ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος

Χειμερινό Εξάμηνο 2016

Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/10/2016 Ημερομηνία Παράδοσης: 11/10/2016

Άσκηση 1.

i. Θα είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right) z^{-n} \tag{1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]z^{-n} \tag{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} \tag{3}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \tag{4}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \tag{5}$$

για $|z| > 1/2$ και $|z| > |-1/3| = 1/3$, ώστε να συγκλίνουν οι παραπάνω σειρές. Οπότε

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2-\frac{1}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > 1/2 \tag{6}$$

Γράφοντάς το ως θετικές δυνάμεις του z, έχουμε

$$X(z) = \frac{z(2z-\frac{1}{6})}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{2} \tag{7}$$

Άρα οι πόλοι είναι στις θέσεις $z = \frac{1}{2}$ και $z = -\frac{1}{3}$, και τα μηδενικά στις θέσεις $z = 0$ και $z = \frac{1}{12}$.

ii. Θα είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-\left(\frac{3}{4}\right)^n u[-n-1] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right) z^{-n} \tag{8}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n u[-n-1]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]z^{-n} \tag{9}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} \tag{10}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{3}z\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n \tag{11}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - \frac{4}{3}z} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{12}$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{13}$$

για $|z| < 3/4$ και $|z| > |-1/3| = 1/3$, ώστε να συγκλίνουν οι παραπάνω σειρές. Οπότε

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2 - \frac{5}{12}z^{-1}}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1})(1 + \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad 1/3 < |z| < 3/4 \tag{14}$$

Γράφοντάς το ως θετικές δυνάμεις του z, έχουμε

$$X(z) = \frac{z(2z - \frac{5}{12})}{\left(z - \frac{3}{4}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)}, \quad \frac{1}{3} < |z| < \frac{3}{4} \tag{15}$$

Άρα οι πόλοι είναι στις θέσεις $z = \frac{3}{4}$ και $z = -\frac{1}{3}$, και τα μηδενικά στις θέσεις $z = 0$ και $z = \frac{5}{24}$.

iii. Θα είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n}u[n]z^{-n} \tag{16}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{j\omega_0 n}z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{j\omega_0}z^{-1})^n \tag{17}$$
$$= \frac{1}{1 - e^{j\omega_0}z^{-1}} \tag{18}$$

με $|z| > |e^{j\omega_0}| = 1$. Γράφοντάς το με θετικές δυνάμεις του z, έχουμε

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}}, \quad |z| > 1 \tag{19}$$

Άρα ο πόλος είναι στη θέση $z = e^{j\omega_0}$, και το μηδενικό στη θέση $z = 0$.

Άσκηση 2.

i. Είναι

$$u[n-2] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}}z^{-2}, \ |z| > 1 \tag{20}$$

και

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}, \ |z| > \frac{2}{3} \tag{21}$$

Η συνέλιξη των παραπάνω μετατρέπεται σε γινόμενο στο χώρο του Ζ, δηλ.

$$u[n-2] * \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}}\frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}}, \ |z| > 1 \tag{22}$$

Κάνοντας πράξεις,

$$X(z) = \frac{z^{-2}}{1 - z^{-1}}\frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1}} = \frac{z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 - \frac{2}{3}z^{-1})}, \ |z| > 1 \tag{23}$$

ii. Είναι

$$x[n] = \sin(\pi n/8 - \pi/4)u[n-2] = \sin\left(\frac{\pi}{8}(n-2)\right)u[n-2] \longleftrightarrow X(z) = \frac{z^{-1}\sin(\pi/8)}{1 - 2z^{-1}\cos(\pi/8) + z^{-2}}z^{-2}, |z| > 1 \tag{24}$$

iii. Είναι

$$(n-1)\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n-1] = \frac{1}{2}(n-1)\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} u[n-1] \longleftrightarrow \frac{1}{2}z^{-1}\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2},\ |z|>1/2 \tag{25}$$

και

$$\Big(\frac{1}{3}\Big)^n u[n+1] = 3\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n+1} u[n+1] \longleftrightarrow 3z\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},\ |z|>1/3 \tag{26}$$

Η συνέλιξη των δυο σημάτων γίνεται γινόμενο στο χώρο του Z, άρα

$$X(z) = \frac{1}{2}z^{-1}\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2}3z\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{\frac{3}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2(1-\frac{1}{3}z^{-1})},\ |z|>1/2 \tag{27}$$

Άσκηση 3.

i. Τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι:

- $1/3 < |z| < 1/2$
- $|z| > 1/2$
- $|z| < 1/3$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$X(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \tag{28}$$

με

$$A = X(z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=1/2} = 2 \tag{29}$$

$$B = X(z)(1+\frac{1}{3}z^{-1})\Big|_{z=-1/3} = -1 \tag{30}$$

οπότε

$$X(z) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \tag{31}$$

- Έστω ότι το $x[n]$ είναι δεξιόπλευρο, δηλ. $|z|>1/2$. Τότε

$$x[n] = \left(2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n - \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\right)u[n] \tag{32}$$

- Έστω ότι το $x[n]$ είναι αριστερόπλευρο, δηλ. $|z|<1/3$. Τότε

$$x[n] = -2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[-n-1] + \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[-n-1] \tag{33}$$

- Έστω ότι το $x[n]$ είναι αμφίπλευρο, δηλ. $1/3<|z|<1/2$. Τότε

$$x[n] = -2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[-n-1] - \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[n] \tag{34}$$

ii. Βλέπουμε ότι τα πιθανά πεδία σύγκλισης είναι

- $1/2 < |z| < 2$
- $|z| < 1/2$
- $|z| > 2$

Γράφοντας το σήμα ως

$$X\left(z\right)=\frac{1-3z^{-1}}{1+\frac{3}{2}z^{-1}-z^{-2}} \tag{35}$$

και αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, έχουμε

$$X(z)=\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1+2z^{-1}} \tag{36}$$

με

$$A=X(z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})\Big|_{z=-1/2}=-1 \tag{37}$$

$$B=X(z)(1+2z^{-1})\Big|_{z=2}=2 \tag{38}$$

οπότε

$$X(z)=-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+2\frac{1}{1+2z^{-1}} \tag{39}$$

- Έστω ότι το $x\left[n\right]$ είναι δεξιόπλευρο, δηλ. $|z|>2$. Τότε

$$x[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+2\left(-2\right)^{n}u[n] \tag{40}$$

- Έστω ότι το $x\left[n\right]$ είναι αριστερόπλευρο, δηλ. $|z|<1/2$. Τότε

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n-1]-2(-2)^{n}u[-n-1] \tag{41}$$

- Έστω ότι το $x\left[n\right]$ είναι αμφίπλευρο, δηλ. $1/2<|z|<2$. Τότε

$$x[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-2(-2)^{n}u[-n-1] \tag{42}$$

Άσκηση 4.

(α') Το σήμα γράφεται ως

$$X\left(z\right)=A\frac{z\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z+\frac{3}{4}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \tag{43}$$

Υπάρχουν 4 πιθανά πεδία σύγκλισης:
(1) $|z|>\frac{3}{4}$, και το $x[n]$ είναι δεξιόπλευρο.
(2) $\frac{1}{3}<|z|<\frac{3}{4}$, και το $x[n]$ είναι δίπλευρο.
(3) $|z|<\frac{1}{3}$, και το $x[n]$ είναι αριστερόπλευρο.

Ο μετασχ. Fourier μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Z μόνο στην 1η περίπτωση, όπου το $|z|>\frac{3}{4}$ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.

(β') Το σήμα γράφεται ως

$$X\left(z\right)=A\frac{\left(z^{4}-1\right)}{z\left(z-\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)\left(z-\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)} \tag{44}$$

Υπάρχουν 2 πιθανά πεδία σύγκλισης:
(1) $|z|>\sqrt{2}$, και το $x[n]$ είναι δεξιόπλευρο.
(2) $|z|<\sqrt{2}$, και το $x[n]$ είναι δίπλευρο.

Ο μετασχ. Fourier μπορεί να υπολογιστεί μέσω του μετασχ. Z μόνο στην 2η περίπτωση, όπου το $|z|<\sqrt{2}$ περιέχει το μοναδιαίο κύκλο.

(γ') Το σήμα γράφεται ως

$$X\left(z\right)=A\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+1\right)\left(z^{2}+\frac{9}{16}\right),|z|<\infty \tag{45}$$

Το $x[n]$ είναι ευσταθές και αριστερόπλευρο. Αν είχε πόλους στο μηδέν, θα ήταν δεξιόπλευρο, αλλά αυτό δε συμβαίνει.

Άσκηση 5.

i. Αφού το πεδίο σύγκλισης περιλαμβάνει το σημείο $z=\frac{3}{4}$, τότε αυτό είναι $\frac{1}{2}<|z|<1$. Άρα το σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$X\left(z\right)=\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1+z^{-1}}\longleftrightarrow x[n]=A\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-B\left(-1\right)^{n}u[-n-1] \tag{46}$$

Επίσης

$$x[1]=1=A\left(\frac{1}{2}\right)=1\Longleftrightarrow A=2 \tag{47}$$

και

$$x[-1]=1=-1B\left(-1\right)\Longleftrightarrow B=1 \tag{48}$$

Άρα

$$x[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\left(-1\right)^{n}u[-n-1] \tag{49}$$

ii. Το σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$x[n]=c\left(p\right)^{n}u[n] \tag{50}$$

όπου c είναι σταθερά και p ο πόλος. Άρα

$$x[0]=2=c\left(p\right)^{0}\Longleftrightarrow c=2 \tag{51}$$

$$x[2]=\frac{1}{2}=2\left(p\right)^{2}\Longleftrightarrow p=\frac{1}{2} \tag{52}$$

οπότε

$$x[n]=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] \tag{53}$$

iii. Το σήμα μπορεί να γραφεί ως

$$X\left(z\right)=\frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{B}{1-cz^{-1}}\longleftrightarrow x[n]=A\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]-B\left(c\right)^{n}u[-n-1] \tag{54}$$

Έχουμε

$$x[-1]=1=-Bc^{-1} \tag{55}$$

$$x[-3]=\frac{1}{4}=-Bc^{-3} \tag{56}$$

που δίνουν

$$c=2 \tag{57}$$

$$B=-2 \tag{58}$$

Οπότε

$$X\left(1\right)=\frac{11}{3}=\frac{A}{1-\frac{1}{4}}+\frac{-2}{1-2}\Longleftrightarrow A=\frac{5}{4} \tag{59}$$

και έτσι το σήμα στο χρόνο είναι

$$x[n]=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]+2\left(2\right)^{n}u[-n-1] \tag{60}$$

Άσκηση 6.

1. **Κατανόηση πραγματικών πόλων**

   i. `pezw(1, [1 -0.5]);`

   (α΄) Ο πόλος εμφανίζεται στη θέση $z = 0.5$.

   (β΄) Γιατί κάθε ρητή συνάρτηση μεταφοράς έχει τόσους πόλους όσα και μηδενικά, οπότε αν τη γράψουμε στη μορφή

   $$H(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.5} \tag{61}$$

   τότε αποκαλύπτεται ότι υπάρχει ένα μηδενικό στη θέση $z = 0$.

   (γ΄) Ο πόλος βρίσκεται στο θετικό μέρος του πραγματικού άξονα, δηλ. στη συχνότητα $\omega = 0$. Το μέγιστο εμφανίζεται σε αυτή τη συχνότητα.

   (δ΄) Είναι

   $$h[n] = (0.5)^n u[n] \tag{62}$$

   αφού το σύστημα είναι αιτιατό.

   (ε΄) Ναι, είναι, αφού είναι αιτιατό και ο μοναδιαίος κύκλος περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, $|z| > 0.5$. Η κρουστική αποκριση του στο γράφημα το επιβεβαιώνει, αφού φθίνει στο μηδέν όσο $n \to +\infty$, με αποτέλεσμα να ισχύει η σχέση

   $$\sum |h[n]| < \infty \tag{63}$$

   (ϛ΄) Συμβολίζει το μοναδιαίο κύκλο, όπου εκεί εκτιμάται ο μετασχ. Fourier (αν υπάρχει).

   (ζ΄) Ο πόλος έχει τη μορφή υψώματος ενώ το μηδενικό τη μορφή βαθουλώματος στο γράφημα της $|H(z)|$.

   ii. `pezw(1, [1 -0.9]);`

   (α΄) Το φάσμα πλάτους έγινε πιο στενό γύρω από τη συχνότητα $\omega = 0$, εώ η τιμή του σε αυτή τη συχνότητα μεγάλωσε. Αυτό εξηγείται από την παρουσία του πόλου πιο κοντά στο μοναδιαίο κύκλο σε σχέση με πριν.

   (β΄) Επειδή ο πόλος βρίσκεται στη θέση $z = 0.9$, η κρουστική απόκριση δίνεται ως

   $$h[n] = (0.9)^n u[n] \tag{64}$$

   που είναι ένα σήμα που φθίνει πιο αργά σε σχέση με πριν.

   (γ΄) Ναι, είναι, αφού είναι αιτιατό και ο μοναδιαίος κύκλος περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, $|z| > 0.5$. Η κρουστική αποκριση του στο γράφημα το επιβεβαιώνει, αφού φθίνει στο μηδέν όσο $n \to +\infty$, με αποτέλεσμα να ισχύει η σχέση

   $$\sum |h[n]| < \infty \tag{65}$$

   iii. `pezw(1, [1 -1]);`

   (α΄) Το φάσμα πλάτους απειρίζεται στη συχνότητα $\omega = 0$ λόγω του πόλου στη θέση $z = 1$.

   (β΄) Η κρουστική απόκριση γίνεται

   $$h[n] = 1^n u[n] = u[n] \tag{66}$$

   και ισούται με τη βηματική συνάρτηση.

   (γ΄) Όχι, δεν είναι, αφού ο μοναδιαίος κύκλος δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, $|z| > 1$. Η κρουστική αποκριση του στο γράφημα το επιβεβαιώνει, αφού δεν φθίνει όσο $n \to +\infty$, με αποτέλεσμα να μην ισχύει η σχέση

   $$\sum |h[n]| < \infty \tag{67}$$

iv. `pezw(1, [1 -1.5]);`

(α') Το φάσμα πλάτους δεν απειρίζεται πλέον αφού, ο πόλος έφυγε από το μοναδιαίο κύκλο. Εξακολουθεί να έχει υψηλή τιμή στη συχνότητα $\omega = 0$, αφού ο πόλος παρέμεινε στο θετικό τμήμα του πραγματικού άξονα.

(β') Η κρουστική απόκριση γίνεται

$$h[n] = (1.5)^n u[n] \tag{68}$$

που σημαίνει ότι αυξάνει όσο $n \to \infty$.

(γ') Όχι, δεν είναι, αφού ο μοναδιαίος κύκλος δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, $|z| > 1.5$. Η κρουστική αποκριση του στο γράφημα το επιβεβαιώνει, αφού αυξάνει χωρίς όριο όσο $n \to +\infty$, με αποτέλεσμα να μην ισχύει η σχέση

$$\sum |h[n]| < \infty \tag{69}$$

v. `pezw(1, [1 0.9]);`

(α') Η παραπάνω συνάρτηση έχει τον πόλο της στη θέση $z = -0.9$, σε αντίθεση με την προηγούμενη που είχε τον πόλο στη θέση $z = 0.9$.

(β') Πλέον ο πόλος βρίσκεται στη συχνότητα $\omega = \pi$, με αποτέλεσμα να παρουσιάζονται υψηλές τιμές σε αυτή τη συχνότητα.

(γ') Ναι, είναι, αφού ο μοναδιαίος κύκλος περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, $|z| > |-0.9| = 0.9$. Η κρουστική αποκριση του στο γράφημα το επιβεβαιώνει, αφού φθίνει στο μηδέν όσο $n \to +\infty$, με αποτέλεσμα να ισχύει η σχέση

$$\sum |h[n]| < \infty \tag{70}$$

vi. `pezw(1, [1 1.5]);`

(α') Η παραπάνω συνάρτηση έχει τον πόλο της στη θέση $z = -1.5$, σε αντίθεση με την προηγούμενη που είχε τον πόλο στη θέση $z = 1.5$.

(β') Ο πόλος βρίσκεται στη συχνότητα $\omega = \pi$, αλλά πιο μακριά από το μοναδιαίο κύκλο, με αποτέλεσμα να παρουσιάζονται υψηλές τιμές σε αυτή τη συχνότητα.

(γ') Όχι, δεν είναι, αφού ο μοναδιαίος κύκλος δεν περιλαμβάνεται στο πεδίο σύγκλισης, $|z| > |-1.5| = 1.5$. Η κρουστική αποκριση του στο γράφημα το επιβεβαιώνει, αφού αυξάνει χωρίς όριο όσο $n \to +\infty$, με αποτέλεσμα να μην ισχύει η σχέση

$$\sum |h[n]| < \infty \tag{71}$$

vii. **Σημαντική Ερώτηση 1:** Όσο ένας πόλος κινείται επάνω στον πραγματικό άξονα, επηρεάζει τις τιμές του φάσματος πλάτους στις συχνότητες $\omega = 0$ (αν ο πόλος βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα) και $\omega = \pi$ (αν ο πόλος βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα). Όσο πιο κοντά στο μοναδιαίο κύκλο βρίσκεται ο πόλος, τόσο πιο σημαντική η επιρροή (αύξηση) του στην τιμή του φάσματος πλάτους σε αυτές τις συχνότητες.

viii. **Σημαντική Ερώτηση 2:** Όσο ένας πόλος κινείται επάνω στον φανταστικό άξονα, επηρεάζει τις τιμές του φάσματος πλάτους στις συχνότητες $\omega = \pi/2$ (αν ο πόλος βρίσκεται στο θετικό φανταστικό ημιάξονα) και $\omega = -\pi/2$ (αν ο πόλος βρίσκεται στον αρνητικό φανταστικό ημιάξονα). Όσο πιο κοντά στο μοναδιαίο κύκλο βρίσκεται ο πόλος, τόσο πιο σημαντική η επιρροή (αύξηση) του στην τιμή του φάσματος πλάτους σε αυτές τις συχνότητες.

2. **Κατανόηση μιγαδικών πόλων**

i. Έστω το σύστημα

$$H(z) = \frac{1}{(1 - d_1 z^{-1})(1 - d_2 z^{-1})} \tag{72}$$

(α') Μόνο αν τα d_1, d_2 είναι πραγματικοί αριθμοί ή συζυγείς μιγαδικοί.

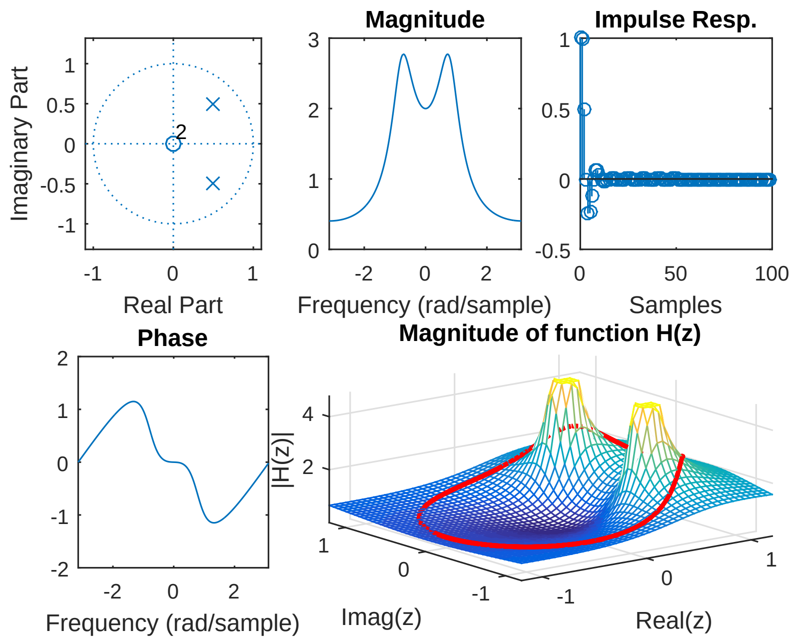
(β') Έστω δυο πόλοι,

$$d_1 = 0.7e^{j\pi/4}, \quad d_2 = 0.7e^{-j\pi/4} \tag{73}$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι $a_1 = 1, a_2 = 0.9899, a_3 = 0.49$.

(γ') `conv([1 -0.7*exp(j*pi/4)], [1 -0.7*exp(-j*pi/4)])`

(δ') `pezw(1, conv([1 -0.7*exp(1i*pi/4)],[1 -0.7*exp(-1i*pi/4)]))`
Το γράφημα φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

(ε') Η συνάρτηση γράφεται ως

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9899z^{-1} + 0.49z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - 0.9899z + 0.49} \tag{74}$$

οπου και βλέπουμε ότι έχει δυο μηδενικά στη θέση $z = 0$.

(ϛ') Στις συχνότητες των πόλων, $\omega = \pm\pi/4$.

(ζ') Απαντήθηκε.

(η') Είναι

$$H(z) = \frac{A}{1 - 0.7e^{j\pi/4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - 0.7e^{-j\pi/4}} \longleftrightarrow h[n] = A(0.7e^{j\pi/4})^n u[n] + B(0.7e^{-j\pi/4})^n u[n] \tag{75}$$

με

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4} \tag{76}$$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4} \tag{77}$$

που δίνουν

$$h[n] = \sqrt{2}(0.7)^n \cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{78}$$

(θ') Διότι η κρουστική απόκριση είναι ημιτονοειδούς μορφής.

ii. Έστω δυο νέοι πόλοι,

$$d_1 = 0.9e^{j\pi/4}, \quad d_2 = 0.9e^{-j\pi/4} \tag{79}$$

```
pezw(1, conv([1 -0.9*exp(1i*pi/4)],[1 -0.9*exp(-1i*pi/4)]))
```

Τώρα οι πόλοι βρίσκονται πιο κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, με αποτέλεσμα οι τιμές του φάσματος πλάτους στις συχνότητες $\omega = \pm\pi/4$ να είναι μεγαλύτερες από πριν, ενώ και η κλίση προς αυτές τις τιμές είναι μεγαλύτερη. Η κρουστική απόκριση σβήνει πιο αργά, εμφανίζοντας ταλαντώσεις για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Για τους πόλους

$$d_1 = 0.7e^{j3\pi/4}, \quad d_2 = 0.7e^{-j3\pi/4} \tag{80}$$

ισχύει η ίδια συζήτηση, μόνο που οι συχνότητες πλέον είναι $\omega = \pm 3\pi/4$.

iii. **Σημαντική Ερώτηση 3:** Το φάσμα πλάτους θα παρουσιάζει μέγιστα στις συχνότητες όπου βρίσκονται οι συζυγείς πόλοι. Όσο πιο κοντά στο μοναδιαίο κύκλο βρίσκονται οι πόλοι, τόσο μεγαλύτερες και πιο "αιχμηρές " θα είναι οι θέσεις των μεγίστων.

3. **Κατανόηση πόλων στο μηδέν**

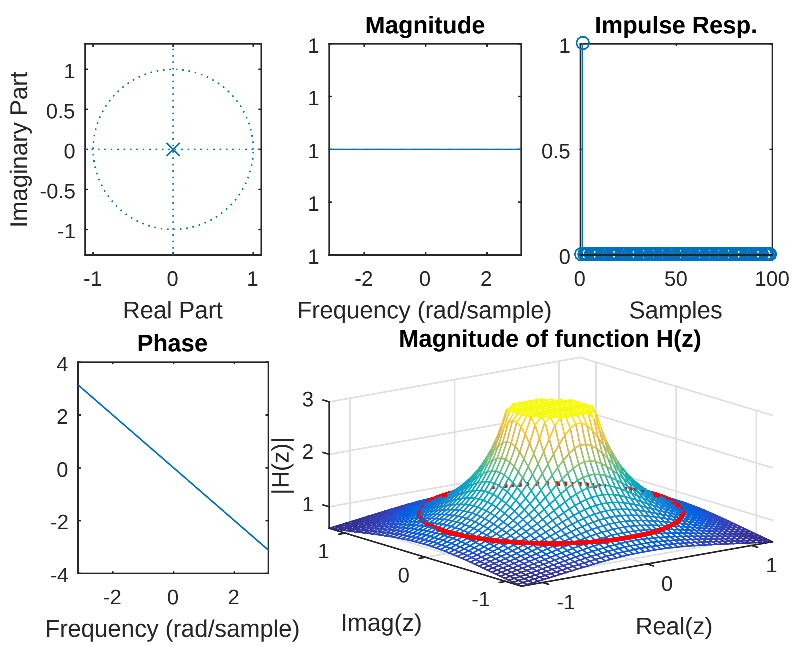
i. Η πιο απλή συνάρτηση με έναν πόλο στο μηδέν είναι η

$$H(z) = \frac{1}{z} = z^{-1} \tag{81}$$

και μπορούμε να την κατασκευάσουμε ως

```
pezw([0 1], 1)
```

Το γράφημα φαίνεται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2

(α) Το σήμα στο χρόνο είναι το $h[n] = \delta[n-1]$.

(β΄) Το φάσμα πλάτους είναι σταθερό και ίσο με τη μονάδα, αφού $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega} \Longrightarrow |H(e^{j\omega})| = 1$. Το φάσμα φάσης είναι γραμμικό, αφού $\phi_H(e^{j\omega}) = -\omega$. Τέλος, η κρουστική απόκριση είναι ίση με $h[n] = \delta[n-1]$ όπως αναμενόταν.

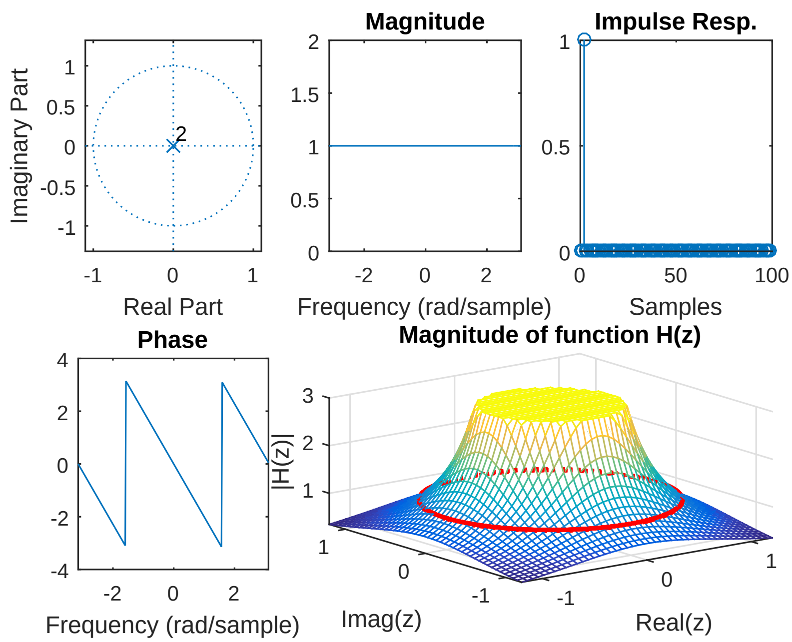
ii. Η πιο απλή συνάρτηση με δυο πόλους στο μηδέν είναι η

$$H(z) = \frac{1}{z^2} = z^{-2} \tag{82}$$

και μπορούμε να την κατασκευάσουμε ως

```
pezw([0 0 1], 1)
```

Το γράφημα φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3

(α΄) Το σήμα στο χρόνο είναι το $h[n] = \delta[n-2]$.

(β΄) Το φάσμα πλάτους είναι σταθερό και ίσο με τη μονάδα, αφού $H(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \Longrightarrow |H(e^{j\omega})| = 1$. Το φάσμα φάσης είναι γραμμικό, αφού $\phi_H(e^{j\omega}) = -2\omega$. Τέλος, η κρουστική απόκριση είναι ίση με $h[n] = \delta[n-2]$ όπως αναμενόταν.

(γ΄) Απαντήθηκε παραπάνω.

iii. Η πιο απλή συνάρτηση με τρεις πόλους στο μηδέν είναι η

$$H(z) = \frac{1}{z^3} = z^{-3} \tag{83}$$

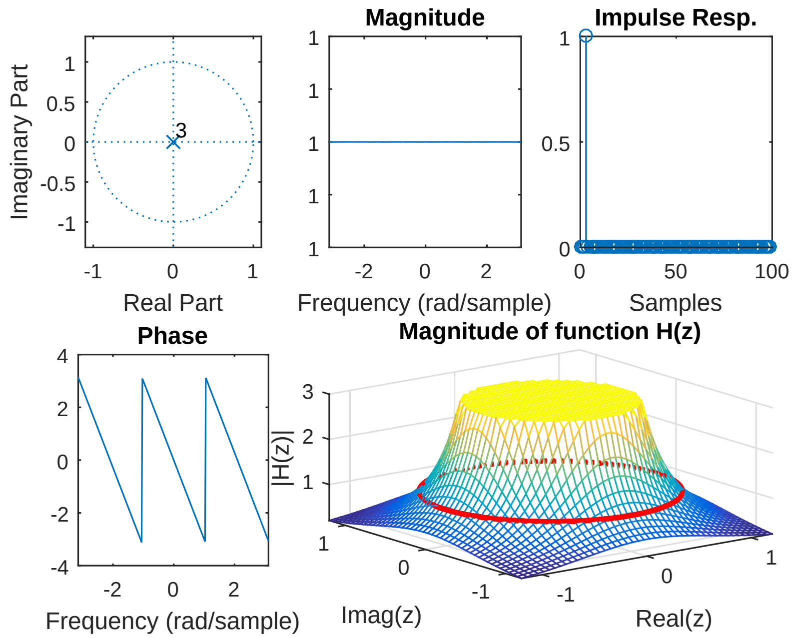
και μπορούμε να την κατασκευάσουμε ως

```
pezw([0 0 0 1], 1)
```

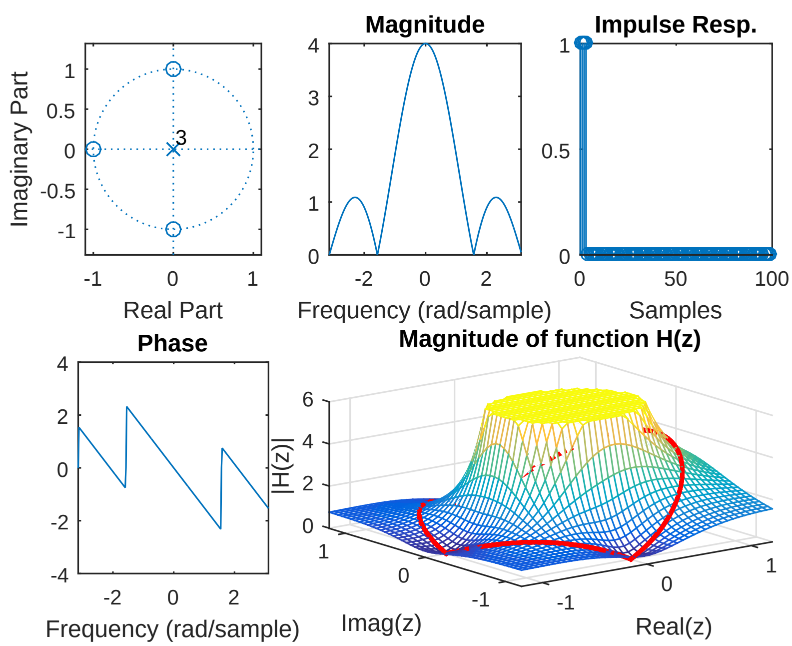
Το γράφημα φαίνεται στο Σχήμα 4.

iv. **Σημαντική Ερώτηση 4:** Όταν βάζουμε πόλους στο μηδέν σε ένα αιτιατό σύστημα, τότε μετατοπίζουμε την κρουστική του απόκριση κατά ένα δείγμα ανά πόλο τη φορά.

4. **Κατανόηση μηδενικών**



Σχήμα 4



Σχήμα 5

i. `pezw(conv(conv([1 1], [1 -j]),[1 j]),1)`
   Το γράφημα φαίνεται στο Σχήμα 5.
   (α΄) Η εξίσωση στο χώρο του Z είναι η

$$H(z) = A(1 + z^{-1})(1 - jz^{-1})(1 + jz^{-1}) \tag{84}$$

   (β΄) Γράφοντας την παραπάνω σχέση ως

$$H(z) = A\frac{(z+1)(z+j)(z-j)}{z^3} \tag{85}$$

παρατηρούμε ότι υπάρχουν τρεις πόλοι στη θέση $z = 0$.

(γ') Το σύστημα είναι χαμηλοπερατό.

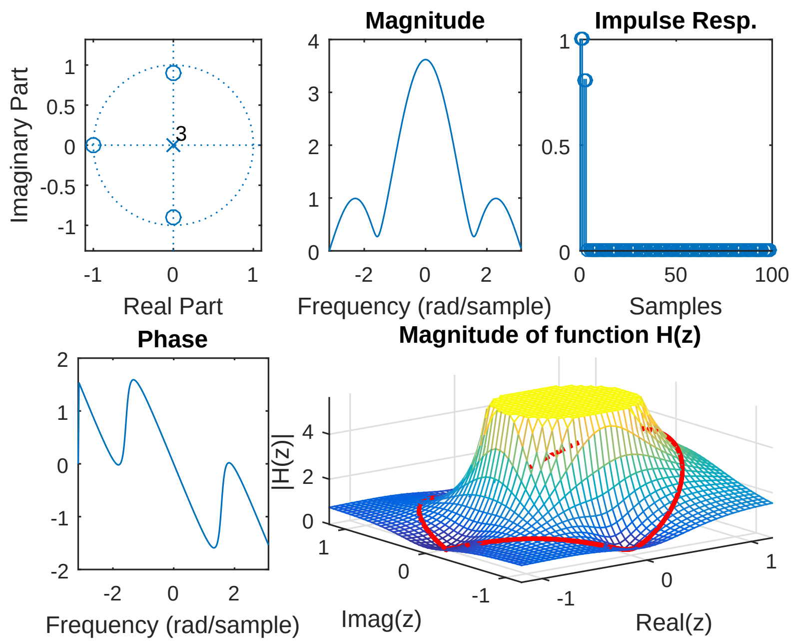
(δ') Στις συχνότητες όπου βρίσκονται τα μηδενικά, δηλ. $\omega = \pm\pi/2$ και $\omega = \pi$.

(ε') Η κλίση του είναι σταθερή, δηλ. το φάσμα φάσης είναι γραμμικό.

(ϛ') Η κρουστική απόκριση είναι

$$h[n] = A(\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]) \tag{86}$$

(ζ') `pezw(conv(conv([1 1], [1 -0.9*j]),[1 0.9*j]),1)`
Το γράφημα φαίνεται στο Σχήμα 6. Παρατηρούμε ότι πλέον οι συχνότητες $\omega = \pm\pi/2$ δε μη-



Σχήμα 6

δενίζονται ακριβώς, απλά το πλάτος τους μειώνεται σημαντικά. Επίσης, η κρουστική απόκριση αλλάζει σε σχέση με πριν, όπως και το φάσμα φάσης.

ii. **Σημαντική Ερώτηση 5:** Το φάσμα πλάτους χαμηλώνει σημαντικά τις τιμές του στις συχνότητες όπου υπάρχουν μηδενικά. Αν τα μηδενικά βρίσκονται επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, τότε η αντίστοιχη συχνότητα μηδενίζει το πλάτος της.