

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/10/2016

Ημερομηνία Παράδοσης: 3/11/2016

Άσκηση 1. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, δείξτε ότι τα παρακάτω σήματα έχουν μετασχ. Ζ όπως δίνεται για το καθένα.

i.

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{(2 - \frac{1}{6}z^{-1})}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

ii.

$$x[n] = -\left(\frac{3}{4}\right)^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{(2 - \frac{5}{12}z^{-1})}{\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

iii.

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$$

Συμπληρώστε επίσης το πεδίο σύγκλισης που λείπει σε καθένα από τους παραπάνω μετασχηματισμούς, το οποίο θα προκύψει από περιορισμούς του μιγαδικού επιπέδου κατά τη λύση σας. Βρείτε τους πόλους και τα μηδενικά κάθε μετασχηματισμού.

Άσκηση 2. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες και γνωστά ζεύγη του μετασχ. Ζ, δείξτε ότι τα παρακάτω σήματα έχουν μετασχ. Ζ όπως δίνεται για το καθένα.

i.

$$x[n] = u[n-2] * (2/3)^n u[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - (2/3)z^{-1})}$$

ii.

$$x[n] = \sin(\pi n/8 - \pi/4) u[n-2] \longleftrightarrow X(z) = \frac{z^{-3} \sin(\pi/8)}{1 - 2z^{-1} \cos(\pi/8) + z^{-2}}$$

iii.

$$x[n] = (n-1)(1/2)^n u[n-1] * (1/3)^n u[n+1] \longleftrightarrow X(z) = \frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$$

Συμπληρώστε επίσης το πεδίο σύγκλισης που λείπει σε καθένα από τους παραπάνω μετασχηματισμούς, το οποίο θα προκύψει από περιορισμούς του μιγαδικού επιπέδου κατά τη χρήση των ιδιοτήτων και των ζευγών.

Άσκηση 3. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχ. Z των παρακάτω σημάτων για κάθε πιθανό πεδίο σύγκλισης:

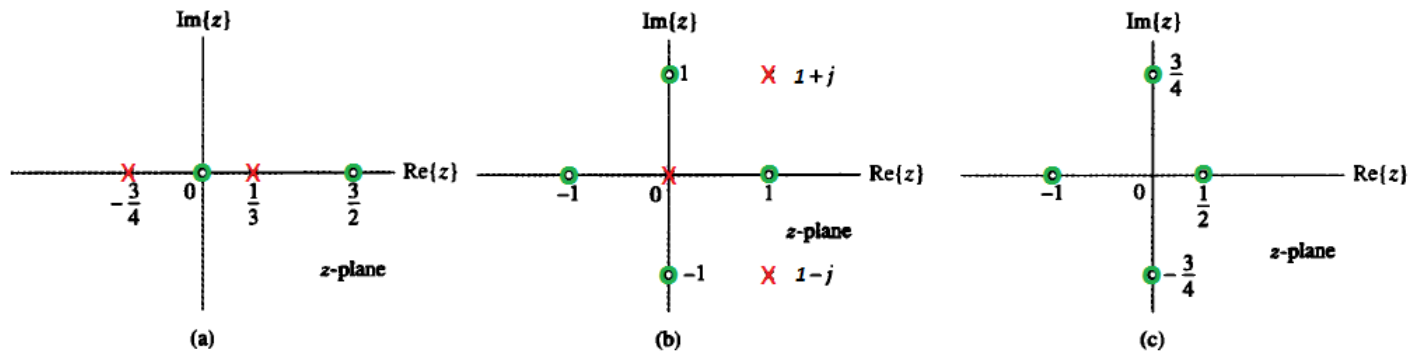
i.

$$X(z) = \frac{1 + \frac{7}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}$$

ii.

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 + \frac{3}{2}z - 1}$$

Άσκηση 4. Στο Σχήμα 1 σας δίνονται τρία διαγράμματα πόλων-μηδενικών ενός μετασχ. Z. Για κάθε διάγραμμα



Σχήμα 1: Διαγράμματα πόλων μηδενικών Άσκησης 4.

- αναγνωρίστε όλα τα πιθανά πεδία σύγκλισης για το μετασχηματισμό.
- βρείτε για ποιο πεδίο σύγκλισης μπορούμε να υπολογίσουμε το μετασχ. Fourier μέσω του μετασχ. Z. Αιτιολογήστε επαρκώς.
- καθορίστε τα πεδία σύγκλισης που αντιστοιχούν σε δεξιόπλευρο, αριστερόπλευρο, ή αμφίπλευρο σήμα στο πεδίο του χρόνου.
- γράψτε μια έκφραση του μετασχ. Z που προκύπτει.

Άσκηση 5. Χρησιμοποιήστε τα παρακάτω στοιχεία για να βρείτε τα σήματα $x[n]$ και τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς Z $X(z)$ σε κάθε περίπτωση:

- Ο $X(z)$ έχει πόλους στις θέσεις $z = 1/2$ και $z = -1$, ισχύει ότι $x[1] = 1, x[-1] = 1$, και το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το σημείο $z = 3/4$.
- Το $x[n]$ είναι δεξιόπλευρο, ο $X(z)$ έχει μόνο έναν πόλο, και ισχύει ότι $x[0] = 2, x[2] = 1/2$.
- Το $x[n]$ είναι αμφίπλευρο, ο $X(z)$ έχει έναν πόλο στη θέση $z = 1/4$, ισχύει ότι $x[-1] = 1, x[-3] = 1/4$, και $X(1) = 11/3$.

Άσκηση 6. Ας επιβεβαιώσουμε όσα μάθαμε στη θεωρία σχετικά με το μετασχ. Z, τη σχέση του με το μετασχ. Fourier, καθώς και τη θέση των πόλων και των μηδενικών. Τα συστήματα που θα συζητήσουμε είναι όλα **αιτιατά**.

Προς βοήθειά σας, σας δίνεται η συνάρτηση `pezw`, η οποία παράγει κάποια γραφήματα τα οποία καλείστε να ερμηνεύσετε με βάση όσα γνωρίζετε από τη θεωρία. Ο κώδικας που θα χρειαστεί να γράψετε εσείς είναι ελάχιστος. Γράψτε `help pezw` στο Command Window του MATLAB για να δείτε σύνταξη και χρήση.

1. Κατανόηση πραγματικών πόλων

i. Έστω ένα σύστημα που περιγράφεται από το μετασχ. Z

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \quad (1)$$

Καλέστε τη συνάρτηση `pezw.m` ως εξής:

```
pezw(1, [1 -0.5]);
```

Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- (α) Σε ποιά θέση εμφανίζεται ο πόλος της συνάρτησης;
- (β) Η συνάρτησή μας έχει μόνο πόλους. Γιατί εμφανίζεται ένα μηδενικό στο $(0, 0)$;
- (γ) Σε ποιά συχνότητα εμφανίζεται μέγιστο στο φάσμα πλάτους; Πώς σχετίζεται αυτό το μέγιστο με τη θέση του πόλου;
- (δ) Γράψτε τη σχέση που περιγράφει το σήμα στο χρόνο $h[n]$, δηλ. την κρουστική απόκριση του συστήματος.
- (ε) Θεωρητικά, είναι το σύστημα ευσταθές; Εξηγήστε. Σας επιβεβαιώνει την απάντηση το γράφημα;
- (ς) Στο γράφημα του μέτρου της $|H(z)|$, τι συμβολίζει ο κόκκινος κύκλος;
- (ζ) Πώς εμφανίζονται εκεί ο πόλος και το μηδενικό; (τι μορφή έχουν)

Παρατηρήστε ότι η κρουστική απόκριση μειώνεται εκθετικά και δεν έχει ταλαντώσεις.

ii. Έστω τώρα το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}} \quad (2)$$

δηλ. ο πόλος βρίσκεται πιο κοντά στο μοναδιαίο κύκλο απ' ότι πριν. Καλέστε ξανά την παραπάνω συνάρτηση με κατάλληλα ορίσματα. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- (α) Πως άλλαξε το φάσμα πλάτους σε σχέση με πριν; Γιατί;
- (β) Πως άλλαξε η κρουστική απόκριση σε σχέση με πριν; Γιατί;
- (γ) Θεωρητικά, είναι το σύστημα ευσταθές; Εξηγήστε. Σας επιβεβαιώνει την απάντηση το γράφημα;

iii. Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (3)$$

Χωρίς να καλέσετε τη συνάρτηση, απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

- (α) Πως αλλάζει το φάσμα πλάτους σε σχέση με πριν; Γιατί;
- (β) Πως αλλάζει η κρουστική απόκριση σε σχέση με πριν; Γιατί;
- (γ) Θεωρητικά, είναι το σύστημα ευσταθές; Εξηγήστε. Επιβεβαιώνεται η απάντησή σας από το γράφημα;

Καλέστε τώρα τη συνάρτηση με κατάλληλα ορίσματα, και ελέγξτε τις απαντήσεις σας. Αν παρατηρήτε κάτι αξιοπερίεργο, καταγράψτε το και προσπαθήστε να το εξηγήσετε.

iv. Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$H(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1}} \quad (4)$$

Χωρίς να καλέσετε τη συνάρτηση, απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

- (α) Πως αλλάζει το φάσμα πλάτους σε σχέση με πριν; Γιατί;
- (β) Πως αλλάζει η κρουστική απόκριση σε σχέση με πριν; Γιατί;

(γ) Θεωρητικά, είναι το σύστημα ευσταθές; Εξηγήστε. Επιβεβαιώνεται η απάντησή σας από το γράφημα;

Καλέστε τώρα τη συνάρτηση με κατάλληλα ορίσματα, και ελέγξτε τις απαντήσεις σας.

v. Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.9z^{-1}} \quad (5)$$

Καλέστε τη συνάρτηση pezw με κατάλληλα ορίσματα. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

(α) Σε τι διαφέρει η παραπάνω συνάρτηση σε σχέση με αυτή της Σχέσης (3);

(β) Γιατί το φάσμα πλάτους άλλαξε τόσο ριζικά σε σχέση με το γράφημα της Σχέσης (3); Εξηγήστε.

(γ) Θεωρητικά, είναι το σύστημα ευσταθές; Εξηγήστε. Επιβεβαιώνεται η απάντησή σας από το γράφημα;

vii. Έστω το σύστημα που περιγράφεται από την εξίσωση

$$H(z) = \frac{1}{1 + 1.5z^{-1}} \quad (6)$$

Καλέστε τη συνάρτηση pezw με κατάλληλα ορίσματα. Παραδώστε το γράφημα στην αναφορά σας και απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

(α) Σε τι διαφέρει η παραπάνω συνάρτηση σε σχέση με αυτή της Σχέσης (4);

(β) Γιατί το φάσμα πλάτους άλλαξε τόσο ριζικά σε σχέση με το γράφημα της Σχέσης (4); Εξηγήστε.

(γ) Θεωρητικά, είναι το σύστημα ευσταθές; Εξηγήστε. Επιβεβαιώνεται η απάντησή σας από το γράφημα;

viii. **Σημαντική Ερώτηση 1:** Τι συμπεράσματα βγάξετε για τη συμπεριφορά του μετασχ. Fourier (και συγκεκριμένα του φάσματος πλάτους του) όσο ένας πόλος κινείται επάνω στον πραγματικό άξονα;

viii. **Σημαντική Ερώτηση 2:** Μπορείτε να εξάγετε παρόμοια συμπεράσματα για έναν πόλο που κινείται επάνω στο φανταστικό άξονα; Εξηγήστε σύντομα.

2. Κατανόηση μιγαδικών πόλων

i. Έστω το σύστημα

$$H(z) = \frac{1}{(1 - d_1z^{-1})(1 - d_2z^{-1})} \quad (7)$$

(α) Υπό ποιές συνθήκες το (συνολικό, δευτεροβάθμιο) πολυώνυμο του παρονομαστή έχει πραγματικούς συντελεστές;

(β) Έστω δυο πόλοι,

$$d_1 = 0.7e^{j\pi/4}, \quad d_2 = 0.7e^{-j\pi/4} \quad (8)$$

Ποιοί είναι οι συντελεστές του πολυωνύμου του παρονομαστή σε αυτήν την περίπτωση;

(γ) Επιβεβαιώστε την απάντησή σας με χρήση της εντολής `conv`, η οποία εκτελεί πολλαπλασιασμό πολυωνύμων, δεχόμενη δυο ορίσματα: τους συντελεστές του ενός πολυωνύμου σε φθίνουσα σειρά, και τους συντελεστές του δεύτερου, ξανά σε φθίνουσα σειρά. Η `conv` επιστρέφει τους συντελεστές του πολυωνύμου που προκύπτει μετά τον πολλαπλασιασμό.

(δ) Καλέστε τη συνάρτηση pezw.m ως εξής:

`pezw(1, [a_1 a_2 a_3]);`

με a_1 , a_2 , a_3 τους συντελεστές που βρήκατε παραπάνω. Παραδώστε τα γραφήματα που σας έδωσε η συνάρτηση και απαντήστε στα παρακάτω:

(ε) Εξηγήστε την παρουσία δυο μηδενικών στην αρχή των αξόνων.

(ς) Σε ποιές συχνότητες εμφανίζονται μέγιστα στο φάσμα πλάτους;

- (ζ) Πώς σχετίζονται οι συχνότητες αυτές με τους πόλους;
 (η) Γράψτε τη σχέση που περιγράφει τη μοναδιαία απόκριση $h[n]$.
 (θ) Γιατί υπάρχει ταλάντωση στη μοναδιαία απόκριση;
- ii. Έστω δυο νέοι πόλοι,

$$d_1 = 0.9e^{j\pi/4}, \quad d_2 = 0.9e^{-j\pi/4} \quad (9)$$

Καλέστε τη συνάρτηση `pezw.m` ως εξής:

```
pezw(1, [b_1 b_2 b_3]);
```

με b_1 , b_2 , b_3 τους συντελεστές του πολυωνύμου του παρονομαστή για τους νέους πόλους. Σχολιάστε διαφορές στο φάσμα πλάτους και στην κρουστική απόκριση όταν ο πόλος έχει πλάτος 0.7 (όπως πριν), και 0.9 (όπως τώρα). Κάντε το ίδιο για τους πόλους

$$d_1 = 0.7e^{j3\pi/4}, \quad d_2 = 0.7e^{-j3\pi/4} \quad (10)$$

- iii. **Σημαντική Ερώτηση 3:** Τι συμπεράσματα βγάξετε για τη συμπεριφορά του μετασχ. Fourier (και συγκεκριμένα του φάσματος πλάτους του) όσο δυο συζυγείς πόλοι κινούνται μαζί και προς την ίδια κατεύθυνση επάνω στο μιγαδικό επίπεδο;

3. Κατανόηση πόλων στο μηδέν

- i. Χρησιμοποιώντας τη δοθείσα συνάρτηση `pezw`, προσπαθήστε να βάλετε έναν πόλο στο μηδέν. Σκεφτείτε ποιά είναι η απλούστερη $H(z)$ που έχει έναν πόλο στο μηδέν, και γράψτε τη ως πολυώνυμο του z^{-1} . Παραδώστε τα γραφήματα της συνάρτησης και απαντήστε στα παρακάτω:
- (α) Σε ποίο σήμα στο χρόνο $h[n]$ αντιστοιχεί αυτή η $H(z)$;
 (β) Εξηγήστε το φάσμα πλάτους, το φάσμα φάσης, και τη μοναδιαία απόκριση που σας επέστρεψε η `pezw`.
- ii. Χρησιμοποιώντας τη δοθείσα συνάρτηση `pezw`, προσπαθήστε να βάλετε δυο πόλους στο μηδέν. Σκεφτείτε με όμοιο τρόπο με πριν. Παραδώστε τα γραφήματα της συνάρτησης και απαντήστε στα παρακάτω:
- (α) Σε ποίο σήμα στο χρόνο $h[n]$ αντιστοιχεί αυτή η $H(z)$;
 (β) Εξηγήστε το φάσμα πλάτους, το φάσμα φάσης, και τη μοναδιαία απόκριση.
 (γ) Πώς διαφέρουν αυτά τα μεγέθη με τα προηγούμενα, όταν είχατε μόνο έναν πόλο;
- iii. Χρησιμοποιώντας τη δοθείσα συνάρτηση, προσπαθήστε να βάλετε τρεις πόλους στο μηδέν. Παραδώστε τα γραφήματα που σας επιστρέφει η συνάρτηση. Παρατηρήστε και συγκρίνετε με τα προηγούμενα.
- iv. **Σημαντική Ερώτηση 4:** Τι συμβαίνει όταν βάζετε πόλους στο μηδέν;

4. Κατανόηση μηδενικών

- i. Χρησιμοποιώντας τη δοθείσα συνάρτηση, προσπαθήστε να βάλετε μηδενικά στις θέσεις

$$c_1 = j \quad (11)$$

$$c_2 = -1 \quad (12)$$

$$c_3 = -j \quad (13)$$

Η συνάρτηση `cony` μπορεί να σας φανεί χρήσιμη. Παραδώστε τα γραφήματα που σας επιστρέφονται και απαντήστε στα παρακάτω:

- (α) Ποιά εξίσωση περιγράφει το σύστημα στο χώρο του Z , δηλ. το $H(z)$;
 - (β) Εξηγήστε την παρουσία πόλων στην αρχή των αξόνων.
 - (γ) Τι είδους σύστημα φτιάξατε ως προς την “περατότητα” του (χαμηλοπερατό, υψηλοπερατό, ζωνοπερατό, ζωνοφρακτικό);
 - (δ) Σε ποιές συχνότητες μηδενίζεται το φάσμα πλάτους;
 - (ε) Τι κλίση έχει το φάσμα φάσης;
 - (ς) Υπολογίστε θεωρητικά την κρουστική απόκριση $h[n]$.
 - (ζ) Αλλάξτε τα δυο μηδενικά, και από τις θέσεις $\pm j$, βάλτε τα στις θέσεις $\pm 0.9j$. Καλέστε τη συνάρτησης $pezw$ και παρατηρήστε τι συμβαίνει. Παραδώστε τα γραφήματα που σας επέστρεψε.
- ii. **Σημαντική Ερώτηση 5:** Τι συμβαίνει όταν βάζετε μηδενικά επάνω ή κοντά στο μοναδιαίο κύκλο;