ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.

i. Προφανώς, τα μηδενικά βρίσκονται στις θέσεις $z = -\frac{3}{2}$ και $z = \infty$, ενώ οι πόλοι στις θέσεις $z = -\frac{5}{4}$ και $z = \frac{1}{4}$. Οι πόλοι δεν είναι όλοι εντός του μοναδιαίου κύκλου, άρα το σύστημα δεν είναι αιτιατό και ευσταθές. Επίσης, το σύστημα δεν είναι ελάχιστης φάσης, αφού όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά δε βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου.

ii. Το σύστημα γράφεται ως

$$H(z) = \frac{z(z-\frac{1}{2})}{z^2-2} \tag{1}$$

και έτσι τα μηδενικά βρίσκονται στις θέσεις $z = 0$ και $z = \frac{1}{2}$, ενώ οι πόλοι στις θέσεις $z = \pm\sqrt{2}$. Το σύστημα δεν είναι ευσταθές και αιτιατό αφού υπάρχουν πόλοι εκτός του μοναδιαίου κύκλου. Επίσης, δεν είναι και ελάχιστης φάσης, αφού δεν είναι όλοι οι πόλοι και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Άσκηση 2.

i. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{(z-4)^2}{(z-0.25+0.43j)(z-0.25-0.43j)} \tag{2}$$

Το αντίστροφο σύστημα είναι

$$H^{inv}(z) = \frac{(z-(0.25+0.43j))(z-(0.25-0.43j))}{(z-4)^2} \tag{3}$$

Οι πόλοι του αντίστροφου συστήματος είναι εκτός μοναδιαίου κύκλου, άρα το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.

ii. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{-15z-10/3}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})} \tag{4}$$

Το αντίστροφο σύστημα είναι

$$H^{inv}(z) = \frac{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{3})}{-15z-10/3} \tag{5}$$

Ένας πόλος του συστήματος βρίσκεται στο άπειρο, οπότε το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.

iii. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

και το αντίστροφο σύστημα είναι

$$H^{inv}(z) = \frac{z-\frac{1}{2}}{z} \tag{7}$$

Ο πόλος του συστήματος βρίσκεται στο $z = 0$, δηλ. εντός μοναδιαίου κύκλου, άρα το αντίστροφο σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό.

Άσκηση 3.
Από τα δεδομένα, έχουμε ότι οι πόλοι είναι στις θέσεις $z = \pm j/2$, αφού το σύστημα είναι πραγματικό και το αντίστροφο σύστημα έχει δυο μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = \frac{A(1 - Cz^{-1})}{1 - z^{-1}\cos(\pi/2) + \frac{1}{4}z^{-2}} \tag{8}$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι το μηδενικό βρίσκεται στη θέση $z = 3$, και ότι το $2\pi h[0] = 4\pi \Rightarrow h[0] = 2$. Άρα $C = 3$ και για να βρούμε το A έχουμε από τους πίνακες ζευγών μετασχ. Ζ ότι

$$h[n] = \Big[A\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \cos(\pi n/2) - 3A\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sin(\pi n/2)\Big]u[n] \tag{9}$$

Χρησιμοποιούμε ότι $h[0] = 2$ και από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι $A = 2$. Οπότε τελικά

$$\frac{2(1 - 3z^{-1})}{1 + \frac{1}{4}z^{-2}} \tag{10}$$

και

$$h[n] = \Big[2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \cos(\pi n/2) - 6\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sin(\pi n/2)\Big]u[n] \tag{11}$$

i. Το σύστημα είναι ευσταθές αφού οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαιου κύκλου, και αυτό είναι αιτιατό.

ii. Όχι, το αντίστροφο σύστημα έχει έναν πόλο στη θέση $z = 3$, άρα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.

iii. Έχει ήδη βρεθεί.

iv. Η συνάρτηση μεταφοράς του αντίστροφου συστήματος είναι

$$H^{inv}(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-2}}{2(1 - 3z^{-1})} \tag{12}$$

Άσκηση 4.

i. Το μηδενικό στη θέση $z = 2$ θα αντιστοιχιστεί στο all-pass σύστημα, αφού είναι εκτός μοναδιαίου κύκλου του αρχικού συστήματος. Το all-pass σύστημα θα έχει έναν πόλο στη θέση $z = 1/2$, άρα θα είναι της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = -2\frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{13}$$

Ο πόλος στο $z = \frac{1}{2}$ του συστήματος all-pass θα πρέπει να ακυρωθεί με ένα μηδενικό στο σύστημα ελάχιστης φάσης. Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{14}$$

Οπότε

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) = (-2)\frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \times \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \tag{15}$$

ii. Αναγνωρίζουμε ότι ο όρος

$$\frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = 3\frac{\frac{1}{3} + z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{16}$$

αντιστοιχεί σε ένα all-pass σύστημα. Επίσης, ο όρος $1/z^{-1}$ συνιστά ένα ζεύγος πόλου-μηδενικού στα $0, +\infty$, οπότε ο όρος αυτός θα περιέλθει επίσης στο all-pass σύστημα. Οπότε οι υπόλοιποι όροι θα συνιστούν το ελάχιστης φάσης σύστημα, δηλ.

$$H_{min}(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \tag{17}$$

Άρα συνολικά

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) = 3\Big(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\Big) \times \frac{\frac{1}{3} + z^{-1}}{z^{-1}(1 + \frac{1}{3}z^{-1})} \tag{18}$$

Άσκηση 5.

i. Από το λογαριθμικό φάσμα λαμβάνουμε ότι υπάρχει ένας πόλος στη θέση $z = e^{j\pi/5}$ και ένα μηδενικό στη θέση $z = e^{j2\pi/5}$. Επίσης, υπάρχει ένας πόλος στη συχνότητα $\omega = 3\pi/5$, εντός του μοναδιαίου κύκλου. Αφού το σήμα είναι πραγματικό, οι πόλοι και τα μηδενικά πρέπει να έρχονται σε συζυγή ζεύγη. Τα υπόλοιπα δυο μηδενικά βρίσκονται στο μηδέν.

ii. Αφού το σύστημα έχει πόλους, τότε η κρουστική απόκριση είναι άπειρης διάρκειας, δηλ. IIR σύστημα.

iii. Αφού το σύστημα είναι αιτιατό και IIR, δεν μπορεί να είναι συμμετρικό, και άρα δεν έχει γραμμική φάση.

iv. Όχι, δεν είναι ευσταθές, αφού υπάρχουν πόλοι στο μοναδιαίο κύκλο.

Άσκηση 6.

i. Ναι, είναι, αφού οι πόλοι $z = \pm 0.6j$ βρίσκονται εντός μοναδιαίου κύκλου.

ii. Η συνάρτηση γράφεται ως

$$H(z) = \frac{(1 + 0.5z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 + j0.6z^{-1})(1 - j0.6z^{-1})} \tag{19}$$

Τα μηδενικά στις θέσεις $z = \pm 2$ θα αντιστοιχιστούν στο all-pass σύστημα, και άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 - 2z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} = -4\frac{(z^{-1} - \frac{1}{2})(z^{-1} + \frac{1}{2})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \tag{20}$$

Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα πρέπει να έχει μηδενικά που ακυρώνουν τους πόλους του all-pass συστήματος, οπότε θα είναι

$$H_{min}(z) = \frac{(1 + 0.5z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 + j0.6z^{-1})(1 - j0.6z^{-1})} \tag{21}$$

Οπότε τελικά

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) = -4\frac{(1 + 0.5z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})}{(1 + j0.6z^{-1})(1 - j0.6z^{-1})} \times \frac{(z^{-1} - \frac{1}{2})(z^{-1} + \frac{1}{2})}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{2}z^{-1})} \tag{22}$$