

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/10/2016

Ημερομηνία Παράδοσης: 11/10/2016

Άσκηση 1. Θεωρήστε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = (n + 1)a^n u[n]$$

με $|a| < 1$. Η βηματική απόκριση $s[n]$ ορίζεται ως η συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης με τη βηματική συνάρτηση $u[n]$, δηλ.

$$s[n] = h[n] * u[n]$$

Δείξτε ότι η βηματική απόκριση του παραπάνω συστήματος είναι

$$s[n] = \left[\frac{1}{(1-a)^2} - \frac{a^2}{(1-a)^2} a^n - \frac{a}{(1-a)} (n+2)a^n \right] u[n] \quad (1)$$

Βοήθεια: Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{k=0}^N (k+1)a^k = \frac{d}{da} \sum_{k=0}^{N+1} a^k$$

Άσκηση 2. Θεωρήστε τη διασύνδεση τεσσάρων ΓΧΑ συστημάτων, όπως στο Σχήμα 1. Οι κρουστικές αποκρίσεις δίνονται ως

$$h_1[n] = u[n]$$

$$h_2[n] = u[n+2] - u[n]$$

$$h_3[n] = \delta[n-2]$$

$$h_4[n] = a^n u[n]$$

Βρείτε τη συνολική κρουστική απόκριση του συστήματος, $h[n]$.

Άσκηση 3. Για τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα, δείξτε αν το σύστημα είναι (α) γραμμικό, (β) ευσταθές, (γ) αιτιατό, (δ) χρονικά αμετάβλητο.

i. $y[n] = 2x[n]u[n]$

ii. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k+2]$

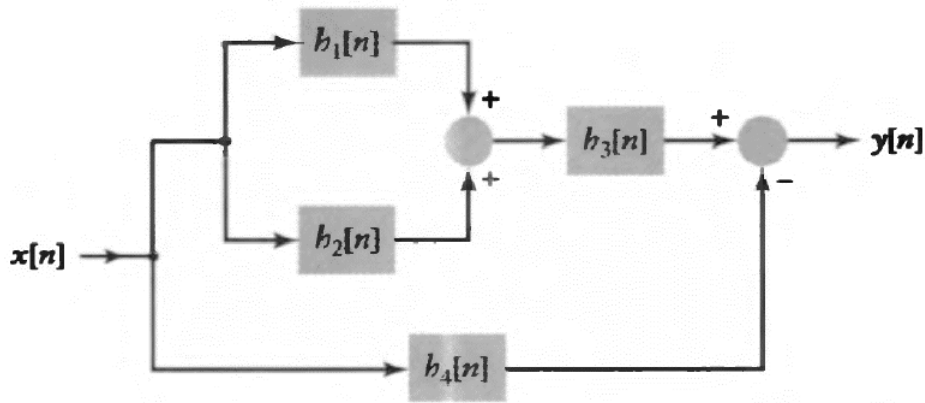
iii. $y[n] = \cos(2\pi x[n+1]) + x[n]$

Άσκηση 4. Βρείτε τη συνέλιξη των παρακάτω ζευγών σημάτων:

$$x[n] = u[n+3], \quad y[n] = u[n-3]$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n], \quad y[n] = u[n+2]$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2], \quad y[n] = \gamma^{|n|}$$



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 2.

Άσκηση 5. Για τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών που περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα, με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες και είσοδο $x[n]$

- i. $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n]$, $y[-1] = 3$, $x[n] = (-1/2)^n u[n]$
- ii. $y[n] - \frac{1}{9}y[n-2] = x[n-1]$, $y[-1] = 1$, $y[-2] = 0$, $x[n] = u[n]$

βρείτε την απόκριση μηδενικής εισόδου ($y_{zi}[n]$), την κρουστική απόκριση $h[n]$, και την απόκριση μηδενικής κατάστασης ($y_{zs}[n]$). Σχολιάστε την ευστάθειά τους. Γράψτε τη συνολική έξοδο $y[n]$ του συστήματος.

Άσκηση 6. Δίνεται η παρακάτω εξίσωση διαφορών ενός ΓΧΑ συστήματος

$$y[n] + 0.1y[n-1] - 0.06y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

- i. Είναι το σύστημα ευσταθές; Αιτιολογήστε.
- ii. Υπολογίστε την κρουστική απόκριση του συστήματος και σχεδιάστε τη για $n = 0, 1, 2, 3, 4$ στο χαρτί σας.
- iii. Δείξτε ότι το ΓΧΑ σύστημα

$$y[n] + 1.1y[n-1] - 0.26y[n-2] = x[n] - 2x[n-1]$$

είναι ασταθές και υπολογίστε την κρουστική απόκρισή του. Σχεδιάστε τη για $n = 0, 1, 2, 3, 4$ στο χαρτί σας.

- iv. Η συνάρτηση `filter` του MATLAB υλοποιεί ένα σύστημα σε μορφή εξίσωσης διαφορών

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l x[n-l]$$

ως εξής:

$$y = \text{filter}(b, a, x);$$

όπου b είναι ένα διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του δεξιού μέλους της εξίσωσης διαφορών (εισόδου), a είναι ένα διάνυσμα που περιέχει τους συντελεστές του αριστερού μέλους της εξίσωσης διαφορών (εξόδου), και x είναι το σήμα εισόδου του συστήματος. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση αυτή, υπολογίστε την έξοδο για καθένα από τα παραπάνω δυο συστήματα όταν η είσοδος είναι της μορφής

$$x[n] = 2u[n]$$

για $n = 0, \dots, 10$. Σχεδιάστε με την εντολή `stem` τις εξόδους των δυο συστημάτων. Τι παρατηρείτε; Παραδώστε τις δυο γραφικές παραστάσεις.