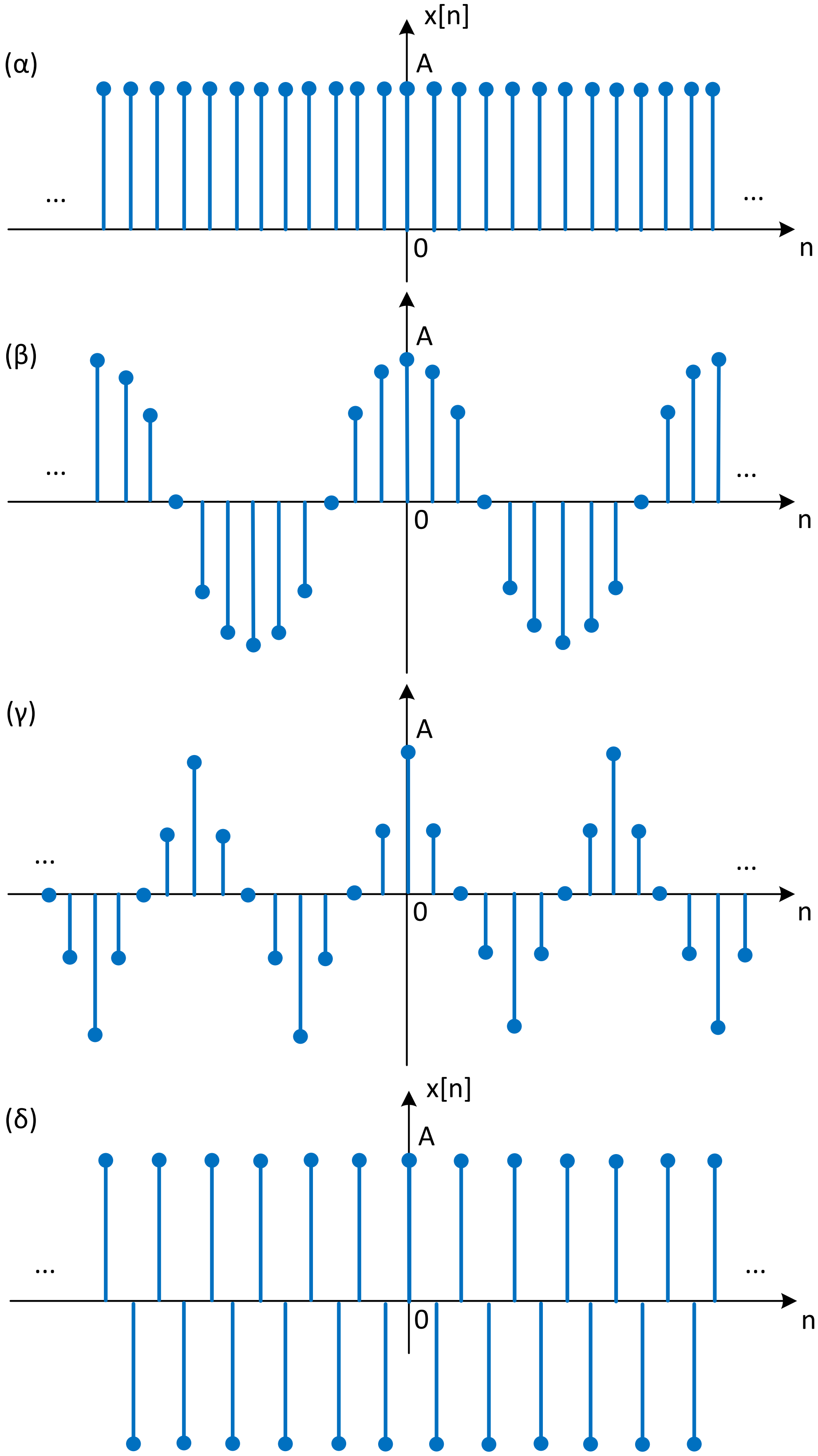
[1] Ντροπή, αλλά τις υπενθυμίζουμε :)

$$\cos(\theta n) = \frac{e^{j\theta n} + e^{-j\theta n}}{2} \tag{11.19}$$

$$\sin(\theta n) = \frac{e^{j\theta n} - e^{-j\theta n}}{2j} \tag{11.20}$$

$$\tag{11.21}$$

[2] Τις οποίες γνωρίζετε ήδη από το συνεχή χρόνο.

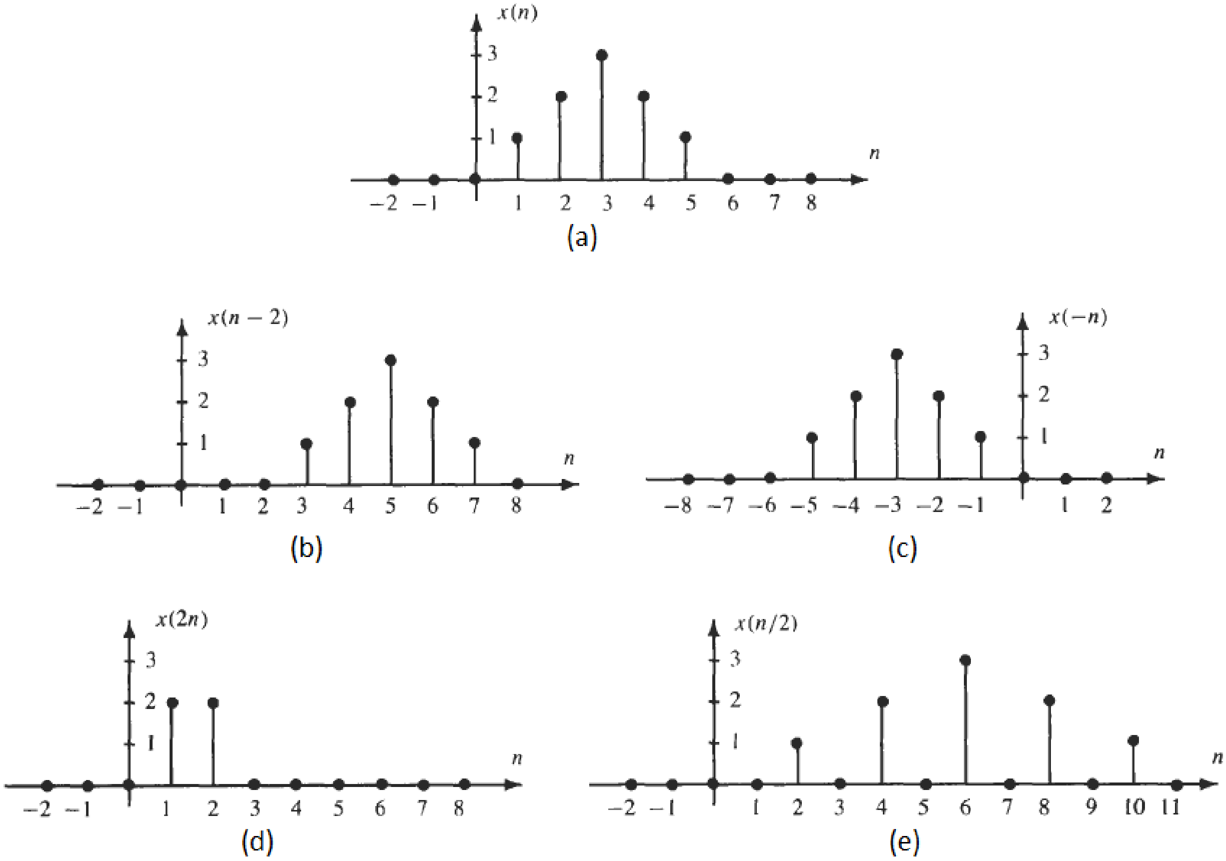


Σχήμα 11.2: Το σήμα $\cos(\omega_0 n)$ για διάφορες τιμές του ω_0. Όσο το ω_0 αυξάνεται από το μηδέν προς το π (σχήματα α-δ), τόσο γρηγορότερα ταλαντώνεται το σήμα. Όσο το ω_0 αυξάνεται από το π προς το 2π (σχήματα δ-α), τόσο πιο αργές γίνονται οι ταλαντώσεις του.

όπου M, N είναι θετικοί ακέραιοι. Στην πρώτη περιπτωση, το σήμα $x[Mn]$ σχηματίζεται παίρνοντας κάθε M-οστο δείγμα από τη $x[n]$ (αυτή η πράξη λέγεται *υποδειγματοληψία - downsampling*). Με $f[n] = n/N$, το σήμα $y[n] = x[f[n]]$ ορίζεται ως

$$y[n] = \begin{cases} x[n/N], & n = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{11.28}$$

(η πράξη αυτή ειναι γνωστη ως *υπερδειγματοληψία - upsampling*).



Σχήμα 11.3: *Χρονικοί μετασχηματισμοί: (α) Σήμα Διακριτού Χρονου, (β) Καθυστέρηση κατά $n_0 = 2$, (γ) Αναστροφή, (δ) Υποδειγματοληψία κατά 2, (ε) Υπερδειγματοληψία κατά 2*

Παραδείγματα ολίσθησης, αναστροφής, και κλιμάκωσης στο χρόνο φαίνονται στο Σχήμα (11.3). Προσέξτε, οι πράξεις αυτές εξαρτώνται από τη σειρά που θα τις εφαρμόσετε.

11.3 Μερικά Χρήσιμα Μοντέλα Σημάτων

Αν και τα περισσότερα σήματα που θα συναντήσουμε στην πράξη μοιάζουν πολύπλοκες συναρτήσεις του χρόνου, υπάρχουν τρια απλά αλλά πολύ σημαντικά σήματα διακριτού χρόνου που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην περιγραφη και αναπαράσταση πιο περίπλοκων σημάτων.

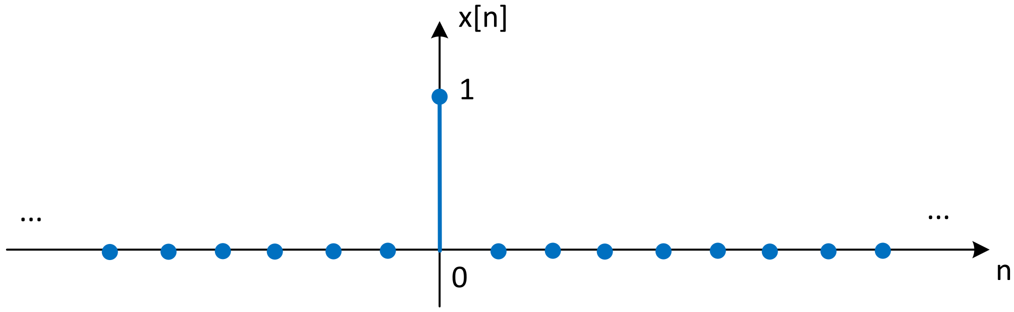
Αυτά τα σήματα είναι η διακριτή συνάρτηση Δέλτα, η διακριτή βηματική συνάρτηση, και η εκθετική συνάρτηση.

11.3.0.1 Η Διακριτή Συνάρτηση Δέλτα

Η διακριτή συνάρτηση Δέλτα, που συμβολίζεται με $\delta[n]$, ορίζεται ως

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{11.29}$$

και παιζει τον ίδιο ρολο στην επεξεργασία σήματος διακριτού χρόνου με τη συνάρτηση Δέλτα $\delta(t)$ που έχουμε δει στο συνεχή χρόνο, με τη διαφορά ότι εδώ είναι σημαντικά πιο απλή στη χρήση και στον ορισμό της[3] Η συνάρτηση αυτή φαίνεται στο Σχήμα (11.4).



Σχήμα 11.4: Η συνάρτηση Δέλτα διακριτού χρόνου.

11.3.0.2 Η Διακριτή Βηματική Συνάρτηση

Η διακριτή βηματική συνάρτηση, που συμβολίζεται με $u[n]$, ορίζεται ως

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{11.32}$$

και σχετίζεται με τη διακριτή συνάρτηση Δέλτα ως

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \tag{11.33}$$

αλλά και ως

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \tag{11.34}$$

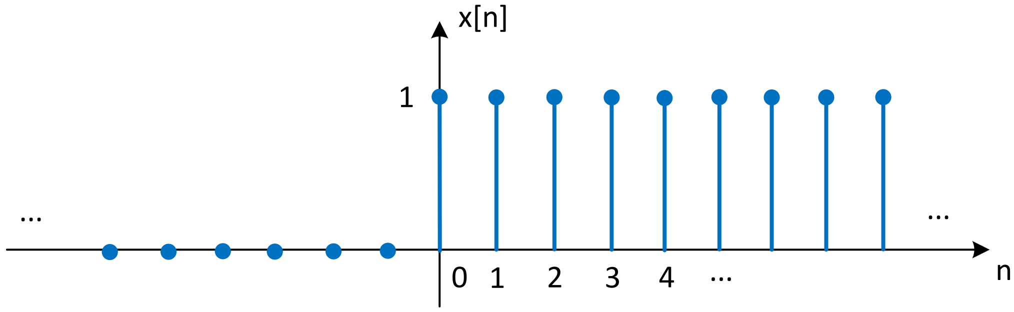
Η συνάρτηση αυτή φαίνεται στο Σχήμα (11.5). Όμοια, η διακριτή συνάρτηση Δέλτα μπορει να γραφεί ως η διαφορά δυο βηματικών που διαφέρουν κατά ένα δείγμα:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{11.35}$$

[3]Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση Δέλτα συνεχούς χρόνου, $\delta(t)$, είναι κατανομή - ή αλλιώς γενικευμένη συνάρτηση - και ορίζεται από τις εξής ιδιότητες:

$$\delta(t) = 0, \; t \neq 0, \tag{11.30}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{11.31}$$



Σχήμα 11.5: Η βηματική συνάρτηση διακριτού χρόνου.

11.3.0.3 Η Εκθετική Συνάρτηση

Τέλος, η εκθετική συνάρτηση ορίζεται ως

$$x[n] = a^n \tag{11.36}$$

όπου a ένας πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός. Γενικότερα, μας ενδιαφέρουν εκθετικά του τύπου

$$x[n] = Aa^n \tag{11.37}$$

με A, a μιγαδικά. Τότε, αναλύοντας τα A, a σε πολική μορφή, θα έχουμε

$$A = |A|e^{j\phi_A} \tag{11.38}$$

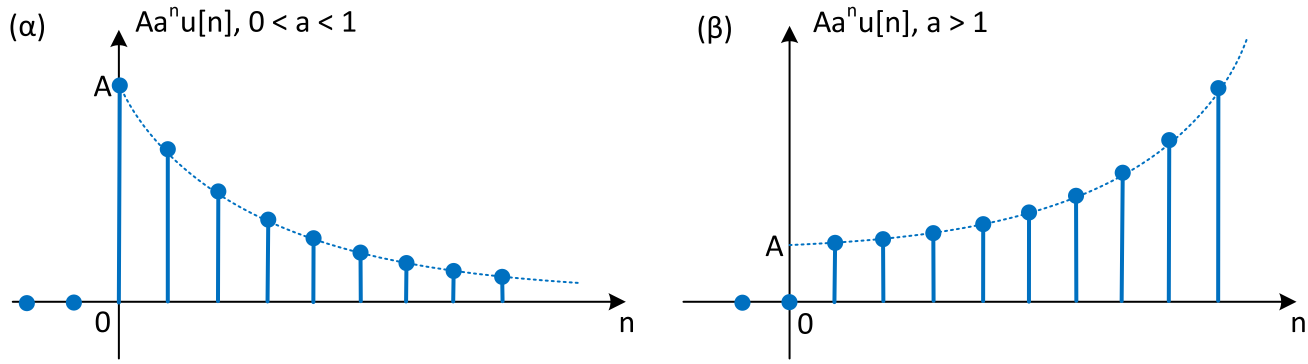
και

$$a = |a|^n e^{j\phi_a n} \tag{11.39}$$

έχουμε

$$x[n] = Aa^n = |A|e^{j\phi_A}|a|^n e^{j\phi_a n} = |A||a|^n e^{j(\phi_A+\phi_a)} \tag{11.40}$$

Στο Σχήμα 11.6 φαίνονται δυο πραγματικά εκθετικά σήματα για $0 < a < 1$ και $a > 1$, αντίστοιχα. Επίσης,



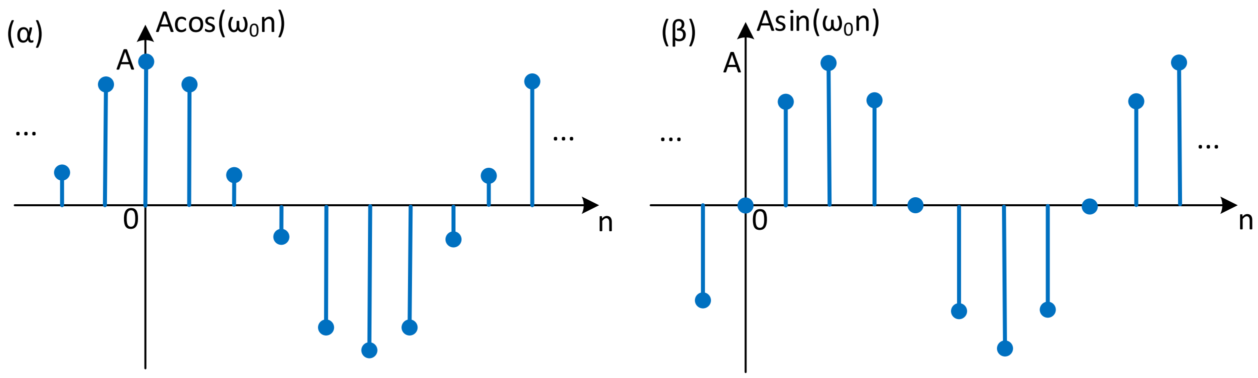
Σχήμα 11.6: *Εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου για (α) $0 < a < 1$ και (β) $a > 1$.*

ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι τα μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(n\omega_0) + j\sin(n\omega_0) \tag{11.41}$$

με ω_0 πραγματικό αριθμό εκφρασμένο σε radians-ακτίνια. Σχηματικά, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος φαίνονται στο Σχήμα 11.7. Όπως θα δούμε σύντομα, οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις είναι πολύ χρήσιμες στην ανάλυση Fourier των σημάτων διακριτού χρόνου – όσο χρήσιμα ήταν τα αντίστοιχα συνεχή μιγαδικά εκθετικά στην ανάλυση σημάτων συνεχούς χρόνου ☺. Αν συνδυάσουμε τη Σχέση (11.41) και τη Σχέση (11.40) για πραγματικό a, θα έχουμε

$$x[n] = Aa^n e^{j\omega_0 n} = |A|a^n e^{j(\omega_0 n+\phi_A)} = |A|a^n\cos(\omega_0 n+\phi_A) + j|A|a^n\sin(\omega_0 n+\phi_A) \tag{11.42}$$



Σχήμα 11.7: *(α) Πραγματικό και (β) φανταστικό μέρος μιγαδικού εκθετικού σήματος διακριτού χρόνου* $e^{j\omega_0 n}$.

Αυτή η ακολουθία ταλαντώνεται με αυξανόμενο πλάτος αν $|a| > 1$, ή με φθίνον πλάτος αν $|a| < 1$. Για $|a| = 1$, το σήμα αποτελείται από απλά ημίτονα και συνημίτονα σταθερού πλάτους.

Ακριβώς ανάλογα λοιπόν με το συνεχή χρόνο, ορίζουμε την ποσότητα ω_0 ως τη *συχνότητα* του σήματος, και την ποσότητα ϕ_A ως *φάση* του σήματος.

11.4 Ανάλυση Σήματος

Η διακριτή συνάρτηση $\delta[n]$ μπορει να χρησιμοποιηθεί για να αναλύσει ένα σήμα σε ένα άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα με κατάλληλα βαρη και μετατοπίσεις ως

$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots \tag{11.43}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{11.44}$$

όπου κάθε όρος του αθροίσματος, $x[k]\delta[n-k]$, είναι ένα σήμα που έχει πλάτος $x[k]$ τη χρονική στιγμή $n = k$ και ειναι μηδέν όλες τις άλλες χρονικές στιγμές.

Παράδειγμα:

Εκφράστε το σήμα

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{11.45}$$

ώς ένα άρθοισμα κατάλληλα μετατοπισμένων συναρτήσεων Δέλτα.

Λύση:

Θα πούμε ότι

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] \tag{11.46}$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε περαιτέρω αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{11.47}$$

έχουμε

$$x[n] = u[n] - u[n-1] + 2(u[n-1] - u[n-2]) + 3(u[n-2] - u[n-3]) \tag{11.48}$$

που δίνει

$$x[n] = u[n] + u[n-1] + u[n-2] - 3u[n-3] \tag{11.49}$$

11.5 Ενέργεια και Ισχύς Σήματος Διακριτού Χρόνου

Ακολουθώντας παρόμοιο σκεπτικό όπως στο συνεχή χρόνο, η ενέργεια ενός σήματος διακριτού χρόνου είναι

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \tag{11.50}$$

Για να έχει νόημα αυτή η μετρική θα πρέπει, όπως φαντάζεστε, να είναι πεπερασμένη (να μην απειρίζεται δηλαδή). Μια αναγκαία συνθήκη για να ισχύει αυτό είναι ότι το πλάτος του σήματος πρέπει να φθίνει στο μηδέν όσο $n \to \pm\infty$. Φυσικά, οποιοδήποτε σήμα πεπερασμένης διάρκειας είναι σήμα ενέργειας (ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη). Ένα σήμα που η ενέργειά του είναι πεπερασμένη λέγεται *σήμα ενέργειας*.

Σε περιπτώσεις όπου το πλάτος του σήματος δε φθίνει στο μηδέν όταν $n \to \pm\infty$, χρειαζόμαστε μια εναλλακτική μετρική. Αυτή δεν είναι άλλη από την ισχύ του σήματος, που ορίζεται ως

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \tag{11.51}$$

Αν η P_x είναι πεπερασμένη (και μη μηδενική), τότε το σήμα λέγεται *σήμα ισχύος*. Όπως και στο συνεχή χρόνο, ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να είναι είτε σήμα ενέργειας είτε σήμα ισχύος, αλλά όχι και τα δυο ταυτόχρονα. Επίσης, μπορεί να μην είναι ούτε ενέργειας ούτε ισχύος (όπως π.χ. το $2^n u[n]$).

Στον υπολογισμό τέτοιων αθροισμάτων μας - αλλά και γενικότερα - είναι πολύ χρήσιμες οι σχέσεις του Πίνακα (11.1).

Χρήσιμα Αθροίσματα (Σειρές)	
$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a},\ \lvert a\rvert < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2},\ \lvert a\rvert < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$
$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$	

Πίνακας 11.1: Χρήσιμα Αθροίσματα.

Παράδειγμα:
Έστω το σήμα

$$x[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n] \tag{11.52}$$

(α΄) Υπολογίστε το

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$$

(β΄) Υπολογίστε την ενέργεια του $x[n]$,

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n]$$

Λύση:

(α΄) Θα είναι

$$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n] = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^n \tag{11.53}$$

Με αλλαγή μεταβλητής, $k \leftarrow (-n)$, έχουμε

$$A = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \tag{11.54}$$

και με χρήση του Πίνακα (11.1), έχουμε

$$A = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3 \tag{11.55}$$

(β′) Είναι

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)^2 u^2[-n] = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} \tag{11.56}$$

Ξανά με αλλαγή μεταβλητής, $k \leftarrow -n$, έχουμε

$$E = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5} \tag{11.57}$$

ξανά με χρήση του Πίνακα (11.1).

11.6 Συστήματα Διακριτού Χρόνου

Όπως είδαμε και στο συνεχή χρόνο, ένα συστημα διακριτού χρόνου είναι, θεωρητικά, ένας μαθηματικός τελεστης ή μια αντιστοίχιση που μετασχηματίζει ένα σήμα (την είσοδο) σε ένα άλλο σήμα (την έξοδο), μέσω ενός καθορισμένου συνόλου από πράξεις. Η σημειογραφεία $T[\cdot]$ χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει εν γένει ένα σύστημα. Οι ιδιότητες εισόδου-εξόδου ενός συστήματος μπορούν να καθοριστούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Η σχέση εισόδου-εξόδου μπορεί, για παράδειγμα, να εκφραστει ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.58}$$

ή

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] \tag{11.59}$$

Είναι επίσης δυνατόν να περιγραφει ένα σύστημα με αλγοριθμικούς όρους, που αποτελείται από εντολές ή πράξεις που εφαρμόζονται σε ενα σήμα εισόδου, όπως οι

$$y_1[n] = \frac{1}{2}y_1[n-1] + \frac{1}{4}x[n] \tag{11.60}$$

$$y_2[n] = \frac{1}{4}y_2[n-1] + \frac{1}{2}x[n] \tag{11.61}$$

$$y_3[n] = \frac{4}{10}y_3[n=1] + \frac{1}{2}x[n] \tag{11.62}$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] + y_3[n] \tag{11.63}$$

Τέλος, ένα σύστημα μπορεί να εκφραστεί ως ένα σήμα $h_k[n]$, που λέγεται *κρουστική απόκριση*, και ορίζεται ως η έξοδος του συστήματος όταν στην είσοδό του εμφανιστεί η διακριτή συνάρτηση Δέλτα, $\delta[n-k]$, όμοια ακριβώς με το συνεχή χρόνο.

Τα συστηματα διακριτού χρονου μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με τις ιδιότητες που έχουν, όπως ακριβώς αυτά του συνεχούς χρόνου! Οι πιο συνήθεις ιδιότητες που μας ενδιαφερουν είναι η *παρουσία μνήμης*, η *γραμμικότητα*, η *η χρονική αμεταβλητικότητα*, η *αιτιατότητα*, και η *ευστάθεια*. Αυτές οι ιδιότητες, μαζι με μερικές ακόμα, περιγράφονται παρακάτω.

11.6.1 Κατηγορίες Συστημάτων

Ας δούμε λοιπόν αυτές τις κατηγορίες, μαζί με χαρακτηριστικά παραδείγματα ή αντιπαραδείγματα.

11.6.1.1 Σύστημα με Μνήμη

Η πρώτη κατηγορία αφορά το αν ένα σύστημα έχει ή όχι μνήμη. Ένα σύστημα λέμε οτι είναι *χωρίς μνήμη* αν η έξοδος σε μια χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από την είσοδο τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Με άλλα λόγια, ένα σύστημα είναι χωρίς μνήμη αν, για κάθε n_0, μπορούμε να βρούμε την τιμή $y[n_0]$ δεδομένης μόνο της τιμής $x[n_0]$.

Παραδειγμα:
Το σύστημα $y[n] = x^2[n]$ ειναι χωρίς μνήμη γιατι το $y[n_0]$ εξαρτάται μόνο από την τιμή $x[n_0]$. Αντίθετα, το συστημα $y[n] = x[n] + x[n-1]$ είναι με μνήμη, γιατι για τον υπολογισμό του $y[n_0]$ χρειαζόμαστε και την τιμή $x[n_0 - 1]$, εκτος απ΄ την $x[n_0]$.

11.6.1.2 Αθροιστικό Σύστημα

Ένα σύστημα λέγεται *αθροιστικό* αν ισχύει

$$T[x_1[n] + x_2[n]] = T[x_1[n]] + T[x_2[n]] \tag{11.64}$$

για οποιαδήποτε σήματα $x_1[n]$ και $x_2[n]$.

11.6.1.3 Ομογενές Σύστημα

Ένα σύστημα λέμε ότι είναι *ομογενές* αν η κλιμάκωση της εισόδου με μια σταθερά έχει ως αποτέλεσμα την κλιμάκωση της εξόδου με την ίδια σταθερά. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι αν

$$T[cx[n]] = cT[x[n]] \tag{11.65}$$

για οποιαδήποτε μιγαδική σταθερά c για κάθε σήμα εισόδου $x[n]$.

Παράδεγιμα:
Το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = \frac{x^2[n]}{x[n-1]} \tag{11.66}$$

δεν είναι αθροιστικό γιατί

$$T[x_1[n] + x_2[n]] = \frac{(x_1[n] + x_2[n])^2}{x_1[n-1] + x_2[n-1]} \tag{11.67}$$

που δεν είναι το ίδιο με το

$$T[x_1[n]] + T[x_2[n]] = \frac{x_1^2[n]}{x_1[n-1]} + \frac{x_2^2[n]}{x_2[n-1]} \tag{11.68}$$

Το σύστημα, όμως, είναι ομογενές, γιατί για είσοδο $cx[n]$, η έξοδος

$$T[cx[n]] = \frac{(cx[n])^2}{cx[n-1]} = c\frac{x^2[n]}{x[n-1]} = cT[x[n]] \tag{11.69}$$

Από την άλλη μεριά, το σύστημα που ορίζεται από τη σχέση

$$y[n] = x[n] + x^*[n-1] \tag{11.70}$$

είναι αθροιστικό (δείξτε το! :-)) αλλά δεν είναι ομογενές, γιατι

$$T[cx[n]] = cx[n] + c^*x^*[n-1] \neq cT[x[n]] = cx[n] + cx^*[n-1] \tag{11.71}$$

11.6.1.4 Γραμμικά Συστήματα

Ένα συστημα λέγεται *γραμμικό* αν είναι αθροιστικό και ομογενές. Δηλ. ένα σύστημα είναι γραμμικό αν

$$T[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]] = a_1T[x_1[n]] + a_2T[x_2[n]] \tag{11.72}$$

για δυο εισόδους $x_1[n]$ και $x_2[n]$ για δυο οποιεσδηποτε σταθερές a_1, a_2.

Παράδειγμα:
Το σύστημα

$$y[n] = 2x[n-1] + x[n] \tag{11.73}$$

είναι γραμμικό. Γιατί:
Για είσοδο $x_1[n]$, η έξοδος θα είναι

$$y_1[n] = 2x_1[n-1] + x_1[n] \tag{11.74}$$

Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$y_2[n] = 2x_2[n-1] + x_2[n] \tag{11.75}$$

Τέλος, για είσοδο $a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$, η έξοδος θα είναι

$$\begin{aligned}
y_3[n] &= 2(a_1x_1[n-1] + a_2x_2[n-1]) + (a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) && (11.76)\\
&= 2a_1x_1[n-1] + 2a_2x_2[n-1] + a_1x_1[n] + a_2x_2[n] && (11.77)\\
&= 2a_1x_1[n-1] + a_1x_1[n] + 2a_2x_2[n-1] + a_2x_2[n] && (11.78)\\
&= a_1(2x_1[n-1] + x_1[n-1]) + a_2(2x_2[n-1] + x_2[n]) && (11.79)\\
&= a_1T[x_1[n]] + a_2T[x_2[n]] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n] && (11.80)
\end{aligned}$$

Παράδειγμα:
Τα συστήματα

$$\begin{aligned}
y[n] &= \log_{10}(|x[n]|) && (11.81)\\
y[n] &= x^2[n-2] && (11.82)\\
y[n] &= \frac{1}{x[n]}, \quad x[n] \neq 0, \forall n && (11.83)
\end{aligned}$$

είναι μη γραμμικά. Επιβεβαιώστε το! :-)

Η γραμμικότητα απλοποιεί πάρα πολύ την απόκριση ενός συστηματος σε μια δεδομένη είσοδο. Για παράδειγμα, η εξοδος ενός συστηματος για είσοδο όπως η Σχέση (11.44), είναι

$$y[n] = T[x[n]] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x[k]\delta[n-k]] \tag{11.84}$$

Επειδή οι τιμές $x[k]$ είναι αριθμοί, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της ομογένειας και να έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x[k]\delta[n-k]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T[\delta[n-k]] \tag{11.85}$$

Αν ορίσουμε ότι $h_k[n]$ την απόκριση του συστήματος σε μια συνάρτηση Δέλτα τη χρονική στιγμή $n = k$, δηλ.

$$h_k[n] = T[\delta[n-k]] \tag{11.86}$$

και άρα θα έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \tag{11.87}$$

το οποίο και είναι γνωστο ως *υπέρθεση*.

11.6.1.5 Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

Ένα σύστημα λέμε οτι ειναι *χρονικά αμετάβλητο* αν μια καθυστέρηση στην είσοδο κατά n_0 δείγματα έχει ως αποτέλεσμα την καθυστέρηση της εξόδου κατά n_0 δείγματα. Πιο "μαθηματικά" :-), έστω $y[n]$ η έξοδος ενός συστήματος για μια εισοδο $x[n]$. Το σύστημα λέμε ότι είναι χρονικά αμετάβλητο αν για κάθε καθυστέρηση n_0, η απόκριση στην είσοδο $x[n-n_0]$ ειναι η $y[n-n_0]$.

Για να ελέγξουμε αν ένα σύστημα ειναι χρονικά αμετάβλητο, πρέπει να συγκρινουμε τα σήματα $y[n-n_0]$ και $T[x[n-n_0]]$. Αν είναι ίδια, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. Εναλλακτικά, μπορούμε να ελέγξουμε τους συντελεστές της εισόδου $x[n]$ στην αναπαράσταση $y[n] = T\{x[n]\}$. Αν είναι σταθεροί, τότε το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο. Αν όχι, αν δηλαδή οι συντελεστές εξαρτώνται από το χρόνο n, τότε το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

Παράδειγμα:
Το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{11.88}$$

και λέγεται *αθροιστής*, είναι χρονικά αμετάβλητο. Ας το δείξουμε. Έστω η είσοδος $x_1[n] = x[n-n_0]$. Θα πρέπει να υπολογίσουμε την έξοδο $y_1[n]$ για την είσοδο αυτή, καθώς και το σήμα $y[n-n_0]$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y_1[n] &= T[x_1[n]] && (11.89)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] && (11.90)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] && (11.91)\end{aligned}$$

Με αλλαγή μεταβλητής $u \leftarrow k - n_0$, θα έχουμε

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0] = \sum_{u=-\infty}^{n-n_0} x[u] \tag{11.92}$$

Ας υπολογιίσουμε και το $y[n-n_0]$. Είναι

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \tag{11.93}$$

Προφανώς οι Σχέσεις (11.92),(11.93) είναι ισοδύναμες (τα u, k είναι μεταβλητές με τον ίδιο ρόλο και στις δυο σχέσεις). Άρα ισχύει $y_1[n] = y[n-n_0]$. Άρα το σύστημά μας είναι χρονικά αμετάβλητο.

Παράδειγμα:
Το σύστημα που ορίζεται ως

$$y[n] = x^2[n] \tag{11.94}$$

ειναι χρονικά αμετάβλητο. Η απόκριση του συστήματος στην είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$, είναι $y_1[n] = [x[n-n_0]]^2 = x^2[n-n_0]$. Όμως, προφανώς ισχύει ότι $y_1[n] = y[n-n_0]$, άρα το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο.

Παράδειγμα:
Το σύστημα

$$y[n] = nx[n] \tag{11.95}$$

είναι χρονικά μεταβλητό. Η έξοδος του συστήματος, $y_1[n]$, για είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$ είναι $y_1[n] = nx[n-n_0]$. Όμως, η $y[n-n_0]$ ισούται με $y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0]$, που προφανώς είναι διαφορετική από την $y_1[n]$. Άρα το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο.

Μπορεί κανείς να αποδείξει τη χρονική μεταβλητότητα με κάποιο αντιπαράδειγμα.

11.6.1.6 Αιτιατά Συστήματα

Μια ιδιότητα ιδιαίτερα σημαντική για πραγματικές εφαρμογές είναι η *αιτιατότητα*, η οποία λέει ότι η απόκριση ενός συστηματος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρταται μόνο από τις χρονικές στιγμές ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ τη χρονική στιγμή $n = n_0$. Για ένα αιτιατο σύστημα, οι αλλαγές στην έξοδο δεν μπορεί να προηγούνται από αλλαγές στην είσοδο.

Παράδειγμα:
Το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση $y[n] = x[n] + x[n-1]$ είναι αιτιατο γιατι η τιμή της εξόδου τη χρονική στιγμή $n = n_0$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές εισόδου $x[n]$ στις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 - 1$. Αντίθετα, το σύστημα $y[n] = x[n] + x[n+1]$ δεν είναι αιτιατό, γιατι η έξοδος τη χρονική στιγμή n_0 εξαρτάται από την τιμή της εισόδου τις χρονικές στιγμές n_0 και $n_0 + 1$.

11.6.1.7 Ευσταθή Συστήματα

Ένα σύστημα λέγεται *ευσταθές*, αν ισχύει ότι για φραγμένη είσοδο, $|x[n]| < B_x$, η έξοδος είναι επίσης φραγμένη, $|y[n]| < B_y$, με B_x, B_y πραγματικούς αριθμούς.

Παράδειγμα:
Ο αθροιστής προηγούμενου παραδείγματος ΔΕΝ είναι ευσταθές σύστημα, γιατί αν η είσοδος είναι φραγμένη, $|x[n]| < B_x$, τότε η έξοδος είναι

$$|y[n]| = \Big|\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\Big| \leq \sum_{k=-\infty}^{n} |x[k]| < \sum_{k=-\infty}^{n} B_x \to \infty \tag{11.96}$$

Αντίθετα, το σύστημα

$$y[n] = x^2[n] + \sin(x[n]) \tag{11.97}$$

είναι ευσταθές, γιατί αν $|x[n]| < B_x$, τότε

$$|y[n]| = |x^2[n] + \sin(x[n])| \leq |x^2[n]| + |\sin(x[n])| < B_x^2 + 1 \tag{11.98}$$

αφού $|\sin(\theta)| \leq 1$.