

Κεφάλαιο 13

Ανάλυση Σημάτων και Συστημάτων στο Χώρο της Συχνότητας

13.1 Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρονου

Ένα από τα πλεονεκτήματα της αναπαράστασης σε συχνότητα των ΓΧΑ συστημάτων είναι ότι μας δίνουν μια άλλη οπτική για τη συμπεριφορά του συστήματος, βασισμένη στο χώρο της συχνότητας. Θα μιλήσουμε περισσότερο γι' αυτά στο παρόν κεφάλαιο.

Εως τώρα έχουμε συζητήσει μερικά από τα θεμέλια σημάτων και συστημάτων διακριτού χρόνου. Μιλήσαμε ιδιαίτερα για ΓΧΑ συστήματα, τα οποία όταν δέχονται είσοδο σε μορφή αθροίσματος συναρτήσεων Δέλτα, όπου η καθενιά έχει ένα συγκεκριμένο πλάτος, τότε η έξοδος δίνεται σε μορφή αθροίσματος της κρουστικής τους απόκρισης με κάποια βάρη. Πιο τυπικά, ένα σήμα $x[n]$ αναπαρίσταται εν γένει ως:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (13.1)$$

Για παράδειγμα, το σήμα

$$x[n] = 2\delta[n] - 4\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-4] \quad (13.2)$$

είναι ένα σήμα με τρεις συναρτήσεις δέλτα, με τιμές 2, -4, $\frac{1}{2}$, και αυτές βρίσκονται στις θέσεις $n = 0, n = 1, n = 4$. Η γραφική παράσταση τέτοιων σημάτων είναι απλά μια γραμμή ανάλογου ύψους σε κάθε θέση, για κάθε συνάρτηση Δέλτα.

Όμως είχαμε συζητήσει αρκετά και για μιγαδικά εκθετικά σήματα της μορφής $e^{j\omega n}$. Αυτά τα σήματα παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στα ΓΧΑ συστήματα. Το γιατί θα το δούμε αμέσως τώρα.

13.2 Ιδιοσυνάρτηση και Ιδιοτιμή ΓΧΑ Συστήματος

Τα ΓΧΑ συστήματα, όπως έχουμε πει, δεν είναι τίποτα άλλο από σήματα κι αυτά και περιγράφονται με δυο τρόπους:

Με μια εξίσωση διαφορών, που σχετίζει την είσοδο με την έξοδο, όπως για παράδειγμα

$$y[n] = 2x[n-1] - x[n-2] + x[n-3], \quad (13.3)$$

ή με την κρουστική απόκρισή τους, $h[n]$, π.χ.

$$h[n] = 2\delta[n-3] - 3\delta[n-4] + 0.6\delta[n-5]. \quad (13.4)$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος, $y[n]$, συνδέεται με την είσοδο αυτού, $x[n]$, και με την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος, με την πράξη της συνέλιξης:

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad (13.5)$$

αν δε λάβουμε υπόψη μας την απόκριση μηδενικής εισόδου. Ας δούμε λοιπόν γιατί είναι τόσο χρήσιμη η έκφραση ενός σήματος ως συνάρτηση των μιγαδικών εκθετικών $e^{j\omega n}$. Ο λόγος είναι ότι αυτά τα μιγαδικά εκθετικά

αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις των ΓΧΑ συστημάτων. Ας τα πάρουμε όμως ένα-ένα. Αρχικά, τι είναι η ιδιοσυνάρτηση;

Ιδιοσυνάρτηση ενός ΓΧΑ συστήματος είναι ένα σήμα που όταν εφαρμοστεί ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα, περνάει αυτούσιο στην έξοδο, με μόνη αλλαγή στο - πιθανώς μιγαδικό - πλάτος του. Πιο τυπικά, αν $x[n]$ είναι η είσοδος στο σύστημα και αποτελεί ιδιοσυνάρτησή του, η έξοδος θα είναι της μορφής $y[n] = \lambda x[n]$, όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ μια ιδιοτιμή του συστήματος. Ας το δούμε λίγο πιο λεπτομερώς.

Σήματα της μορφής

$$x[n] = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (13.6)$$

όπου ω είναι σταθερά, αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος. Ας το δείξουμε:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (13.7)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\omega} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (13.8)$$

Άρα, η ιδιοτιμή (eigenvalue), που συμβολίζουμε με $H(e^{j\omega})$, είναι η

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-jk\omega} \quad (13.9)$$

Επειδή πρόκειται για εν γένει μιγαδική συνάρτηση και εξαρτάται από τη συχνότητα ω του εκθετικού, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα του πραγματικού και φανταστικού μέρους της ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \quad (13.10)$$

ή με όρους μέτρου-φάσης ως

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)} \quad (13.11)$$

όπου

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} \quad (13.12)$$

και

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \quad (13.13)$$

Συχνά, η φάση συμβολίζεται και ως $\angle H(e^{j\omega})$. Θα χρησιμοποιούμε εναλλάξ αυτούς τους συμβολισμούς.

13.3 Απόκριση Σε Συχνότητα

Η συνάρτηση $H(e^{j\omega})$ είναι πολύ χρήσιμη και σημαντική για τα ΓΧΑ συστήματα, και δε θα μπορούσε να μην έχει το δικό της όνομα: ονομάζεται **απόκριση σε συχνότητα - frequency response** ή **φασματική απόκριση**¹. Το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα ονομάζεται συχνά **απόκριση πλάτους - magnitude response**, ενώ η συνάρτηση φάση ως **απόκριση φάσης - phase response**.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα της συνάρτησης αυτής είναι ότι αν η χρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πραγματική, τότε η $H(e^{j\omega})$ είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση της συχνότητας:

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) \quad (13.14)$$

Επίσης, η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι το πραγματικό μέρος της συνάρτησης $H(e^{j\omega})$ ενός πραγματικού σήματος $h[n]$ είναι άρτιο, και το φανταστικό είναι περιττό, δηλ.

$$H_R(e^{j\omega}) = H_R(e^{-j\omega}) \quad (13.15)$$

$$H_I(e^{j\omega}) = -H_I(e^{-j\omega}) \quad (13.16)$$

¹ Δεν πρέπει να σας εκπλήσσει! :-)

Ως εκ τούτου, το μέτρο της είναι άρτια συνάρτηση ως προς ω και η φάση είναι περιττή συνάρτηση ως προς ω , δηλ.

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})| \quad (13.17)$$

$$\phi(\omega) = -\phi(-\omega) \quad (13.18)$$

Η απόκριση σε συχνότητα ορίζει το πως αλλάζει ένα μιγαδικό εκθετικό (στο μιγαδικό πλάτος του, όπως είδαμε) όταν περνάει από ένα ΓΧΑ σύστημα. Επίσης, είναι πολύ χρησιμη στην ανάλυση ενός σήματος εισόδου ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών. Για παράδειγμα, η απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος στην είσοδο

$$x[n] = \sum_{k=1}^N a_k e^{j\omega_k n} \quad (13.19)$$

θα είναι

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k H(e^{j\omega_k}) e^{j\omega_k n} \quad (13.20)$$

όπου $H(e^{j\omega_k})$ είναι η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος στη συχνότητα ω_k .

Γενικότερα, λόγω της γραμμικότητας του συστήματος, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $x[n] = A e^{j(\omega_0 n + \theta)}$,
τότε η έξοδος θα είναι της μορφής
 $y[n] = A H(e^{j\omega_0}) e^{j(\omega_0 n + \theta)}$,
όπου $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

και ότι

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής $x[n] = \sum_{k=1}^N A_k e^{j(\omega_k n + \theta_k)}$,
τότε η έξοδος θα είναι της μορφής
 $y[n] = \sum_{k=1}^N A_k H(e^{j\omega_k}) e^{j(\omega_k n + \theta_k)}$,
όπου $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

Ας δούμε τώρα τι θα συμβεί - σε ένα παράδειγμα - αν στην είσοδο ενός ΓΧΑ συστήματος παρουσιαστεί ένα ημίτονο συχνότητας ω_0 . Θυμηθείτε ότι η σχέση του Euler αναλύει ένα ημίτονο σε μιγαδικά εκθετικά, τα οποία είδαμε ότι αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις ενός ΓΧΑ συστήματος.

Παράδειγμα:

Έστω ένα ημίτονο της μορφής

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (13.21)$$

Βρείτε την έξοδό ενός ΓΧΑ συστήματος με αυτό το ημίτονο στην είσοδό του.

Λύση:

Ξέρουμε ότι

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 n} e^{j\phi} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\phi} \quad (13.22)$$

Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό, η έξοδος για την παραπάνω είσοδο ισούται με το άθροισμα των εξόδων για είσοδο κάθε ένα από τα παραπάνω μιγαδικά εκθετικά. Άρα

$$y[n] = \frac{A}{2}H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + \frac{A}{2}H(e^{-j\omega_0})e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi} \quad (13.23)$$

Στην ειδική - και πολύ συνήθης - περίπτωση που το ΓΧΑ σύστημα είναι *πραγματικό*, είπαμε ότι ισχύει

$$H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) \quad (13.24)$$

και με χρήση της μορφής μέτρου-φάσης, η παραπάνω έξοδος θα γίνει

$$y[n] = \frac{A}{2}H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + \frac{A}{2}H^*(e^{j\omega_0})e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi} \quad (13.25)$$

$$= \frac{A}{2}|H(e^{j\omega_0})|e^{j\angle H(e^{j\omega_0})}e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + \frac{A}{2}|H(e^{j\omega_0})|e^{-j\angle H(e^{j\omega_0})}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi} \quad (13.26)$$

$$= \frac{A}{2}|H(e^{j\omega_0})|\left(e^{j\angle H(e^{j\omega_0})}e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + e^{-j\angle H(e^{j\omega_0})}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi}\right) \quad (13.27)$$

$$= \frac{A}{2}|H(e^{j\omega_0})|2\cos(\omega_0 n + \phi + \angle H(e^{j\omega_0})) \quad (13.28)$$

$$= A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \phi + \angle H(e^{j\omega_0})) \quad (13.29)$$

Άρα μπορούμε να πούμε ότι:

Αν η είσοδος ενός πραγματικού ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \theta),$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})|\cos(\omega_0 n + \theta + \phi(\omega_0)),$$

όπου $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

και προφανώς το παραπάνω μπορεί να γενικευτεί ως

Αν η είσοδος ενός πραγματικού ΓΧΑ συστήματος είναι της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega_k n + \theta_k),$$

τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = \sum_{k=1}^N A_k |H(e^{j\omega_k})|\cos(\omega_k n + \theta_k + \phi(\omega_k)),$$

όπου $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}$ η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος.

Παρατηρήστε ότι

$$H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j(\omega+2\pi)n} = H(e^{j\omega}) \quad (13.30)$$

γιατί $e^{j2\pi n} = 1$, για κάθε n . Γενικότερα,

$$H(e^{j(\omega+2\pi r)}) = H(e^{j\omega}), \quad r \in \mathbb{Z} \quad (13.31)$$

Με άλλα λόγια, η απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$ είναι περιοδική με περίοδο 2π . Εδώ λοιπόν είναι ευκαιρία να

επαναλάβουμε τη συζήτηση που είχαμε κάνει όταν μελετούσαμε τα μιγαδικά εκθετικά $e^{j\omega_0 n}$ και τη συμπεριφορά τους στο χώρο της συχνότητας, για να αιτιολογήσουμε και την περιοδικότητα της $H(e^{j\omega})$. Είχαμε δει ότι λόγω της 2π -περιοδικότητας στη συχνότητα ενός μιγαδικού εκθετικού $e^{j\omega_0 n}$, όσο αυξάνουμε τη συχνότητα ω_0 από το $\omega_0 = 0$ ως το $\omega_0 = \pi$, τόσο οι ταλαντώσεις του σήματος γίνονται όλο και πιο γρήγορες. Όμως, όταν αυξήσουμε το ω_0 από $\omega_0 = \pi$ ως $\omega_0 = 2\pi$, τότε οι ταλαντώσεις του γίνονται όλο και πιο αργές! Το ίδιο μοτίβο επαναλαμβάνεται και μετά το $\omega_0 = 2\pi$, ξεκινώντας από γρήγορες ταλαντώσεις γύρω από το 2π , φτάνοντας σε πιο αργές γύρω από το 3π , και ξανά σε πιο γρήγορες γύρω από το $\omega_0 = 4\pi$. Αντίστοιχα, στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, οι γρήγορες ταλαντώσεις γίνονται γύρω από τις συχνότητες $\omega_0 = \pm\pi$, ενώ οι πιο αργές (προφανώς) γύρω από τη συχνότητα $\omega_0 = 0$.

Αφού λοιπόν η απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$ είναι ένα άθροισμα από μιγαδικά εκθετικά σήματα (περιοδικά στη συχνότητα, όπως είπαμε), περιμένει κανείς να είναι κι αυτή περιοδική στο χώρο της συχνότητας με περίοδο 2π . Ένας άλλος τρόπος να εξαχθεί αυτό το συμπέρασμα είναι ότι αφού τα σήματα $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{j(\omega_0+2\pi)n}$, για $-\infty < n < +\infty$, είναι ακριβώς τα ίδια, τότε ένα σύστημα θα πρέπει να αποκρίνεται το ίδιο σε αυτά τα δυο σήματα. Άρα θα πρέπει να είναι κι αυτό περιοδικό στη συχνότητα, αφού επιβάλλεται οι τιμές της φασματικής απόκρισης $H(e^{j\omega_0})$ και $H(e^{j(\omega_0+2\pi)})$ να είναι ίδιες.

Για τους παραπάνω λόγους, αρκεί να “βλέπουμε” μια φασματική απόκριση $H(e^{j\omega})$ σε ένα διάστημα διάρκειας 2π . Προτιμούμε το διάστημα $-\pi < \omega \leq \pi$ ως “παράθυρο” στο χώρο της συχνότητας. Έτσι, οι “υψηλές” συχνότητες βρίσκονται γύρω από τις συχνότητες $\omega_0 = \pm\pi$, ενώ οι “χαμηλές” γύρω από τη συχνότητα $\omega_0 = 0$.

Ας δούμε δυο παραδείγματα συστημάτων και υπολογισμού απόκρισης σε συχνότητα.

Παράδειγμα:

Έστω το απλό σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών ως

$$y[n] = x[n - n_d] \quad (13.32)$$

που δεν είναι τίποτε περισσότερο από ένα σύστημα που καθυστερεί την είσοδό του κατά n_d δείγματα. Έστω η είσοδος $x[n] = e^{j\omega n}$, τότε η έξοδος θα είναι

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{-j\omega n_d} e^{j\omega n} \quad (13.33)$$

Άρα η απόκριση σε συχνότητα είναι

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad (13.34)$$

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της απόκρισης σε συχνότητα είναι

$$H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d) \quad (13.35)$$

και

$$H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d) \quad (13.36)$$

αντίστοιχα. Το μέτρο και η φάση της είναι

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad (13.37)$$

και

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d \quad (13.38)$$

αντίστοιχα. Η τελευταία έκφραση προκύπτει από τη Σχέση (13.34), αφού είναι ήδη γραμμένη σε πολική μορφή². Παρατηρήστε ότι η καθυστέρηση n_d μεταφράζεται ως γραμμική φάση $-\omega n_d$ στην απόκριση σε συχνότητα του συστήματος! Πολύ σημαντική παρατήρηση!

Παράδειγμα:

Έστω η χροστική απόκριση

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (13.39)$$

²Επιβεβαιώστε ότι η σχέση

$$\angle H(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}$$

δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

η οποία περιγράφει ένα σύστημα εξομάλυνσης (moving-average). Ας θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό, κι έτσι $M_1 = 0$, για περισσότερη απλοποίηση. Τότε, η απόκριση σε συχνότητα θα είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n} = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n} \quad (13.40)$$

Κάνοντας πράξεις, έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2 + 1} \left(\frac{1 - e^{-j\omega(M_2+1)}}{1 - e^{-j\omega}} \right) \quad (13.41)$$

$$= \frac{1}{M_2 + 1} \frac{e^{-j\omega(M_2+1)/2} (e^{j\omega(M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_2+1)/2})}{e^{-j\omega/2} (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2})} \quad (13.42)$$

$$= \frac{1}{M_2 + 1} \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M_2/2} \quad (13.43)$$

Ας δούμε τώρα αυτό το σύστημα λίγο πιο λεπτομερώς. Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε τη συμπεριφορά της φασματικής απόκρισης συναρτήσει του ω . Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής μηδενίζεται όταν

$$\sin(\omega(M_2 + 1)/2) = 0 \iff \frac{\omega(M_2 + 1)}{2} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \iff \omega = \frac{2k\pi}{M_2 + 1}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (13.44)$$

και ο παρονομαστής όταν

$$\sin(\omega/2) = 0 \iff \omega = 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z} \quad (13.45)$$

Παρατηρούμε ότι όταν μηδενίζεται ο παρονομαστής, μηδενίζεται και ο αριθμητής (στα πολλαπλάσια του 2π). Άρα τι συμβαίνει στα πολλαπλάσια του 2π ; Υπάρχει κάποια απροσδιοριστία. Όμως ξέρουμε ότι

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\lambda\omega)}{\sin(\omega)} = \lambda \quad (13.46)$$

και άρα στα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή (και ταυτόχρονα του αριθμητή), η απόκριση σε συχνότητα έχει τιμή

$$H(e^{j0}) = \frac{1}{M_2 + 1} M_2 + 1 = 1 \longrightarrow |H(e^{j0})| = 1 \quad (13.47)$$

Αν γράψουμε λοιπόν τη φασματική απόκριση σε πολική μορφή (απόκριση πλάτους - απόκριση φάσης), θα έχουμε:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2 + 1} \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M_2/2} \quad (13.48)$$

$$= \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| e^{j\phi_r(\omega)} e^{-j\omega M_2/2} \quad (13.49)$$

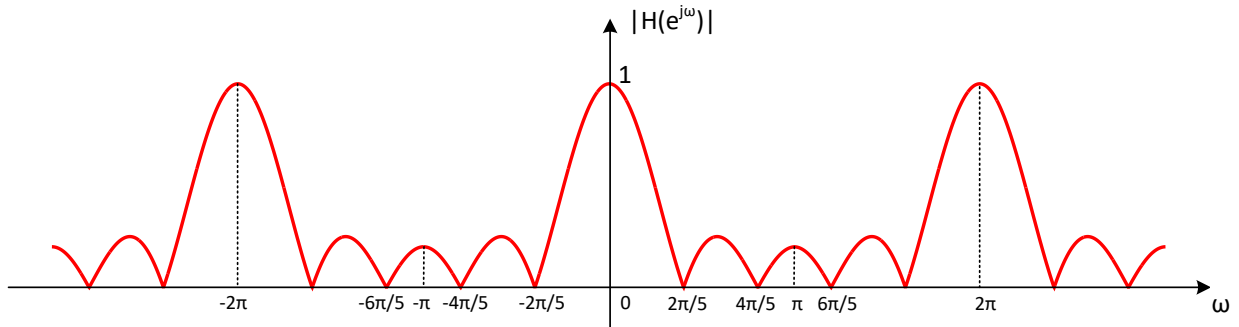
$$= \left(\frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \right) \left(e^{j\phi_r(\omega)} e^{-j\omega M_2/2} \right) \quad (13.50)$$

$$= \left(\frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \right) \left(e^{j(\phi_r(\omega) - \omega M_2/2)} \right) \quad (13.51)$$

με $\phi_r(\omega)$ την απόκριση φάσης του όρου που αποτελείται από το πηλίκο ημιτόνων. Είναι εμφανές ότι η απόκριση πλάτους είναι

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{M_2 + 1} \left| \frac{\sin(\omega(M_2 + 1)/2)}{\sin(\omega/2)} \right| \quad (13.52)$$

και για $M_2 = 4$ φαίνεται στο Σχήμα (13.1). Επειδή το σήμα $h[n]$ είναι πραγματικό, υπάρχει άρτια συμμετρία στην απόκριση πλάτους. Εξετάζοντας την τελευταία στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ παρατηρούμε ότι έχει χαμηλές τιμές για $|\omega| > 2\pi/5$, και υψηλές τιμές για $|\omega| < 2\pi/5$. Αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται κάθε 2π . Ας το κρατήσουμε.



Σχήμα 13.1: Απόκριση πλάτους $|H(e^{j\omega})|$ του σήματος εξομάλυνσης $h[n]$ για $M_1 = 0$, $M_2 = 4$.

Όσον αφορά την απόκριση φάσης, αυτή δίνεται από τη σχέση

$$\phi(\omega) = \phi_r(\omega) - \frac{\omega M_2}{2} \quad (13.53)$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση έχει μια σταθερή φάση $-\omega M_2/2$, αλλά πρέπει σε αυτή να δούμε αν υπάρχει φάση $\phi_r(\omega)$ από το πηλίκο των ημιτόνων. Με άλλα λόγια, πρέπει να ελέγξουμε αν αυτό το πηλίκο γίνεται αρνητικό, για κάποιο διάστημα συχνότητας ω . Όποτε (και αν) αυτό συμβαίνει, το αρνητικό πρόσημο του πηλίκου μετατρέπεται σε φάση π , δηλ. $\phi_r(\omega) = \pi$, σύμφωνα με τη σχέση του Euler

$$e^{j\pi} = -1 \quad (13.54)$$

και αυτή η φάση προστίθεται στην ήδη υπάρχουσα φάση $-\omega M_2/2$. Έτσι είμαστε βέβαιοι/ες ότι το πηλίκο ημιτόνων είναι πάντα θετικό, όπως ορίζει η πολική μορφή της Σχέσης (13.43). Με άλλα λόγια, αν το πηλίκο ημιτόνων είναι θετικό για κάποιο διάστημα συχνότητας, εκεί η φάση παραμένει ως έχει, αφού $\phi_r(\omega) = 0$. Ας το δούμε λοιπόν.

Ας δούμε ξανά τη διαδικασία σε ένα διάστημα διάρκειας 2π , έστω στο $[0, 2\pi)$. Για το πηλίκο ημιτόνων, ο παρονομαστής $\sin(\omega/2)$ είναι πάντα θετικός στο διάστημα αυτό. Ας ελέγξουμε το πρόσημο του αριθμητή. Σύμφωνα με τα σημεία μηδενισμού που βρήκαμε νωρίτερα, ο αριθμητής αλλάζει πρόσημο κάθε $\frac{2\pi}{M_2+1}$, ξεκινώντας στο $[0, \frac{2\pi}{M_2+1})$ με θετικές τιμές (αφού κάθε ημίτονο μοναδιαίου πλάτους έχει θετικές τιμές αμέσως αριστερά του μηδενός). Ας θέσουμε ξανά $M_2 = 4$ για περισσότερη απλότητα. Ο αριθμητής είναι αρνητικός στα διαστήματα $[\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5})$ και $[\frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5})$, το αρνητικό πρόσημο του οποίου μπορεί να γραφεί ως φάση $\phi_r(\omega) = \pi$. Στα ενδιάμεσα διαστήματα, ο αριθμητής (και άρα το πηλίκο) είναι θετικό, οπότε δεν αλλάζει κάτι στη φάση.

Άρα τελικά η απόκριση φάσης μπορεί να γραφεί ως

$$\angle H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -2\omega, & 0 \leq \omega < \frac{2\pi}{5} \\ -2\omega + \pi, & \frac{2\pi}{5} \leq \omega < \frac{4\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{4\pi}{5} \leq \omega < \frac{6\pi}{5} \\ -2\omega + \pi, & \frac{6\pi}{5} \leq \omega < \frac{8\pi}{5} \\ -2\omega, & \frac{8\pi}{5} \leq \omega < 2\pi \end{cases} \quad (13.55)$$

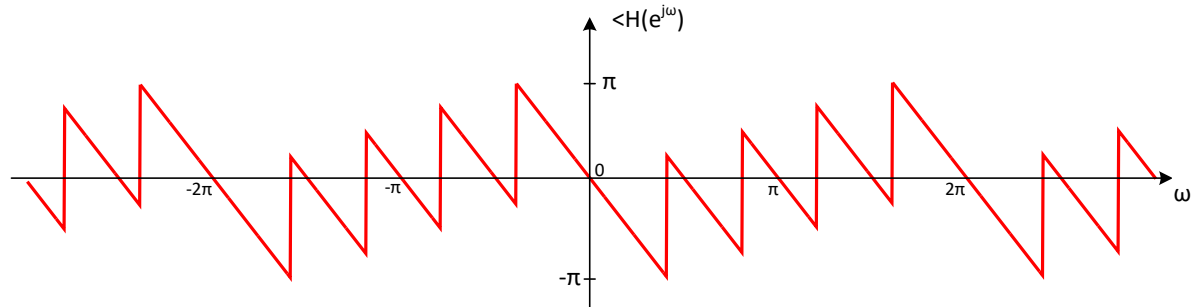
Επειδή το σήμα $h[n]$ είναι πραγματικό, θα υπάρχει περιττή συμμετρία στην απόκριση φάσης, και άρα η μορφή της θα είναι όπως στο Σχήμα (13.2).

Έχοντας λοιπόν αυτήν την ανάλυση σε αποκρίσεις πλάτους και φάσης, μπορούμε να καταλάβουμε τι (περίπου) επίπτωση θα έχει το παραπάνω σύστημα σε ένα, παραδείγματος χάριν, ημίτονο συχνότητας ω_0 που θα εμφανιστεί στην είσοδό του. Ας το δούμε με αριθμητικό παράδειγμα, αλλά κοιτώντας μόνο τα Σχήματα (13.1, 13.2).

Έστω ότι το ημίτονο έχει συχνότητα $\omega_0 = \pi/5$, μέτρο A και αρχική φάση θ , είναι δηλαδή της μορφής

$$x[n] = A \cos(\pi n/5 + \theta) \quad (13.56)$$

Ξέρουμε από προηγούμενη ανάλυση ότι η έξοδος του συστήματος θα είναι κι αυτή ημιτονοειδούς μορφής, με



Σχήμα 13.2: Απόκριση φάσης $\angle H(e^{j\omega})$ του σήματος εξομάλυνσης $h[n]$ για $M_1 = 0$, $M_2 = 4$.

πιθανώς τροποποιημένο πλάτος και φάση. Κοιτάζοντας το πλάτος της συχνότητας $\omega_0 = \pi/5$ στην απόκριση πλάτους του Σχήματος (13.1), βλέπουμε ότι στην έξοδο το πλάτος θα μειωθεί περίπου στο μισό, ενώ βλέποντας τη φάση της συχνότητας $\omega_0 = \pi/5$ στην απόκριση φάσης του Σχήματος (13.2), βλέπουμε ότι στην έξοδο η φάση θα είναι ίση με $(\theta - 2\pi/5)$. Άρα μια καλή προσέγγιση της εξόδου του συστήματος για την παραπάνω είσοδο, θα είναι

$$y[n] \approx \frac{A}{2} \cos(\pi n/5 + \theta - 2\pi/5) \quad (13.57)$$

Όμοια, αν η συχνότητα της εισόδου είναι $\omega_0 = \pi/2$, τότε το πλάτος του ημιτόνου θα μειωθεί σημαντικά (περίπου στο 1/3 του), όπως μπορούμε να δούμε από την απόκριση πλάτους στη συχνότητα $\omega_0 = \pi/2$, ενώ η φάση που θα προστεθεί στην αρχική φάση θ είναι μηδέν, γιατί “πέφτουμε” στο διάστημα $[2\pi/5, 4\pi/5)$, όπου η φάση είναι $-2\omega + \pi$, και άρα για $\omega_0 = \pi/2$ έχουμε φάση συστήματος ίση με μηδέν. Άρα η φάση της εισόδου παραμένει αμετάβλητη! Άρα μια καλή προσέγγιση της εξόδου του συστήματος για την παραπάνω είσοδο, θα είναι

$$y[n] \approx \frac{A}{3} \cos(\pi n/2 + \theta) \quad (13.58)$$

Πέρα από συγκεκριμένες εισόδους, μπορούμε να πούμε ότι το παραπάνω σύστημα έχει χαρακτηριστικά χαμηλοπερατού φίλτρου, μια και κρατά σχετικά ανέπαφα τα πλάτη που βρίσκονται σε χαμηλές συχνότητες, ενώ αντίθετα αδυνατίζει σημαντικά τα πλάτη μεγαλύτερων συχνοτήτων. Γι’ αυτό άλλωστε και το χαρακτηρίσαμε ως σύστημα εξομάλυνσης στην αρχή της μελέτης μας.

Κλείνοντας, δείτε ένα πραγματικό παράδειγμα στο Σχήμα (13.3). Στο πρώτο σχήμα, βλέπετε 1000 δείγματα ενός ημιτόνου στα 100 Hz, δειγματοληπτημένου στα 16000 Hz, άρα με συχνότητα $\omega_0 = \frac{2\pi \cdot 100}{16000} = 0.0393$ rad. Στο δεύτερο σχήμα, του προσθέτουμε τυχαίο θόρυβο από κανονική κατανομή και θεωρούμε αυτό ως είσοδο σε ένα σύστημα moving average. Στο τρίτο σχήμα, φαίνεται η έξοδος του συστήματος, για $M_1 = 0$, $M_2 = 4$, ενώ στο τέταρτο σχήμα, η έξοδος για $M_1 = 0$, $M_2 = 9$.

Ο κώδικας MATLAB που υλοποιεί το παραπάνω παράδειγμα είναι ο ακόλουθος.

```
% Dhmiourgia 1000 deigmatwn hmitonou sta 100 Hz
```

```
x = sin(2*pi*100/16000*[0:999]);
```

```
% Pros8hkh 8orybou
```

```
xx = x + 0.2*randn(1,1000);
```

```
% Apeikonish
```

```
subplot(411); plot(x);
```

```
subplot(412); plot(xx);
```

```
% Ylopoihs filtrou
```

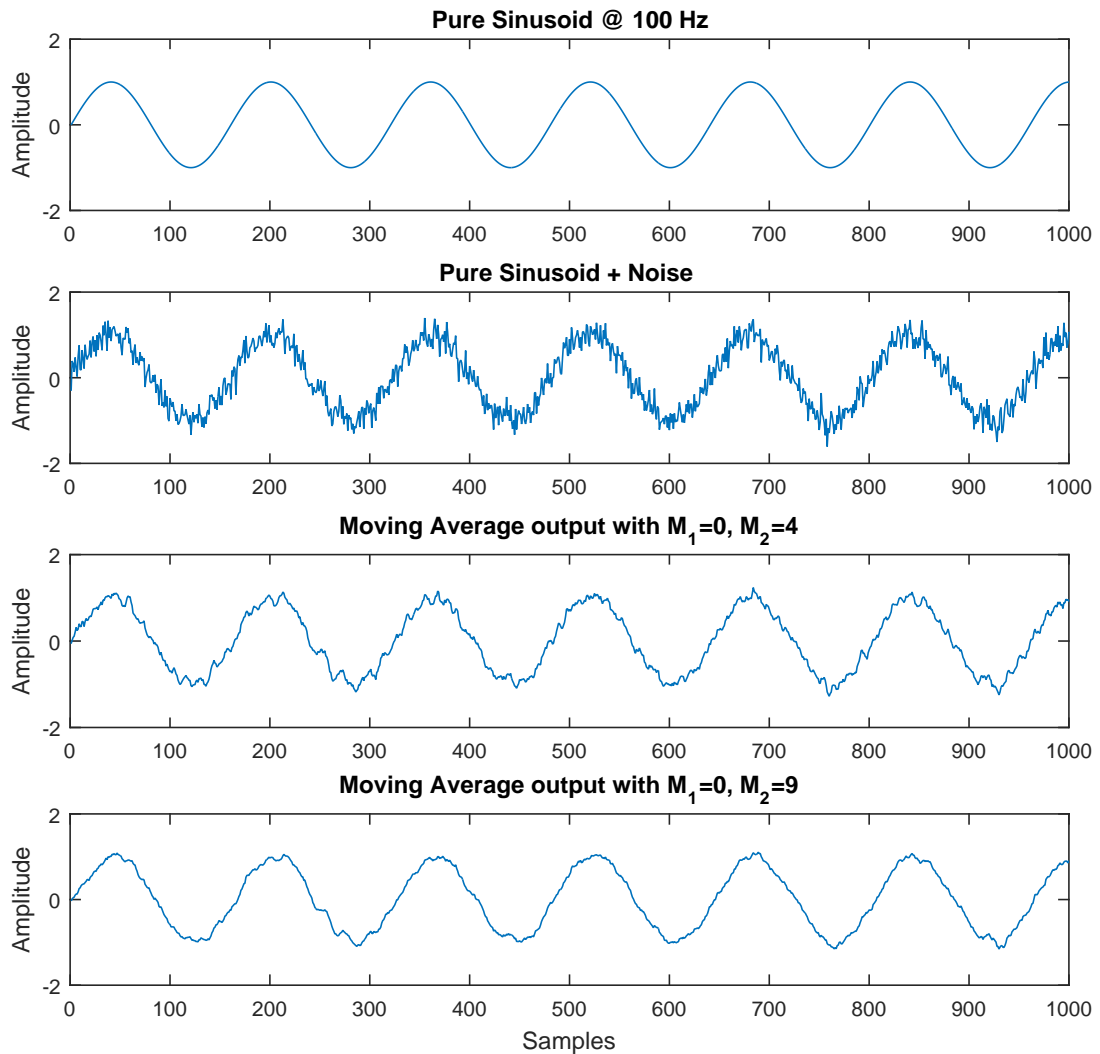
```
M_1 = 0;
```

```
M_2 = 4;
```

```
C = 1/(M_1+M_2+1);
```

```
% Filtrarisma
```

```
y = filter(C*ones(1,M_1+M_2+1), 1, xx);
```

Σχήμα 13.3: Παράδειγμα moving average φίλτρου στο MATLAB.

```
% Apeikonish
subplot(413); plot(y);

% Ylopoihs filtrou
M_1 = 0;
M_2 = 9;
C = 1/(M_1+M_2+1);

% Filtrarisma
y = filter(C*ones(1,M_1+M_2+1), 1, xx);

% Apeikonish
subplot(414); plot(y);
```

Μπορείτε να πειραματιστείτε με τον παραπάνω κώδικα για διάφορες εισόδους (αθροίσματα ημιτόνων), διαφορετική ισχύ θορύβου (αλλάζτε το 0.2 στην εντολή `randn`), και για διάφορες τιμές του M_2 .

13.4 Ξαφνική είσοδος σε ΓΧΑ σύστημα

Ως τώρα είδαμε ότι μιγαδικά εκθετικά της μορφής $e^{j\omega n}$, $-\infty < n < \infty$ παράγουν εξόδους της μορφής $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ σε ΓΧΑ συστήματα, αποτελούν δηλαδή ιδιοσυναρτήσεις των ΓΧΑ συστημάτων.

Τέτοιες μορφές εισόδων, μη μηδενικές για κάθε n , μπορεί να σας φαίνονται μη πρακτικά μοντέλα σημάτων. Όμως, όπως θα δούμε τώρα, μοντέλα τέτοιας μορφής είναι κρίσιμα για την μαθηματική αναπαράσταση ενός μεγάλου εύρους σημάτων, ακόμα και αυτών που υπάρχουν μόνο σε πεπερασμένο διάστημα. Έτσι, θα μάθουμε περισσότερα για τη συμπεριφορά ΓΧΑ συστημάτων αν θεωρήσουμε ως εισόδο τους πιο πρακτικά σήματα, όπως το

$$x[n] = e^{j\omega n} u[n] \quad (13.59)$$

δηλαδή μιγαδικά εκθετικά που εφαρμόζονται ξαφνικά σε μια τυχαία χρονική στιγμή, που για λόγους ευκολίας εδώ θεωρούμε ότι είναι η $n = 0$. Με χρήση του ολοκληρώματος της συνέλιξης, θα έχουμε ότι η έξοδος είναι της μορφής

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \left(\sum_{k=0}^n h[k] e^{-j\omega kn} \right) e^{j\omega n}, & n \geq 0 \end{cases} \quad (13.60)$$

Αν θεωρήσουμε την έξοδο για $n \geq 0$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$y[n] = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega kn} \right) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega kn} \right) e^{j\omega n} \quad (13.61)$$

$$= H(e^{j\omega n}) e^{j\omega n} - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \quad (13.62)$$

$$= y_{ss}[n] + y_t[n] \quad (13.63)$$

Από την τελευταία σχέση βλέπουμε ότι η έξοδος αποτελείται από δυο όρους. Ο πρώτος όρος, $y_{ss}[n]$, ονομάζεται *steady state response*. Είναι ακριβώς ίδιος με την απόκριση σε συχνότητα του συστήματος για ένα μιγαδικό εκθετικό που ορίζεται για κάθε n . Ο δεύτερος όρος

$$y_t[n] = - \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right) e^{j\omega n} \quad (13.64)$$

ονομάζεται *transient response*, και μπορεί κανείς να τον δει ως το “πόσο απέχει” το αποτέλεσμά μας από το αποτέλεσμα της ιδιοτιμής που είδαμε νωρίτερα. Θα δείξουμε ότι για κάποιες περιπτώσεις η transient response μπορεί να πλησιάζει το μηδέν.

Για να δούμε πότε συμβαίνει αυτό, ας αναζητήσουμε το μέγεθος του δεύτερου αυτού όρου. Το μέτρο του είναι φραγμένο, ως

$$|y_t[n]| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} h[k] e^{-j\omega k} e^{j\omega n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |h[k]| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| \quad (13.65)$$

Με βάση αυτό, διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

1. Αν η κρουστική απόκριση $h[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας, έτσι ώστε $h[n] \neq 0$, $0 \leq n \leq M$, και παντού αλλού μηδέν, τότε ο όρος $y_t[n] = 0$, $n > M - 1$. Άρα τότε

$$y[n] = y_{ss}[n] = H(e^{j\omega n}) e^{j\omega n}, \quad n > M - 1 \quad (13.66)$$

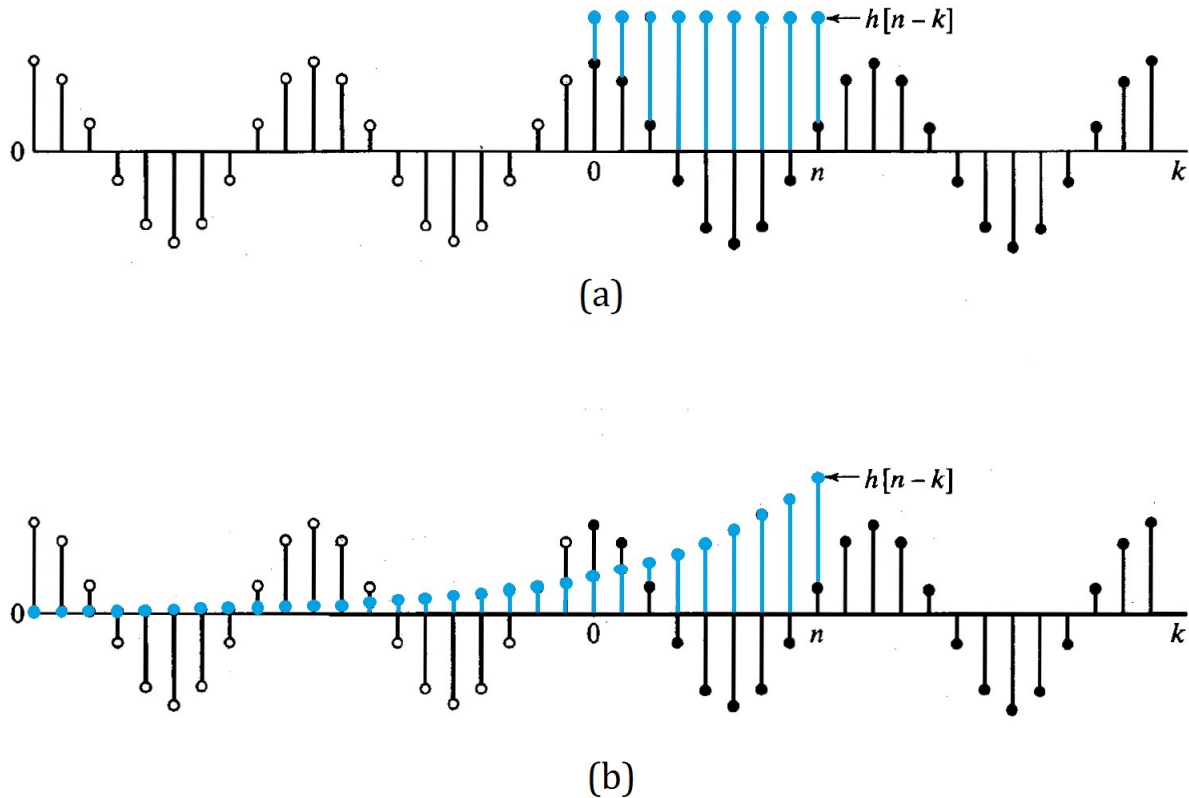
2. Όταν η κρουστική απόκριση έχει άπειρη διάρκεια, τότε η transient response δεν εξαφανίζεται ακαριαία, αλλά αν οι τιμές της κρουστικής απόκρισης $h[n]$ πλησιάζουν στο μηδέν όσο αυξάνει το n , τότε και το $y_t[n]$ θα πλησιάζει στο μηδέν! Είδατε στη Σχέση (13.65) ότι η transient response είναι φραγμένη από το άθροισμα των απολύτων τιμών ΟΛΩΝ των δειγμάτων της κρουστικής απόκρισης. Αν λοιπόν το άθροισμα αυτό είναι φραγμένο, έτσι ώστε

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]| < \infty \quad (13.67)$$

τότε το σύστημα είναι ευσταθές, όπως γνωρίζετε. Από τη Σχέση (13.65), συνεπάγεται ότι για ευσταθή συστήματα, η transient response πρέπει να φθίνει προς το μηδέν, όσο $n \rightarrow \infty$. Έτσι, μια ικανή συνθήκη για να φθίνει η transient response γρήγορα είναι το σύστημα να είναι ευσταθές.

Ας δούμε ένα οπτικό παράδειγμα. Το Σχήμα (13.4) δείχνει το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού εκθετικού

($\Re\{e^{j\omega n}\} = \cos(\omega n)$) με συχνότητα $\omega = 2\pi/10$. Και στα δυο υπο-σχήματα, οι σκούρες τελείες δείχνουν τα δείγματα του σήματος $\Re\{e^{j\omega n}\}u[n]$, δηλ. ένα σήμα που εμφανίζεται ξαφνικά, ενώ οι λευκές τελείες δείχνουν τα υπόλοιπα δείγματα του $\Re\{e^{j\omega n}\}$, που “λείπουν”. Οι μπλέ τελείες δείχνουν τα δείγματα της χρουστικής απόκρισης του συστήματος $h[n]$, που έχει υποστεί ανάκλαση και μετατόπιση, όπως είχαμε δει στη συνέλιξη.



Σχήμα 13.4: Παράδειγμα ξαφνικής εισόδου σε ΓΧΑ σύστημα όταν (a) η χρουστική απόκριση είναι πεπερασμένη, (b) η χρουστική απόκριση είναι άπειρη.

Στην περίπτωση (13.4a), τα δείγματα της χρουστικής απόκρισης είναι πεπερασμένα, και συγκεκριμένα 9 δείγματα, με $n = 8$ στο $h[n-k]$, όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω. Είναι ξεκάθαρο εδώ ότι η έξοδος θα αποτελείται μόνο από το steady state κομμάτι, για $n \geq 8$, ενώ στην περίπτωση (13.4b), όπου η χρουστική απόκριση είναι άπειρης διάρκειας, είναι ξεκάθαρο ότι τα δείγματα που “λείπουν” από το $\Re\{e^{j\omega n}\}u[n]$, δηλ. αυτά με τις λευκές τελείες, έχουν όλο και λιγότερη επίδραση στην έξοδο όσο το n αυξάνει, λόγω της φθίνουσας μορφής της χρουστικής απόκρισης.

Κλείνοντας, η συνθήκη

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad (13.68)$$

είναι ικανή και αναγκαία για την κυριαρχία του steady state κομματιού της εξόδου. Θυμηθείτε ότι η ίδια συνθήκη είναι ικανή και αναγκαία για την ύπαρξη της απόκρισης σε συχνότητα, αλλά και για την ευστάθεια του συστήματος. Έτσι, ένα μιγαδικό εκθετικό που υπάρχει για κάθε n μπορεί κανείς να το φανταστεί να ξεκινάει από το $n = -\infty$. Η ιδιότητα της ιδιοσυνάρτησης των μιγαδικών εκθετικών εξαρτάται από την ευστάθεια του συστήματος, κι έτσι σε πεπερασμένο n , η transient response θα πρέπει να έχει μηδενιστεί, ώστε να βλέπουμε μόνο τη steady state response $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ για κάθε πεπερασμένο n .

13.5 Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου

Θα ήταν ενδιαφέρον λοιπόν, μετά από τόση συζήτηση :-) - να δούμε πως μοιάζει ένα σήμα (ή σύστημα) όχι στο χρόνο, αλλά στη συχνότητα. Το βασικότερο εργαλείο για αυτή τη δουλειά είναι ο Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT), που είναι μια μαθηματική σχέση που μας “περνάει” από το πεδίο του (διακριτού)

χρόνου n στο πεδίο της συχνότητας ω . Ο DTFT ορίζεται ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (13.69)$$

και ο αντίστροφός του (δηλ. το μαθηματικό εργαλείο που μας κάνει την αντίστροφη δουλειά, δηλ. μας πάει από το χώρο της συχνότητας στο χώρο του χρόνου) ορίζεται ως:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega. \quad (13.70)$$

Επίσης, δείτε ότι ο DTFT είναι περιοδικό σήμα ως προς ω , δηλ. $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$ ³. Προσέξτε ότι στο μετασχ. Fourier συνεχούς χρόνου, μια τέτοια περιοδικότητα δεν υπήρχε⁴.

Μας είναι βολικό να ενδιαφερόμαστε για το φάσμα του DTFT στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, σε μια περίοδο δηλαδή του μετασχηματισμού⁵. Θεωρούμε ότι εκτός αυτού του διαστήματος, το σήμα επαναλαμβάνεται περιοδικά. Παρατηρήστε ότι για να συνθέσουμε το σήμα στο χρόνο από τον DTFT του, μας αρκεί μια περίοδος (2π) του φάσματός του, όπως υποδηλώνει το ολοκλήρωμα της Σχέσης (13.70). Επίσης, προσέξτε ότι η Σχέση (13.70) μας αναπαριστά ένα σήμα στο χρόνο $x[n]$ ως υπέρθεση απειροστά μικρής συχνότητας μιγαδικών εκθετικών της μορφής

$$\frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (13.71)$$

με τη μεταβλητή ω να ορίζεται σε ένα διάστημα διάρκειας 2π , και το $X(e^{j\omega})$ να δηλώνει το “βάρος - συντελεστή” καθενός μιγαδικού εκθετικού. Με άλλα λόγια:

Ο μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου $X(e^{j\omega})$ μας πληροφορεί για το μέτρο και τη φάση των μιγαδικών εκθετικών με συχνότητες $d\omega$, οι οποίες παίρνουν *συνεχείς τιμές* στο $(-\pi, \pi]$, και “υπάρχουν” μέσα στο σήμα $x[n]$. Δηλ. μας βρίσκει τη συνάρτηση $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\phi_x(e^{j\omega})}$

Ο αντίστροφος μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου χρησιμοποιεί τη συνάρτηση $X(e^{j\omega})$, δηλ. το μετασχ. Fourier διακριτού χρόνου, για να *συνθέσει* το σήμα στο χρόνο $x[n]$, ως ένα συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) μιγαδικών εκθετικών όλων των πιθανών συχνοτήτων $d\omega$ του διαστήματος $(-\pi, \pi]$, με το καθένα εκθετικό να έχει συντελεστή $X(e^{j\omega})$, κανονικοποιημένο με συντελεστή $1/2\pi$.

Ο DTFT είναι εν γένει μιγαδικό σήμα. Άρα μπορεί να χωριστεί σε πραγματικό, $\Re\{X(e^{j\omega})\}$, και φανταστικό, $\Im\{X(e^{j\omega})\}$, μέρος, όπως επίσης και να γραφεί σε μορφή μέτρου-φάσης:

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})} \quad (13.72)$$

με

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{\Re\{X(e^{j\omega})\} + \Im\{X(e^{j\omega})\}} = \sqrt{X_R(e^{j\omega}) + X_I(e^{j\omega})} \quad (13.73)$$

και

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{\Im\{X(e^{j\omega})\}}{\Re\{X(e^{j\omega})\}} \quad (13.74)$$

Το μέτρο, $|X(e^{j\omega})|$, του μετασχ. Fourier, καθώς και η γραφική του παράσταση, συχνά ονομάζεται *φάσμα πλάτους*

³Φυσικά, ήταν αναμενόμενο, μια και ο μετασχ. Fourier ενός σήματος διακριτού χρόνου δεν είναι τίποτα άλλο από το φάσμα του δειγματοληπτημένου σήματος, που όπως γνωρίζετε, είναι περιοδικό με περίοδο ω_s . Χμ... και πώς από το $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ ξαφνικά εδώ έχουμε περιοδικότητα ανά 2π ; Γιατί φυσικά δεν προέρχονται όλα τα σήματα διακριτού χρόνου από δειγματοληψία αντίστοιχων σημάτων συνεχούς χρόνου. Ένα σήμα διακριτού χρόνου μπορεί να οριστεί κατ' ευθείαν στο διακριτό χρόνο, χωρίς να υποθέσουμε οτιδήποτε για κάποια δειγματοληψία του, και άρα να θέσουμε $T_s = 1$.

⁴Προφανώς, γιατί $X(\omega) \neq X(\omega + 2\pi)$, γιατί φυσικά $e^{j\omega t} \neq e^{j(\omega+2\pi)t} = e^{j\omega t}e^{j2\pi t}$

⁵Το γιατί, το συζητήσαμε διεξοδικά :-)

- *magnitude spectrum*, ενώ η φάση, $\angle X(e^{j\omega})$, του μετασχηματισμού ονομάζεται *φάσμα φάσης* - *phase spectrum*.

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα είναι ότι αν το σήμα στο χρόνο $x[n]$ είναι πραγματικό, τότε ο DTFT $X(e^{j\omega})$ είναι συζυγής συμμετρική συνάρτηση της συχνότητας:

$$X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) \quad (13.75)$$

Επίσης, η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι το πραγματικό μέρος της συνάρτησης $X(e^{j\omega})$ ενός πραγματικού σήματος $x[n]$ είναι άρτιο, και το φανταστικό είναι περιττό, δηλ.

$$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega}) \quad (13.76)$$

$$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega}) \quad (13.77)$$

Ως εκ τούτου, το μέτρο της είναι άρτια συνάρτηση ως προς ω και η φάση είναι περιττή συνάρτηση ως προς ω , δηλ.

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad (13.78)$$

$$\phi_x(e^{j\omega}) = -\phi_x(e^{-j\omega}) \quad (13.79)$$

Μάλιστα, οι παραπάνω σχέσεις μας βοηθούν να αναπτύξουμε μια πολύ πιο διαισθητική σχέση για το μετασχ. Fourier ως εξής:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (13.80)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega \quad (13.81)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega \quad (13.82)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{-j\omega})| e^{j\phi_x(e^{-j\omega})} e^{-j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega \quad (13.83)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{-j\phi_x(e^{j\omega})} e^{-j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega \quad (13.84)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (|X(e^{j\omega})| e^{-j\phi_x(e^{j\omega})} e^{-j\omega n} + |X(e^{j\omega})| e^{j\phi_x(e^{j\omega})} e^{j\omega n}) d\omega \quad (13.85)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2|X(e^{j\omega})| \cos(\omega n + \phi_x(e^{j\omega})) d\omega \quad (13.86)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ξεκάθαρα ότι ένα πραγματικό σήμα μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα ημιτόνων διακριτού χρόνου, με συχνότητες που παίρνουν κάθε τιμή στο διάστημα $[0, \pi]$, με πλάτη $2|X(e^{j\omega})|$ και φάσεις $\phi_x(e^{j\omega})$, για $0 \leq \omega \leq \pi$.

13.5.1 Ύπαρξη του Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

Για να υπάρχει ο DTFT, θα πρέπει να συγκλίνει το άθροισμα που υπάρχει στον ορισμό του, δηλ.

$$|X(e^{j\omega})| < \infty \iff \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n] e^{-j\omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| |e^{-j\omega n}| < \infty \quad (13.87)$$

Όμως, ξέρουμε ότι $|e^{-j\omega n}| = 1$, άρα αρκεί

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad (13.88)$$

δηλ. το σήμα πρέπει να είναι απολύτως αθροίσιμο. Η παραπάνω συνθήκη εγγυάται ταυτόχρονα και την ομοιόμορφη σύγκλιση του αθροίσματος. Αυτή η συνθήκη όμως είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία. Για παράδειγμα, το σήμα $x[n] = \frac{\sin(n)}{n}$ δεν ικανοποιεί τη Σχέση (13.88), αλλά υπάρχει ο DTFT του. Έτσι, πολλά σήματα δεν είναι απολύτως αθροίσιμα, αλλά είναι αθροίσιμα με την τετραγωνική έννοια, δηλ.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (13.89)$$

Τέτοια σήματα μπορούν να παρασταθούν με τον DTFT, αν είμαστε πρόθυμοι να “χαλαρώσουμε” λίγο τη συνθήκη της ομοιόμορφης σύγκλισης :-). Συγκεκριμένα, για τη μέση τετραγωνική σύγκλιση, ισχύει ότι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (13.90)$$

και

$$X_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^M x[n]e^{-j\omega n} \quad (13.91)$$

τότε

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0 \quad (13.92)$$

Με άλλα λόγια, το σφάλμα $|X(e^{j\omega}) - X_M(e^{j\omega})|$ μπορεί να μη συγκλίνει στο μηδέν για κάθε ω όσο το $M \rightarrow \infty$, αλλά η συνολική “ενέργεια” του σφάλματος τείνει στο μηδέν.

13.5.2 Χρήσιμες Σχέσεις

Στις περιπτώσεις που μας ζητείται να υπολογίσουμε τον DTFT με τον ορισμό, πολύ χρήσιμες θα μας φανούν οι Σχέσεις του Πίνακα (13.1), τις οποίες έχουμε ξαναδεί σε προηγούμενο κεφάλαιο και απλά τις υπενθυμίζουμε εδώ.

Χρήσιμα Αθροίσματα (Σειρές)	
$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, a < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}, a < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$
$\sum_{n=N_1}^{N_2} a^n = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$	

Πίνακας 13.1: Χρήσιμα Αθροίσματα.

13.5.3 Χαρακτηριστικά Παραδείγματα

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n] = a^n u[n]$, με a πραγματικός αριθμός με $|a| < 1$.

Λύση:
Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n u[n]e^{-j\omega n} \quad (13.93)$$

Επειδή η $u[n]$, η γνωστή βηματική συνάρτηση, είναι μη μηδενική και ίση με 1 για $n \geq 0$, μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n \quad (13.94)$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις δυο παραπάνω σχέσεις (5),(6) που γράψαμε, όπου

$\alpha = (ae^{-j\omega})$. Άρα θα έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (13.95)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι ο DTFT. Όπως φαίνεται, είναι μια μιγαδική συνάρτηση του ω . Δυστυχώς, δε γίνεται να σχεδιαστεί αυτή η συνάρτηση στο χαρτί. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να σχεδιάσουμε το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος της, ξεχωριστά, ή ακόμα και το μέτρο ή τη φάση της συνάρτησης.

Το μέτρο λοιπόν του DTFT θα είναι

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \right| = \left| \frac{1}{1 - a \cos(\omega) + ja \sin(\omega)} \right| \quad (13.96)$$

$$= \frac{1}{|1 - a \cos(\omega) + ja \sin(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - a \cos(\omega))^2 + (a \sin(\omega))^2}} \quad (13.97)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(\omega)}} \quad (13.98)$$

ενώ για τη φάση του DTFT θα πρέπει να γράψουμε τον DTFT σε μορφή μέτρου-φάσης, πολλαπλασιάζοντας με το συζυγή του παρονομαστή:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1 - ae^{j\omega}}{|1 - ae^{-j\omega}|^2} = \frac{1 - a \cos(\omega) - ja \sin(\omega)}{|1 - ae^{-j\omega}|^2} \quad (13.99)$$

$$= \frac{1 - a \cos(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} - j \frac{a \sin(\omega)}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2} \quad (13.100)$$

$$= \Re\{X(e^{j\omega})\} + j\Im\{X(e^{j\omega})\} \quad (13.101)$$

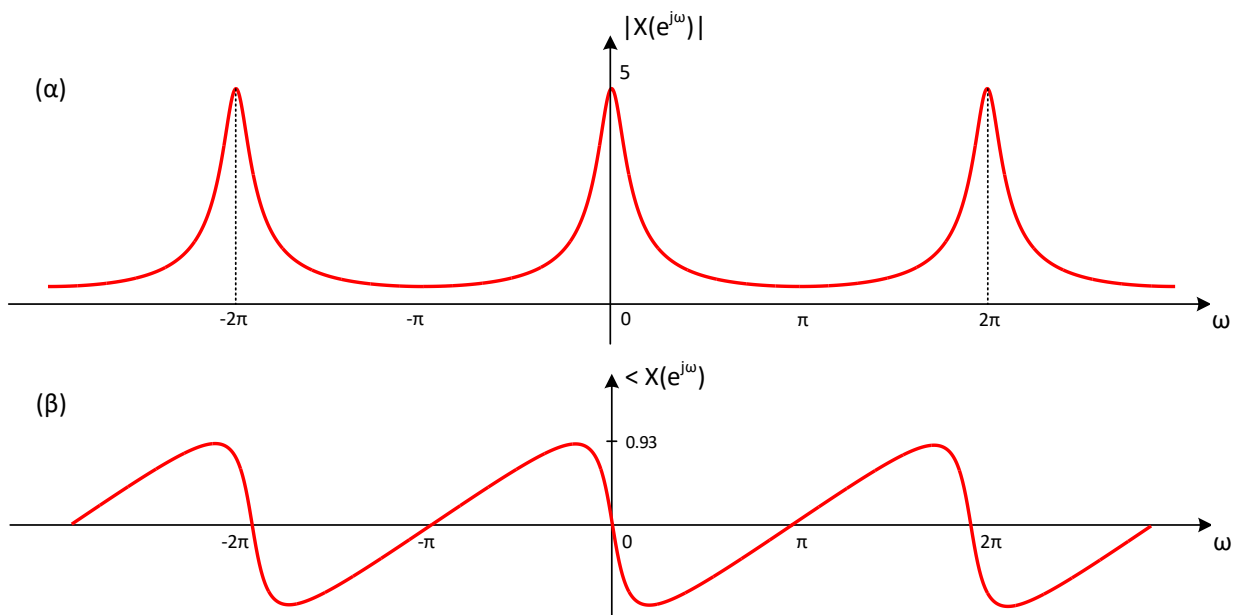
Άρα τελικά,

$$\angle X(e^{j\omega}) = \tan^{-1} \frac{-a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)} = -\tan^{-1} \frac{a \sin(\omega)}{1 - a \cos(\omega)} \quad (13.102)$$

επειδή η συνάρτηση $\tan^{-1}(\cdot)$ είναι περιττή.

Έτσι, το σήμα στο διακριτό χρόνο, το φάσμα πλάτους, και το φάσμα φάσης φαίνεται στο Σχήμα (13.5).

Παρατηρήστε ότι το φάσμα πλάτους είναι άρτιο, ενώ το φάσμα φάσης είναι περιττό, όπως αναμενόταν, αφού



Σχήμα 13.5: Μετασχ. Fourier σήματος $x[n] = a^n u[n]$: (α) Φάσμα πλάτους, (β) Φάσμα φάσης

το $x[n]$ είναι πραγματικό. Επίσης, παρατηρήστε ότι τα φάσματα είναι περιοδικά με περίοδο 2π , όπως επίσης αναμενόταν. Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε αυτό το σήμα ως χαμηλοπερατό φίλτρο, μια και όπως φαίνεται στο φάσμα πλάτους, κρατά τις χαμηλές συχνότητες και εξασθενεί τις υψηλές συχνότητες (γύρω απ' το π).

2. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n] = -a^n u[-n - 1]$, με a πραγματικός αριθμός με $|a| > 1$.

Λύση:

Είναι

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n - 1]e^{-j\omega n} \quad (13.103)$$

Επειδή η $u[-n - 1]$ είναι μη μηδενική για $n \leq -1$, μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα ως:

$$X(e^{j\omega}) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n e^{-j\omega n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{-j\omega})^n \quad (13.104)$$

Εδώ που φτάσαμε, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αμέσως κάποια από τις σχέσεις του Πίνακα (13.1), γιατί τα όρια στο παραπάνω άθροισμα δεν είναι ίδια με κάποια από τις σχέσεις του Πίνακα. Πρέπει να κάνουμε ένα βήμα ακόμα. Κι αυτό δεν είναι άλλο από το να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. Θέτουμε

$$k = -n \implies -k = n$$

και τότε το άθροισμά μας γίνεται:

$$X(e^{j\omega}) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{-j\omega})^n = - \sum_{k=\infty}^1 (a^{-1}e^{j\omega})^k = - \sum_{k=1}^{+\infty} (a^{-1}e^{j\omega})^k = - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}e^{j\omega})^k - 1 \right) \quad (13.105)$$

Πώς κάναμε το παραπάνω; Καταλήξαμε αρχικά σε ένα άθροισμα από $k = 1$ ως $+\infty$ μετά την αλλαγή μεταβλητής. Όμως οι σχέσεις του Πίνακα (13.1) είναι για αθροίσματα από 0 ως αριθμό ή ως $+\infty$. Οπότε πρέπει να αλλάξουμε το κάτω όριο του αθροίσματος από $k = 1$ σε $k = 0$.

Αυτό γίνεται εύκολα αν συμπεριλάβουμε την τιμή του $(a^{-1}e^{j\omega})^k$ για $k = 0$ στο άθροισμα, και ταυτόχρονα να την αφαιρέσουμε, για να είμαστε συνεπείς μαθηματικά. Η τιμή για $k = 0$ είναι προφανώς $(a^{-1}e^{-j\omega})^0 = 1$, κι αυτό το 1 είναι αυτό που αφαιρούμε παραπάνω.

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την κατάλληλη από τις σχέσεις του Πίνακα (13.1). Άρα θα έχουμε:

$$X(e^{j\omega}) = - \sum_{k=0}^{+\infty} (a^{-1}e^{j\omega})^k + 1 = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}e^{j\omega}} \quad (13.106)$$

$$= \frac{1 - a^{-1}e^{j\omega}}{1 - a^{-1}e^{j\omega}} - \frac{1}{1 - a^{-1}e^{j\omega}} = - \frac{a^{-1}e^{j\omega}}{1 - a^{-1}e^{j\omega}} \quad (13.107)$$

για $|a^{-1}e^{j\omega}| < 1 \iff |a| > 1$. Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με $ae^{-j\omega}$ έχουμε

$$X(e^{j\omega}) = - \frac{ae^{-j\omega}a^{-1}e^{j\omega}}{ae^{-j\omega} - a^{-1}e^{j\omega}ae^{-j\omega}} = - \frac{1}{ae^{-j\omega} - 1} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (13.108)$$

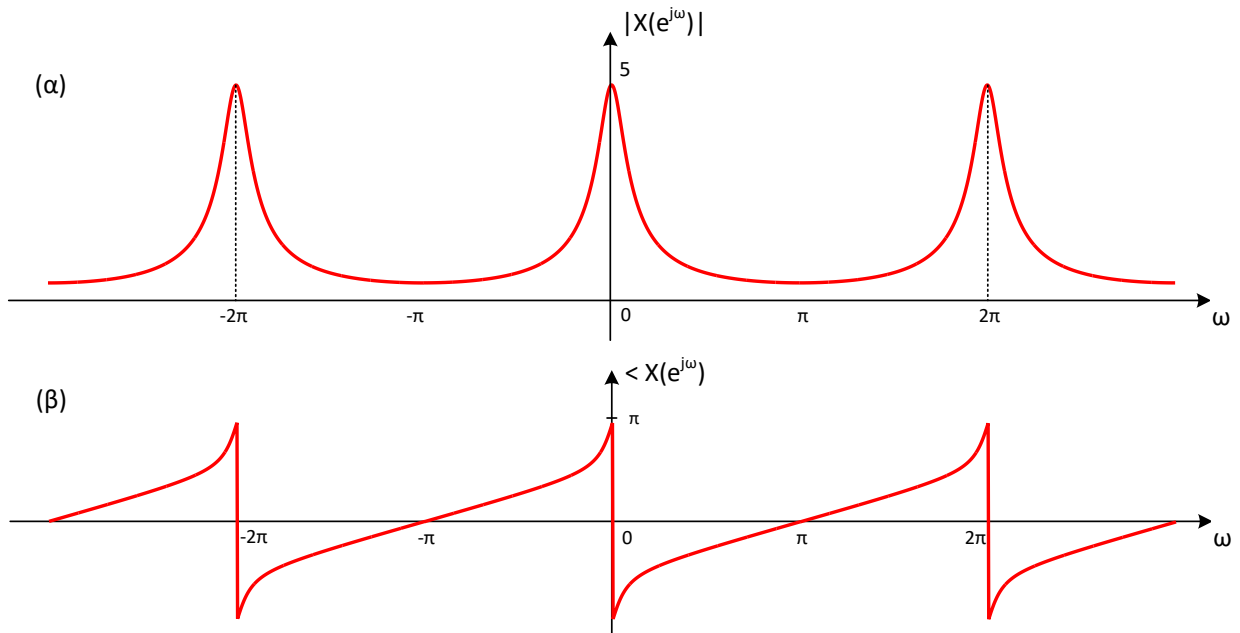
για $|a| > 1$.

Εξασκηθείτε στις πράξεις δείχνοντας ότι το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης για το παραπάνω σήμα δίνονται από τις σχέσεις

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos(\omega) + \alpha^2}} \quad (13.109)$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\tan^{-1} \frac{\alpha \sin(\omega)}{1 - \alpha \cos(\omega)} \quad (13.110)$$

Τα παραπάνω, για $a = 1.2$ φαίνονται στο Σχήμα 13.6. Παρατηρήστε ότι το φάσμα πλάτους είναι το ίδιο με



Σχήμα 13.6: Μετασχ. Fourier σήματος $x[n] = -a^n u[-n-1]$: (α) Φάσμα πλάτους, (β) Φάσμα φάσης

του Σχήματος 13.5, ενώ το φάσμα φάσης αλλάζει. Αυτό σημαίνει ότι για να συνθέσουμε τα σήματα $a^n u[n]$ και $-a^n u[-n-1]$ χρειαζόμαστε ημίτονα όλων των συχνοτήτων στο διάστημα $[-\pi, \pi)$, ίδιου πλάτους (!) αλλά διαφορετικής φάσης.

3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $x[n] = \delta[n]$.

Λύση:

Ας βρούμε και τον DTFT της πολύ σημαντικής συνάρτησης αυτής. Είναι:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} \quad (13.111)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι η συνάρτηση δέλτα $\delta[n]$ ορίζεται μόνο στη θέση $n = 0$ κι έχει πλάτος 1. Παντού αλλού είναι μηδέν. Άρα το παραπάνω άθροισμα θα γίνει:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n]e^{-j\omega n} = 1e^{-j\omega 0} = 1 \quad (13.112)$$

Θυμηθείτε ότι και στο συνεχή χρόνο, είχαμε

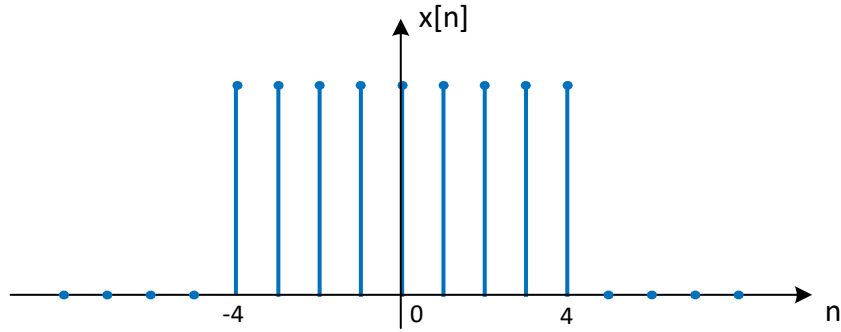
$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (13.113)$$

μόνο που τότε χρησιμοποιήσαμε ιδιότητες της συνάρτησης Δέλτα συνεχούς χρόνου, ενώ εδώ τα πράγματα ήταν πιο απλά. Άρα ο DTFT της συνάρτησης δέλτα $\delta[n]$ είναι απλά η μονάδα. Αυτό τι σημαίνει; Ότι ένα σήμα που αποτελείται μόνο από μια συνάρτηση δέλτα στη θέση $n = 0$ έχει μετασχηματισμό Fourier μονάδα, δηλ. ΟΛΕΣ οι συχνότητες ω έχουν πλάτος 1. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η συνάρτηση Δέλτα είναι ένα σήμα που περιέχει όλες τις συχνότητες με ίση “δύναμη”, αφού όλες έχουν μοναδιαίο πλάτος.

Εναλλακτικά, μπορείτε να διαβάσετε αυτό το αποτέλεσμα ως εξής: για να συνθέσουμε το σήμα $x[n] = \delta[n]$ στο χρόνο, χρειαζόμαστε ΟΛΕΣ τις (άπειρες το πλήθος) συχνότητες ω με το ίδιο “βάρος” η καθεμία, τη μονάδα! Ενδιαφέρον!⁶ :-)

4. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος που φαίνεται στο Σχήμα (13.7), το οποίο είναι ο τετραγωνικός παλμός διάρκειας $M = 9$ δειγμάτων.

⁶Το ίδιο φυσικά συνέβαινε και στο συνεχή χρόνο...



Σχήμα 13.7: Τετραγωνικός παλμός διάρκειας 9 δειγμάτων.

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι ο παλμός είναι διάρκειας M δειγμάτων, για περισσότερη γενικότητα. Είναι

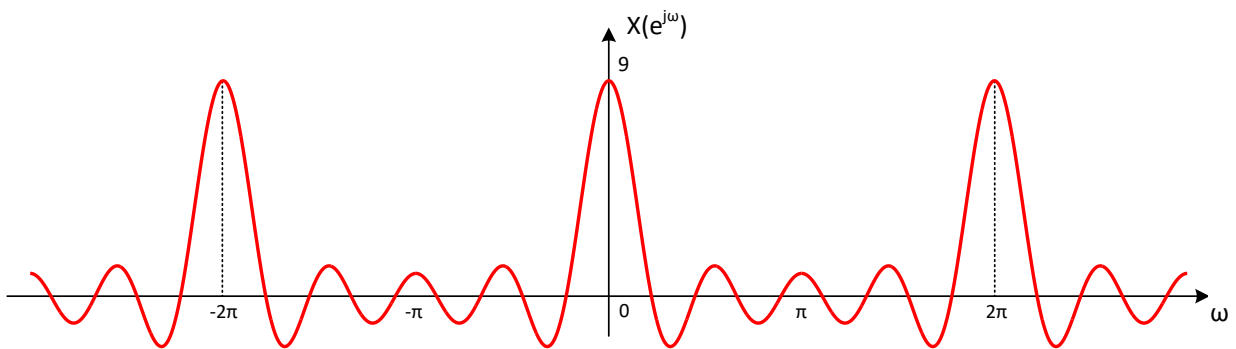
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\frac{M-1}{2}}^{\frac{M-1}{2}} 1e^{j\omega n} \quad (13.114)$$

$$= \frac{e^{-j\frac{M+1}{2}\omega} - e^{-j\frac{M-1}{2}\omega}}{e^{-j\omega} - 1} \quad (13.115)$$

$$= \frac{e^{-j\omega/2}(e^{-jM\omega/2} - e^{jM\omega/2})}{e^{-j\omega/2}(e^{-j\omega/2} - e^{j\omega/2})} \quad (13.116)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{M\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (13.117)$$

Το φάσμα του σήματος φαίνεται στο Σχήμα (13.8). Προσέξτε, εδώ φαίνεται το φάσμα του σήματος (ο ίδιος



Σχήμα 13.8: Φάσμα τετραγωνικού παλμού διάρκειας 9 δειγμάτων.

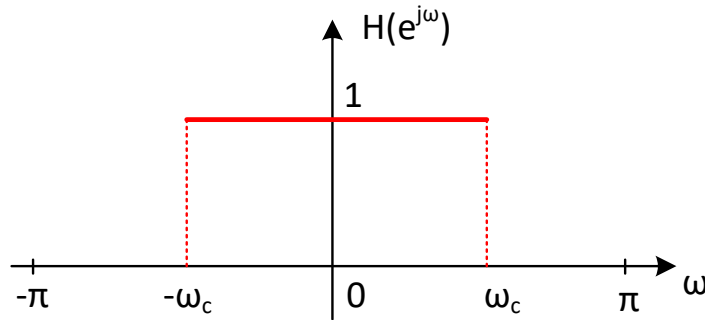
ο μετασχ. Fourier δηλαδή), που είναι πραγματικό για κάθε ω . Το σήμα αυτό είναι το σήμα κυλιόμενης μέσης τιμής (moving average) που έχουμε ήδη δει, μόνο που εδώ είναι στη μη-αιτιατή μορφή του. Το μέτρο της φασματικής απόκρισης είναι

$$|X(e^{j\omega})| = \left| \frac{\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right| \quad (13.118)$$

Βρείτε εσείς τα σημεία μηδενισμού αριθμητή και παρονομαστή, και υπολογίστε το φάσμα φάσης!⁷ ©

5. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου, που φαίνεται στο Σχήμα 13.9.

⁷Θα πρέπει να βρείτε ότι η φάση είναι 0 ή $\pm\pi$.



Σχήμα 13.9: Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.

Λύση:

Μας ζητείται ο αντίστροφος μετασχ. Fourier του ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου, δηλ. το σήμα στο χρόνο από το οποίο προέρχεται αυτό το φίλτρο. Εφαρμόζοντας τον ορισμό, θα έχουμε

$$h_{lp}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{lp}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \cdot e^{j\omega n} d\omega \quad (13.119)$$

$$= \frac{1}{2\pi} (e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}) \frac{1}{jn} = \frac{1}{2j\pi n} 2j \sin(\omega_c n) \quad (13.120)$$

$$= \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} \quad (13.121)$$

Παρατηρούμε ότι η κρουστική απόκριση ενός τέτοιου φίλτρου είναι άπειρης διάρκειας, άρα μη πραγματοποιήσιμη! Ακόμα κι αν ήταν όμως πραγματοποιήσιμη, παρατηρήστε ότι δεν είναι αιτιατή (έχει τιμές για $n < 0$)! Η μη-αιτιατότητα βέβαια μπορεί να αρθεί εύκολα με μια μετατόπιση, αλλά η άπειρη διάρκεια παραμένει ό,τι και να κάνουμε. Με άλλα λόγια, το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο είναι μη πραγματοποιήσιμο!⁸ Ο λόγος για αυτή τη μη πραγματοποιησιμότητα του φίλτρου είναι οι ασυνέχειες του φίλτρου στις συχνότητες $\omega = \pm\omega_c$. Αυτό που μπορούμε να κάνουμε στην πράξη είναι να φτιάξουμε μερικά δείγματα της κρουστικής απόκρισης του h_{lp} . Αυτά τα δείγματα όμως, όταν τα μετασχηματίσουμε κατά Fourier, δε θα μας δώσουν το ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο αλλά μια προσέγγισή του. Το πόσο καλή θα είναι αυτή η προσέγγιση, εξαρτάται από τόποσα δείγματα της κρουστικής απόκρισης θα δημιουργήσουμε. Δείτε το Σχήμα (13.10), όπου δημιουργούμε $2M + 1$ δείγματα της κρουστικής απόκρισης για διάφορες τιμές του M . Παρατηρήστε ότι όσο αυξάνουμε το M , τόσο πιο κοντά πλησιάζουμε στο ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.

6. Βρείτε τον μετασχ. Fourier του σήματος $x[n] = 1, \forall n$.

Λύση:

Το παραπάνω σήμα είναι εμφανώς μη απολύτως αθροίσιμο, όπως και μη αθροίσιμο με την μέση τετραγωνική έννοια. Οπότε ο ορισμός αποτυγχάνει. Θα δείξουμε όμως ότι ο μετασχ. Fourier αυτού του σήματος είναι

$$x[n] = 1 \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi r) \quad (13.122)$$

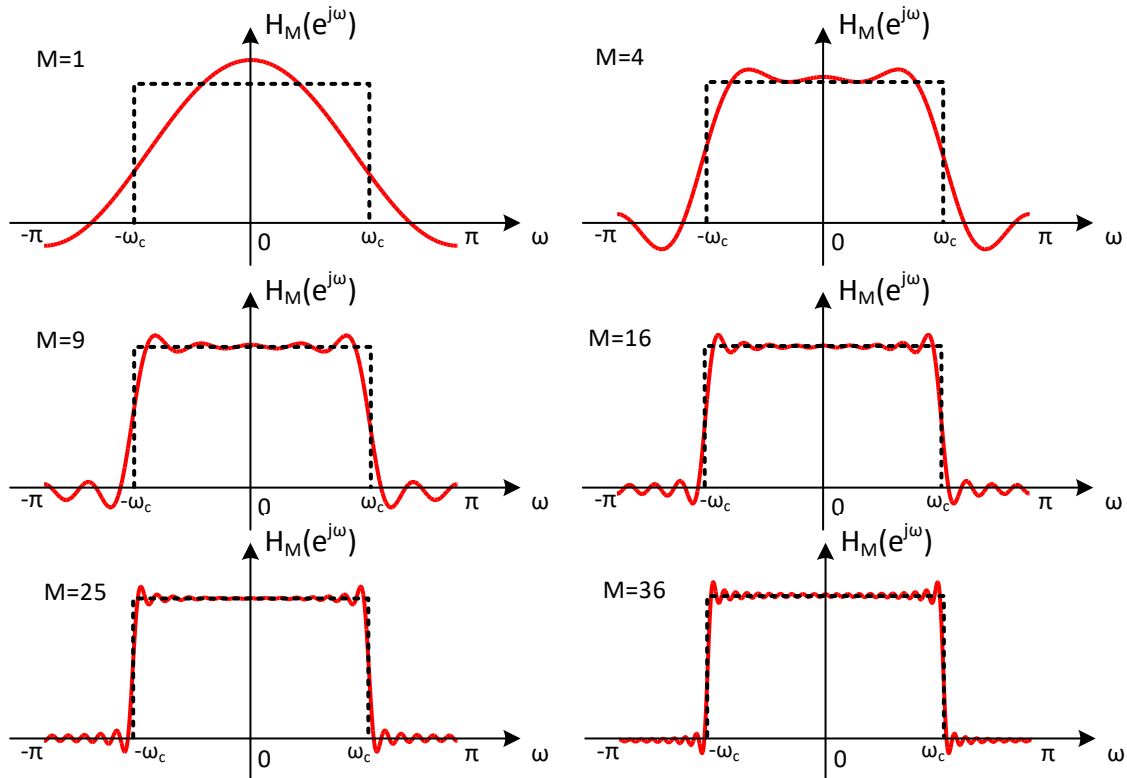
Ας εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier. Δεδομένου ότι αυτός ορίζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, το παραπάνω άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ανάγεται σε μόνο μια συνάρτηση Δέλτα, την $\delta(\omega)$, αφού μόνο αυτή ανήκει στο παραπάνω διάστημα. Τότε θα είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega n} \Big|_{\omega=0} = 1 \quad (13.123)$$

για κάθε n , λόγω της ιδιότητας της συνάρτησης Δέλτα μιας συνεχούς μεταβλητής

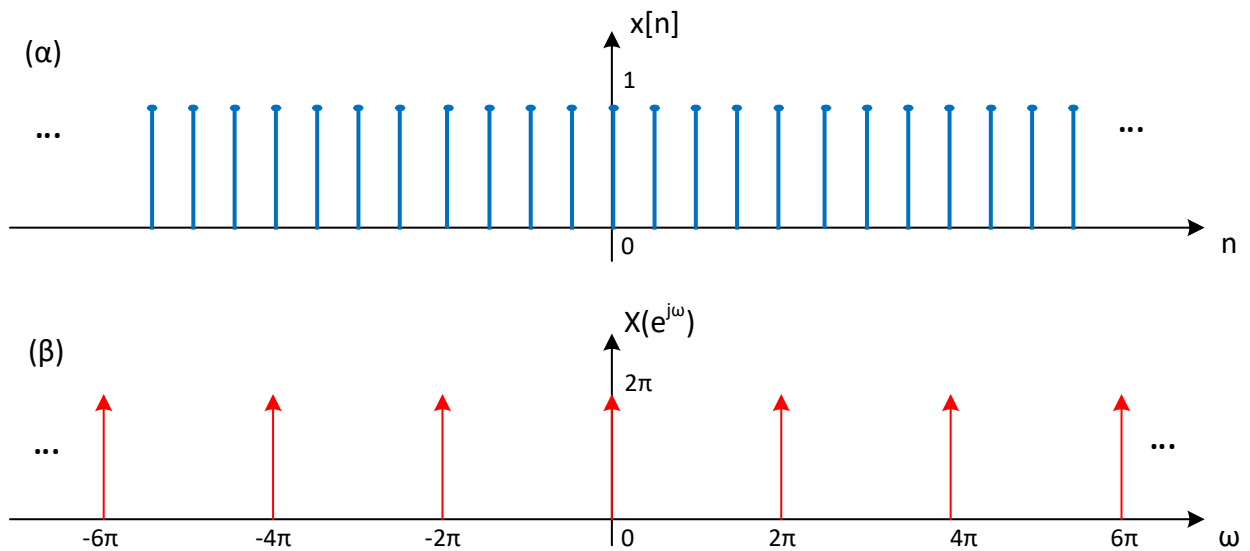
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) f(\omega) d\omega = f(0) \quad (13.124)$$

⁸Γι' αυτό λέγεται και ιδανικό ☹...



Σχήμα 13.10: Προσεγγίσεις ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου για διάφορες τιμές του M .

Το σήμα $x[n] = 1$ και ο μετασχ. Fourier του φαίνονται στο Σχήμα 13.11. Από το αποτέλεσμα αυτό



Σχήμα 13.11: (α) σήμα $x[n] = 1, \forall n$ και (β) ο μετασχ. Fourier του.

συμπεραίνουμε ότι για να συνθέσει κανείς ένα σήμα που δεν αλλάζει ποτέ στο πεδίο του χρόνου, όπως το $x[n] = 1, \forall n$, τότε χρειάζεται μόνο *μια* συχνότητα, τη μηδενική - μην ξεχνάτε ότι για τη σύνθεση του σήματος χρειαζόμαστε μια περίοδο διάρκειας 2π στη συχνότητα, η οποία συνήθως είναι το διάστημα $[-\pi, \pi)$ - με πλάτος 2π και μηδενική φάση. Διαισθητικά, είναι λογικό, αφού δεν υπάρχει καμιά μεταβολή του σήματος στο χρόνο ώστε να υπάρξουν και άλλες συχνότητες.

7. Βρείτε τον μετασχ. Fourier του σήματος $x[n] = e^{j\omega_0 n}, \forall n$, με $\omega \in (-\pi, \pi)$.

Λύση:

Το παραπάνω σήμα είναι μη απολύτως αθροίσιμο, όπως και μη αθροίσιμο με την μέση τετραγωνική έννοια. Οπότε ο ορισμός αποτυγχάνει ξανά. Θα δείξουμε όμως ότι ο μετασχ. Fourier αυτού του σήματος είναι

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r), \quad r \in \mathbb{Z} \quad (13.125)$$

Ας εφαρμόσουμε τον αντίστροφο μετασχ. Fourier. Δεδομένου ότι αυτός ορίζεται στο διάστημα $(-\pi, \pi]$, το παραπάνω άθροισμα συναρτήσεων Δέλτα ανάγεται σε μόνο μια συνάρτηση Δέλτα, την $\delta(\omega - \omega_0)$, αφού μόνο αυτή ανήκει στο παραπάνω διάστημα. Τότε θα είναι

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n} \quad (13.126)$$

για κάθε n , λόγω της ιδιότητας της συνάρτησης Δέλτα μιας συνεχούς μεταβλητής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) f(\omega) d\omega = f(\omega_0) \quad (13.127)$$

Από το αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε ότι για να συνθέσει κανείς ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα συχνότητας ω_0 στο πεδίο του χρόνου, τότε χρειάζεται μόνο μια συχνότητα, την ω_0 , με πλάτος 2π και μηδενική φάση. Το σήμα στο χρόνο μεταβάλλεται με συγκεκριμένη συχνότητα, οπότε είναι λογικό να μη χρειάζονται άλλες συχνότητες για τη σύνθεσή του. Το παραπάνω σήμα όμως ήταν μιγαδικό, ας δούμε τι συμβαίνει στην περίπτωση ενός πραγματικού σήματος συγκεκριμένης συχνότητας.

8. Βρείτε τον μετασχ. Fourier του σήματος $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$, $\forall n$, με $\omega \in (-\pi, \pi]$.

Λύση:

Δουλεύοντας με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, έχουμε

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \quad (13.128)$$

Οπότε

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (13.129)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} \right) e^{-j\omega n} \quad (13.130)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\omega n} \quad (13.131)$$

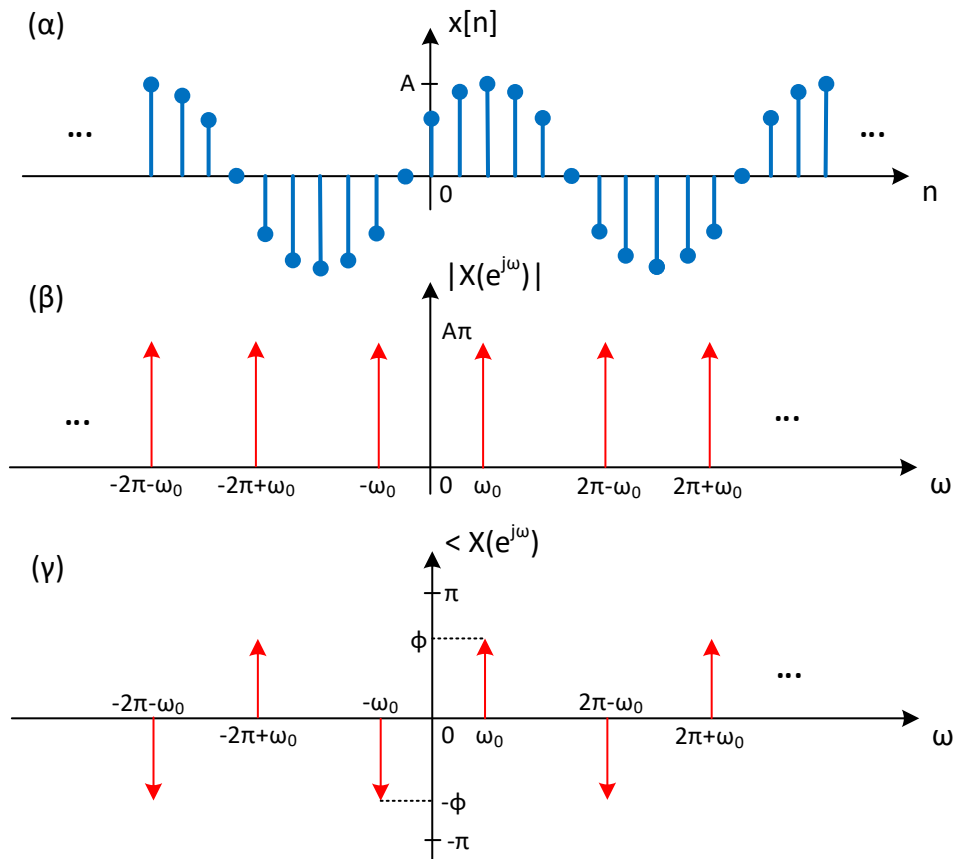
$$= \frac{A}{2} e^{j\phi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} e^{-j\omega n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 n} e^{-j\omega n} \quad (13.132)$$

Οι παραπάνω δυο όροι του αθροίσματος είναι οι μετασχ. Fourier των $e^{j\omega_0 n}$ και $e^{-j\omega_0 n}$, τους οποίους βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Άρα

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} A\pi \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) \quad (13.133)$$

$$= A\pi \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \left(e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r) + \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi r) \right) \quad (13.134)$$

Το σήμα $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$ και ο μετασχ. Fourier του φαίνονται στο Σχήμα 13.12. Από το αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε ότι για να συνθέσει κανείς ένα πραγματικό σήμα συχνότητας ω_0 στο πεδίο του χρόνου, τότε χρειάζεται μόνο δυο συχνότητες, την ω_0 και την $-\omega_0$ - αν θεωρήσουμε ως “παράθυρό” μας στη συχνότητα το διάστημα $[-\pi, \pi]$ - οι οποίες αντιστοιχούν στα δυο συζυγή μιγαδικά εκθετικά που αποτελούν ένα συνημίτονο. Τα πλάτη τους ισούνται με $A\pi$ και η φάση τους είναι $\pm\phi$.



Σχήμα 13.12: (α) σήμα $x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi)$ και (β) ο μετασχ. Fourier του.

Μπορείτε εσείς να βρείτε το μετασχ. Fourier του σήματος $x[n] = A \sin(\omega_0 n)$;

9. Βρείτε τον μετασχ. Fourier του σήματος $x[n] = u[n]$.

Λύση:

Αν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τον ορισμό, θα έχουμε

$$U(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-j\omega n} \quad (13.135)$$

Αυτό το άθροισμα δεν συγκλίνει, αφού $|e^{j\omega n}| = 1$, και όχι μικρότερο αυτής. Χρειαζόμαστε έναν εναλλακτικό τρόπο. Παρατηρήστε ότι η βηματική συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως

$$u[n] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}[n] + \frac{1}{2} = u_1[n] + u_2[n] \quad (13.136)$$

με

$$\operatorname{sgn}[n] = \begin{cases} 1/2, & n \geq 0 \\ -1/2, & n < 0 \end{cases} \quad (13.137)$$

Γνωρίζουμε από προηγούμενο παράδειγμα ότι

$$u_2[n] = \frac{1}{2} \longleftrightarrow U_2(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi r) \quad (13.138)$$

Αρκεί να βρούμε το μετασχ. Fourier του σήματος $u_1[n] = \frac{1}{2} \text{sgn}[n]$. Έστω $U_1(e^{j\omega}) = F\{u_1[n]\}$. Παρατηρήστε ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\delta[n] = u_1[n] - u_1[n-1] \quad (13.139)$$

Παίρνοντας το μετασχ. Fourier και στα δυο μέλη, έχουμε

$$F\{\delta[n]\} = F\{u_1[n] - u_1[n-1]\} \quad (13.140)$$

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u_1[n] - u_1[n-1])e^{-j\omega n} \quad (13.141)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_1[n]e^{-j\omega n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_1[n-1]e^{-j\omega n} \quad (13.142)$$

$$= U_1(e^{j\omega}) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_1[k]e^{-j\omega(k+1)} \quad (13.143)$$

$$= U_1(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_1[k]e^{-j\omega k} \quad (13.144)$$

$$= U_1(e^{j\omega}) - e^{-j\omega} U_1(e^{j\omega}) \quad (13.145)$$

$$U_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} \quad (13.146)$$

Άρα τελικά, από τις Σχέσεις (13.146,13.138) έχουμε:

$$u[n] \longleftrightarrow U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega + 2\pi r) \quad (13.147)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε έμμεσα δυο σημαντικές ιδιότητες, αυτή της γραμμικότητας και αυτή της χρονικής μετατόπισης, τις οποίες θα αποδείξουμε ρητά στη συνέχεια.

13.6 Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου

Αποδεικνύονται κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες σχετικά με τον DTFT, οι οποίες φαίνονται στον Πίνακα 13.2.

13.7 Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

Στον Πίνακα (13.3), θα βρείτε μερικά χρήσιμα ζευγάρια μετασχ. Fourier που χρησιμοποιούνται συχνά. Τα παρακάτω ορίζονται για $\omega \in \mathfrak{R}$. Για μετασχηματισμούς σε μια περίοδο, δηλ. στο $(-\pi, \pi]$, θέτουμε $k = 0$ στους παρακάτω τύπους όπου χρειάζεται.

13.8 Συμμετρίες Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου

Κάποιες γνωστές και χρήσιμες στην απλούστευση πορβλημάτων σχέσεις συμμετρίας μεταξύ σημάτων και των μετασχηματισμών Fourier τους παρατίθενται στον Πίνακα 13.4. Οι περισσότερες αποδεικνύονται εύκολα με χρήση του ορισμού του μετασχηματισμού.

13.9 ΓΧΑ Συστήματα στο Χώρο του Μετασχ. Fourier

Ας μελετήσουμε τώρα την τροπή που παίρνουν τα πράγματα όταν εξετάζουμε ένα ΓΧΑ σύστημα από τη σκοπιά της συχνότητας. Είδαμε νωρίτερα ότι στα συστήματα, παίζει μεγάλο ρόλο η έννοια της απόκρισης σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$, η οποία υπενθυμίζουμε ότι ορίζεται ως

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} \quad (13.148)$$

Χρήσιμες Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Σήμα	Μετασχ. Fourier
$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$, ή $X^*(e^{j\omega})$ αν $x[n]$ είναι πραγματικό.
$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] ^2$ - Θεώρημα Parseval	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n]$ - Θεώρημα Parseval γενική μορφή	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$

Πίνακας 13.2: Χρήσιμες Ιδιότητες Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου.

και αποτέλεσε το “συντελεστή” μεταβολής του μιγαδικού πλάτους του σήματος εισόδου $x[n] = e^{j\omega n}$ όταν αυτό περνά μέσα από ένα ΓΧΑ σύστημα και εμφανίζεται στην έξοδο, δηλ.

$$y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n} \quad (13.149)$$

Επίσης, μεγάλη σημασία στα ΓΧΑ συστήματα έχει η έννοια της κρουστικής απόκρισης $h[n]$, η οποία περιγράφει το σύστημα από τη σκοπιά του χρόνου. Αν προσπαθήσουμε να βρούμε το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης, θα έχουμε

$$F\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n} \quad (13.150)$$

Μα η παραπάνω σχέση δεν είναι άλλη από την απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$. Άρα τελικά, **η απόκριση σε συχνότητα αποτελεί το μετασχ. Fourier της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος!**

Επίσης, για οποιαδήποτε σήματα, η σχέση που συνδέει την είσοδο, $x[n]$, με την έξοδο, $y[n]$, ενός ΓΧΑ συστήματος, $h[n]$, εκφράζεται μέσω της πράξης της συνέλιξης:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \quad (13.151)$$

Όμως ένα από τα σημαντικότερα πορίσματα της Ανάλυσης Fourier είναι ότι η συνέλιξη στο χρόνο γίνεται πολλαπλασιασμός στη συχνότητα, και το αντίστροφο (Πίνακας 13.2). Άρα η ίδια Σχέση (13.151) που περιγράφει το σύστημα μπορεί να γραφεί και ως:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (13.152)$$

Σε αυτό το σημείο, αν αναλύσουμε σε μορφή πολική μορφή την παραπάνω σχέση, βλέπουμε ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (13.153)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}|H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (13.154)$$

Χρήσιμα ζεύγη μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Ακολουθία	Μετασχ. Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$-a^n u[-n - 1], a > 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$(n + 1)a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$a^{ n }, a < 1,$	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos(\omega) + a^2}$
$\frac{r^n \sin(\omega_c(n + 1))}{\sin(\omega_c)} u[n], r < 1$	$\frac{1}{1 - 2r \cos(\omega_c)e^{-j\omega} + r^2 e^{-j2\omega}}$
$\frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega_c(M + 1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
$e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$
$\sin(\omega_0 n + \phi)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} -j[\pi e^{j\phi} \delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) - \pi e^{-j\phi} \delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

Πίνακας 13.3: Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου.

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}))} \tag{13.155}$$

και άρα

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})| \tag{13.156}$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}) \tag{13.157}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το $|H(e^{j\omega})|$ λέγεται *απόκριση πλάτους* (magnitude response) ή *κέρδος* του συστήματος, και το $\angle H(e^{j\omega})$ λέγεται *απόκριση φάσης* (phase response) του συστήματος.

Συμμετρίες Μετασχηματισμού Fourier Διακριτού Χρόνου	
Σήμα	Μετασχ. Fourier Diakrito'u Qr'onou
$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
$\Re\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$, συζυγές συμμετρικό μέρος του DTFT
$j\Im\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$, συζυγές αντισυμμετρικό μέρος του DTFT
$x_e[n]$, συζυγές συμμετρικό μέρος του σήματος	$X_R(e^{j\omega}) = \Re\{X(e^{j\omega})\}$
$x_o[n]$, συζυγές αντισυμμετρικό μέρος του σήματος	$jX_I(e^{j\omega}) = j\Im\{X(e^{j\omega})\}$
Τα παρακάτω ισχύουν μόνο για πραγματικά σήματα $x[n]$	
$x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
$x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$
$x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$
$x[n]$	$ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) $
$x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
$x_e[n]$, άρτιο μέρος	$X_R(e^{j\omega})$
$x_o[n]$, περιττό μέρος	$jX_I(e^{j\omega})$

Πίνακας 13.4: Συμμετρίες Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου.

Προσέξτε ότι η απόκριση πλάτους της εξόδου αποτελείται από το γινόμενο των αποκρίσεων πλάτους της εισόδου και του συστήματος, ενώ η απόκριση φάσης της εξόδου αποτελείται από το άθροισμα των αποκρίσεων φάσης της εισόδου και του συστήματος.

Αυτές οι σχέσεις επιδρούν στην είσοδο του συστήματος και τη μεταβάλλουν, είτε με επιθυμητό τρόπο είτε με ανεπιθύμητο τρόπο. Όσον αφορά το τελευταίο, τότε οι αντίστοιχες σχέσεις αποκαλούνται διαταραχές πλάτους και φάσης, αντίστοιχα.

Ένα σύστημα $h[n]$ με απόκριση σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$ μπορεί να υπολογιστεί πιο εύκολα – συνήθως :-) – στο χώρο των συχνοτήτων απ' ότι στο χώρο του χρόνου. Πώς; Προφανώς από τη σχέση

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (13.158)$$

Βλέπετε ότι, εν γένει, η απόκριση σε συχνότητα είναι μια ρητή συνάρτηση της συχνότητας ω . Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} \quad (13.159)$$

όπου $N(e^{j\omega})$, $D(e^{j\omega})$ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, αντίστοιχα, της απόκρισης σε συχνότητα $H(e^{j\omega})$, με όποιες απλοποιήσεις μπορεί να γίνουν στο κλάσμα. Αποδεικνύεται ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μικρότερα κλάσματα μέσα από τη γνωστή σας διαδικασία της “Αναπτυξης σε Μερικά Κλάσματα”. Εν συντομία, το Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα μας πληροφορεί ότι μια τέτοια ρητή συνάρτηση, εν γένει, μπορεί να γραφεί ως

$$H(e^{j\omega}) = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{1 - a_k e^{-j\omega}} + \sum_{l=1}^L \frac{B_l}{1 - b_l e^{-j\omega}} \quad (13.160)$$

με $|a_k| < 1$ και $|b_l| > 1$, στην απλή περίπτωση που οι ρίζες του παρονομαστή $D(e^{j\omega})$ είναι απλές. Σύμφωνα με τον πίνακα με τα ζεύγη Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου (Πίνακας 13.3), μπορούμε, έχοντας την Ανάλυση σε Μερικά Κλάσματα, να βρούμε την $h[n]$, ως

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^M \frac{A_k}{1 - a_k e^{-j\omega}} + \sum_{l=1}^L \frac{B_l}{1 - b_l e^{-j\omega}} \longleftrightarrow h[n] = \sum_{k=1}^M A_k (a_k)^n u[n] - \sum_{l=1}^L B_l (b_l)^n u[-n - 1] \quad (13.161)$$

αφού $|a_k| < 1$ και $|b_l| > 1$. Φυσικά η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί και το $x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$, αφού και το $X(e^{j\omega})$ εκφράζεται ως ρητή συνάρτηση:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} \quad (13.162)$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1:

Έστω το σύστημα

$$h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (13.163)$$

Στην είσοδό του παρουσιάζεται το σήμα

$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (13.164)$$

Βρείτε την έξοδο του συστήματος $y[n]$.

Λύση:

Αυτό που θα μπορούσαμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη συνέλιξη της εισόδου με το σύστημα, με τον κλασικό τρόπο του αθροίσματος. Όμως, αν μεταφερθούμε στο πεδίο της συχνότητας, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα (;), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} y[n] = x[n] * h[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \left(\frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \\ &= \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \\ &= \frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{C}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{D}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} \longleftrightarrow \\ y[n] &= A\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (B + D)\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + C\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \end{aligned} \quad (13.165)$$

με

$$A = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = 6 \quad (13.166)$$

$$B = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=3} = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=3} = -4 \quad (13.167)$$

$$C = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=4} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{j\omega}=4} = -3 \quad (13.168)$$

$$D = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{-j\omega}=3} = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \Big|_{e^{j\omega}=3} = 4 \quad (13.169)$$

(13.170)

και άρα

$$y[n] = 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (13.171)$$

Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την είσοδο $x[n]$, αν μας δίνεται το σύστημα και η έξοδος του. Δείτε:

Παράδειγμα 2:

Έστω ένα σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + 3e^{-j\omega}} \quad (13.172)$$

Στην είσοδό του, βρίσκεται ένα σήμα $x[n]$, το οποίο δίνει έξοδο

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n - 1] \quad (13.173)$$

Βρείτε την είσοδο, $x[n]$.

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$y[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1 - \frac{3}{2}e^{j\omega}} \quad (13.174)$$

Προφανώς ισχύει

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \iff X(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{1 - \frac{3}{2}e^{j\omega}}}{\frac{1}{1 + 3e^{-j\omega}}} \quad (13.175)$$

$$= \frac{\frac{-e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)}}{\frac{1}{1 + 3e^{-j\omega}}} \quad (13.176)$$

$$= \frac{-(1 + 3e^{-j\omega})e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)} \quad (13.177)$$

$$= \left(\frac{A}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}}\right)e^{-j\omega} \quad (13.178)$$

με

$$A = \frac{-1 - 3e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{-1 - 3e^{-j\omega}}{1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=2} = \frac{7}{2} \quad (13.179)$$

$$B = \frac{-1 - 3e^{-j\omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{3}{2}e^{-j\omega}\right)} \Big|_{e^{-j\omega}=2/3} = \frac{-1 - 3e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \Big|_{e^{-j\omega}=2/3} = -\frac{9}{2} \quad (13.180)$$

και άρα, συμβουλευόμενοι τον Πίνακα (:::), τελικά η είσοδος θα είναι

$$x[n] = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u[-(n-1) - 1] = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u[-n] \quad (13.181)$$

Μερικές παρατηρήσεις...

1. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε το σύστημα $h[n]$ αν μας δίνεται η είσοδος και η έξοδος, $x[n]$, $y[n]$, αντίστοιχα. Κάντε το σε όλα τα παραδείγματα! :-)

2. Φυσικά για τον υπολογισμό της εξόδου ενός συστήματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το άθροισμα της συνέλιξης, αν σας βολεύει. Το πώς θα καταλαβαίνετε ποιός τρόπος είναι πιο εύκολος ή σύντομος, απαιτεί εμπειρία και τριβή σε ασκήσεις. Πολλές φορές μάλιστα δεν είναι εμφανές με το μάτι κάτι τέτοιο, και αναγκαστικά δουλεύετε όπως νομίζετε εσείς, μέχρι να επιβεβαιωθείτε ή να διαφευστείτε. :-)
3. Η ανάλυση σε μερικά κλάσματα εφαρμόζεται MONON όταν η τάξη του πολυωνύμου του αριθμητή είναι γνήσια μικρότερη από αυτή του παρονομαστή, ειδάλλως πρέπει να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων. Στο Παράδειγμα 1, αυτό ήταν αληθές, αλλά όχι και στο Παράδειγμα 2. Είδατε όμως πως αποφύγαμε να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων, θεωρώντας τον όρο $e^{-j\omega}$ του αριθμητή ως καθυστέρηση.

Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})$ είναι της μορφής

$$x[n] = Aa^n u[n], \quad |a| < 1 \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = A \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}},$$

τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $y[n]$.

Αν η είσοδος περιέχει την αντίστροφη βηματική, τότε

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})$ είναι της μορφής

$$x[n] = -Aa^n u[-n - 1], \quad |a| > 1 \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = A \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}},$$

τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $y[n]$.

Προφανώς τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν για άθροισμα τέτοιων σημάτων ως:

Αν η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος $h[n] \longleftrightarrow H(e^{j\omega})$ είναι της μορφής

$$x[n] = \sum_{k=1}^N A_k (a_k)^n u[n] - \sum_{l=1}^M B_l (b_l)^n u[-n - 1] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N A_k \frac{1}{1 - a_k e^{-j\omega}} + \sum_{l=1}^M B_l \frac{1}{1 - b_l e^{-j\omega}},$$

με $|a_k| < 1$ και $|b_l| > 1$, τότε η έξοδος μπορεί εύκολα να υπολογιστεί στο χώρο της συχνότητας, ως

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}),$$

και κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, να βρεθεί τελικά η έξοδος $y[n]$.

Τέλος, πολλά συστήματα εκφράζονται ως ένα απλό άθροισμα Διακριτών Συναρτήσεων Δέλτα⁹, όπως για παράδειγμα το

$$h[n] = 2\delta[n] - \delta[n - 1] \quad (13.182)$$

Αυτή η περίπτωση είναι η πιο εύκολη, καθώς μπορούμε να δουλέψουμε στο πεδίο του χρόνου, αντί αυτό της συχνότητας¹⁰, εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της Συνάρτησης Δέλτα που λέει ότι

$$x[n] * \delta[n \pm n_0] = x[n \pm n_0] \quad (13.183)$$

Τι είπαμε ότι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι όταν κάνουμε συνέλιξη ενός σήματος με μια Συνάρτηση Δέλτα η οποία βρίσκεται στη χρονική στιγμή $n = \pm n_0$, τότε το αποτέλεσμα είναι απλά το ίδιο το σήμα $x[n]$ μετατοπισμένο στη θέση $n = \pm n_0$!

⁹Τα οποία λέγονται Finite Impulse Response - FIR, όπως έχουμε πει.

¹⁰Χωρίς να σημαίνει ότι αν πάτε στο χώρο της συχνότητας δε θα βγάλετε αποτέλεσμα :-)

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα $h[n] = 2\delta[n] - \delta[n - 1]$. Στην είσοδό του εμφανίζεται το σήμα

$$x[n] = -2\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n - 1]$$

Βρείτε την έξοδο.

Λύση:

Ας δούμε και τις δυο λύσεις (χρόνος και συχνότητα).

- Θα έχουμε

$$y[n] = x[n] * h[n] = -2\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n - 1] * (2\delta[n] - \delta[n - 1]) \quad (13.184)$$

$$= -2\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n - 1] * 2\delta[n] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n - 1] * \delta[n - 1] \quad (13.185)$$

$$= -4\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n - 1] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} u[-(n - 1) - 1] \quad (13.186)$$

$$= -4\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n - 1] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} u[-n] \quad (13.187)$$

- Μέσω συχνότητας, η συνέλιξη γίνεται γινόμενο, και μέσω μετασχ. Fourier και ιδιοτήτων, θα είναι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{5}{4}e^{-j\omega}}(2 - e^{-j\omega}) \quad (13.188)$$

$$= \frac{4}{1 - \frac{5}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{5}{4}e^{-j\omega}}e^{-j\omega} \longleftrightarrow \quad (13.189)$$

$$y[n] = -4\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n - 1] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} u[-(n - 1) - 1] \quad (13.190)$$

$$= -4\left(\frac{5}{4}\right)^n u[-n - 1] + 2\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} u[-n] \quad (13.191)$$

13.9.1 Μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου και Εξισώσεις Διαφορών

Για να δούμε και μερικά παραδείγματα με εξισώσεις διαφορών, για να κλείσουμε τη συζήτηση γύρω από το μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου, και να δούμε πόσο πιο εύκολη γίνεται η δουλειά όταν περνάμε στο χώρο της συχνότητας.

Στη γενικότερη των περιπτώσεων, έχουμε μια εξίσωση διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n - k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n - l] \quad (13.192)$$

Θεωρώντας ότι ο μετασχ. Fourier υπάρχει της εισόδου και της εξόδου, μπορούμε να τον βρούμε και στα δυο μέλη της εξίσωσης, και να λάβουμε

$$\sum_{k=0}^N a_k Y(e^{j\omega})e^{-j\omega k} = \sum_{l=0}^M b_l X(e^{j\omega})e^{-j\omega l} \quad (13.193)$$

το οποίο μεταφράζεται ως

$$Y(e^{j\omega}) \sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} = X(e^{j\omega}) \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l} \quad (13.194)$$

Διαιρώντας κατά μέλη με $X(e^{j\omega})$ έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k} = \sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l} \quad (13.195)$$

ή αλλιώς

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (13.196)$$

Όμως είδαμε νωρίτερα ότι από το θεώρημα της συνέλιξης, το πρώτο μέλος μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{l=0}^M b_l e^{-j\omega l}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega k}} \quad (13.197)$$

και δείξαμε - και με παραδείγματα - νωρίτερα πώς μπορούμε από την απόκριση σε συχνότητα να βρούμε την κρουστική απόκριση $h[n]$.

Σε όλη την παραπάνω συζήτηση, υποθέσαμε ότι τα $Y(e^{j\omega})$, $X(e^{j\omega})$, $H(e^{j\omega})$ υπάρχουν, δηλ. ορίζονται οι μετασχ. Fourier τους. Σύμφωνα με το κριτήριο ύπαρξης του μετασχ. Fourier, για να μπορούμε να γράψουμε τα παραπάνω σύμβολα, θα πρέπει να ισχύει

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| \quad (13.198)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y[n]| \quad (13.199)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| \quad (13.200)$$

Η τελευταία σχέση μας υποδεικνύει ότι το σύστημα πρέπει να είναι **ευσταθές** για να μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση διαφορών στο χώρο της συχνότητας.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (13.201)$$

Λύση:

Θυμηθείτε τι κάναμε όταν αντιμετωπίζαμε τέτοιες καταστάσεις πριν μάθουμε για το μετασχ. Fourier. Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, οπότε $y[n] = h[n]$, και υποθέτουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες. Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n] \quad (13.202)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και η ρίζα του είναι

$$\gamma - \frac{1}{2} = 0 \implies \gamma = 1/2 \quad (13.203)$$

Άρα η κρουστική απόκρισή του είναι

$$h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (13.204)$$

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε ότι

$$h[0] - \frac{1}{2}h[-1] = \delta[0] = 1 \quad (13.205)$$

και άρα

$$h[0] = A\left(\frac{1}{2}\right)^0 u[0] = A = 1 \quad (13.206)$$

Οπότε η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (13.207)$$

Αν τώρα γράψουμε την εξίσωση διαφορών στο χώρο της συχνότητας, με χρήση ιδιοτήτων θα έχουμε

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) \quad (13.208)$$

Διαιρώντας με $X(e^{j\omega})$ έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (13.209)$$

Από τον Πίνακα (13.3) βλέπουμε εύκολα ότι

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (13.210)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 2:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n-1] \quad (13.211)$$

Λύση:

Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n] \quad (13.212)$$

Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, και θεωρούμε ότι τότε $y[n] = h_o[n]$. Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$h_o[n] - \frac{3}{4}h_o[n-1] = \delta[n] \quad (13.213)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και η ρίζα του είναι

$$\gamma - \frac{3}{4} = 0 \implies \gamma = \frac{3}{4} \quad (13.214)$$

Άρα η κρουστική απόκρισή του είναι

$$h_o[n] = A\left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad n \geq 0 \quad (13.215)$$

Από την εξίσωση διαφορών έχουμε ότι

$$h_o[0] - \frac{3}{4}h_o[-1] = \delta[0] = 1 \iff h_o[0] = 1 \quad (13.216)$$

και άρα

$$h_o[0] = A = 1 \quad (13.217)$$

Οπότε η κρουστική απόκριση του συστήματος της Σχέση (13.212) είναι

$$h_o[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n] \quad (13.218)$$

Τελικά, η ζητούμενη κρουστική απόκριση του συστήματος της εκφώνησης είναι

$$h[n] = h_o[n-1] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (13.219)$$

Αν τώρα γράψουμε την εξίσωση διαφορών στο χώρο της συχνότητας, με χρήση ιδιοτήτων θα έχουμε

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] = x[n-1] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) - \frac{3}{4}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \quad (13.220)$$

Διαιρώντας με $X(e^{j\omega})$ έχουμε

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega}}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega}} \quad (13.221)$$

Από τους Πίνακες (13.3,13.2) βλέπουμε εύκολα ότι

$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (13.222)$$

που είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 3:

Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] \quad (13.223)$$

Λύση:

Ας δούμε το πεδίο του χρόνου πρώτα. Έστω η εξίσωση διαφορών

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] \quad (13.224)$$

Θέτουμε $x[n] = \delta[n]$, οπότε $y[n] = h_o[n]$, και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν. Οπότε η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$h_o[n] - \frac{1}{2}h_o[n-1] = \delta[n] \quad (13.225)$$

Η κρουστική απόκρισή του είναι (Παράδειγμα 1, προηγουμένως)

$$h_o[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad (13.226)$$

Το σύστημα είναι ΓΧΑ, άρα η απόκρισή του στην είσοδο $-\frac{1}{4}\delta[n-1]$ θα είναι

$$h_1[n] = -\frac{1}{4}h_o[n-1] = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (13.227)$$

Άρα, η κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος είναι

$$h[n] = h_o[n] + h_1[n] = h_o[n] - \frac{1}{4}h_o[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (13.228)$$

Ας πάμε στο χώρο της συχνότητας τώρα. Έχουμε

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] \iff Y(e^{j\omega}) - \frac{1}{2}Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega}) - \frac{1}{4}X(e^{j\omega})e^{-j\omega} \quad (13.229)$$

και σχηματίζοντας το λόγο $\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega})$, θα έχουμε

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} e^{-j\omega} \quad (13.230)$$

Από τους Πίνακες (13.3,13.2) έχουμε ότι

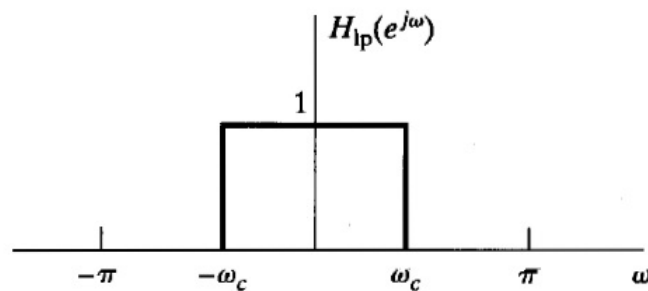
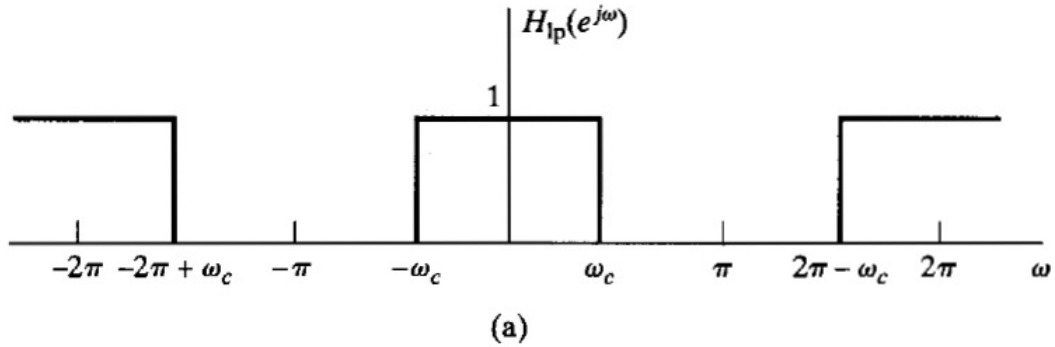
$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (13.231)$$

13.10 Ιδανικά Φίλτρα

Μια σημαντική κατηγορία ΓΧΑ συστημάτων περιλαμβάνουν αυτά τα συστήματα για τα οποία η απόκριση σε συχνότητα είναι ίση με τη μονάδα σε ένα συγκεκριμένο εύρος συχνοτήτων και μηδενική στις υπόλοιπες συχνότητες. Αυτά τα συστήματα ονομάζονται **ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας - ideal frequency-selective filters**.

Η απόκριση σε συχνότητα ενός ιδανικού χαμηλοπερατού φίλτρου φαίνεται στο Σχήμα 13.13. Ο όρος “χαμηλοπερατό” προέρχεται από το γεγονός ότι το φίλτρο αυτό αφήνει κάποιες χαμηλές συχνότητες ανέπαφες, στο διάστημα $[-\omega_c, \omega_c]$, ενώ “κόβει” (μηδενίζει, καταστέλλει) τις συχνότητες που είναι μεγαλύτερες από ω_c και μι-

κρότερες από $-\omega_c$. Να θυμάστε ότι η απόκριση σε συχνότητα είναι περιοδική, γι' αυτό και υπάρχουν επαναλήψεις



Σχήμα 13.13: Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο.

του σήματος που υπάρχει στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ γύρω από τα πολλαπλάσια του 2π . Λόγω ακριβώς αυτής της περιοδικότητας, η απόκριση σε συχνότητα ορίζεται πλήρως από τη συμπεριφορά της σε ένα διάστημα $(-\pi, \pi]$, οπότε μια πιο συνήθης μορφή της παρουσιάζεται στο Σχήμα 13.13b, όπου θεωρούμε ότι επαναλαμβάνεται ανά 2π , χωρίς απαραίτητα να τη σχεδιάζουμε.

Τα ιδανικά υψιπερατά - *highpass*, ζωνοπερατά - *bandpass*, και ζωνοφρακτικά - *bandstop* φίλτρα φαίνονται στο Σχήμα (13.14). Για παράδειγμα, το ιδανικό υψιπερατό φίλτρο έχει απόκριση σε συχνότητα

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_c < |\omega| < \pi \\ 0, & |\omega| \leq \omega_c \end{cases} \quad (13.232)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί με χρήση του βαθυπερατού φίλτρου ως

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega}) \quad (13.233)$$

Παίρνοντας αντίστροφο μετασχ. Fourier στην παραπάνω σχέση, έχουμε

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h_{lp}[n] \quad (13.234)$$

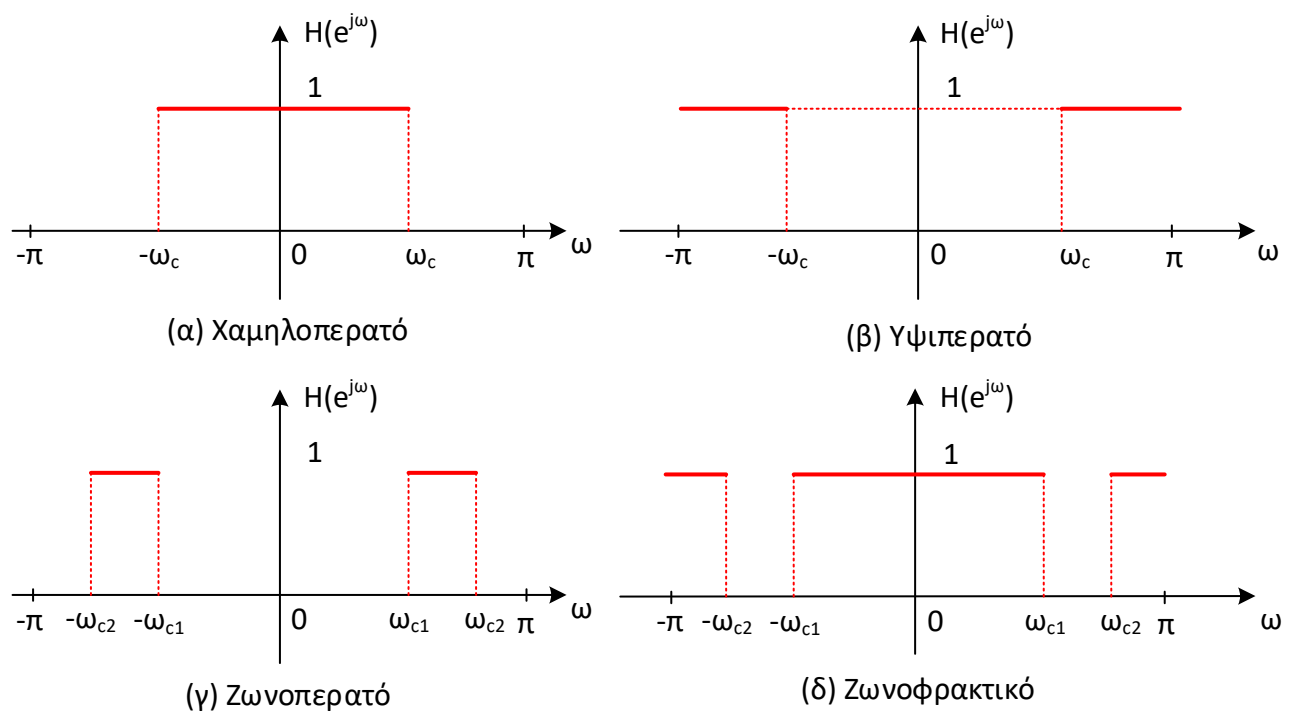
Σε ένα από τα παραδείγματά μας, δείξαμε ότι

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right) \quad (13.235)$$

Άρα

$$H_{hp}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c n}{\pi}\right) \quad (13.236)$$

Εξασκηθείτε, βρίσκοντας τις χροστικές αποκρίσεις όλων των ειδών ιδανικών φίλτρων.



Σχήμα 13.14: Ιδανικά φίλτρα επιλογής συχνότητας.

