ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/10/2016 Ημερομηνία Παράδοσης: 11/10/2016

Άσκηση 1. Έχουμε

$$s[n] = h[n] * u[n] \tag{1}$$
$$= \begin{cases} \sum_{k=0}^{n}(k+1)a^k, & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{2}$$

Γνωρίζοντας οτι

$$\sum_{k=0}^{N}(k+1)a^k = \frac{d}{da}\sum_{k=0}^{N+1}a^k = \frac{d}{da}\Big[\frac{1-a^{n+2}}{1-a}\Big], \tag{3}$$

τότε έχουμε

$$s[n] = \frac{d}{da}\Big(\frac{1-a^{n+2}}{1-a}\Big) \tag{4}$$
$$= \frac{(1-a^{n+2})'(1-a) - (1-a)'(1-a^{n+2})}{(1-a)^2} \tag{5}$$
$$= \frac{-(n+2)a^{n+1}(1-a) + (1-a^{n+2})}{(1-a)^2} \tag{6}$$
$$= \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{a^2}{(1-a)^2}a^n - \frac{a}{(1-a)}(n+2)a^n, \;\; n \geq 0 \tag{7}$$

Άρα

$$s[n] = \Big[\frac{1}{(1-a)^2} - \frac{a^2}{(1-a)^2}a^n - \frac{a}{(1-a)}(n+2)a^n\Big]u[n] \tag{8}$$

Άσκηση 2. Πρώτα παράγουμε μία έκφραση για τη συνολική κρουστική απόκριση σε σχέση με την κρουστική απόκριση του κάθε συστήματος. Από τον παράλληλο συνδυασμό των $h_1[n]$ και $h_2[n]$ προκύπτει $h_{12}[n] = h_1[n] + h_2[n]$. Το σύστημα είναι σε σειρά με την $h_3[n]$, άρα το σύστημα του επάνω σκέλους έχει την κρουστική απόκριση $h_{123}[n] = h_{12}[n] * h_3[n]$. Αντικαθιστώντας το h_{12} έχουμε $h_{123}[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n]$. Τέλος, το επάνω σκέλος είναι παράλληλο στο κάτω $h_4[n]$, άρα

$$h[n] = h_{123}[n] - h_4[n] = (h_1[n] + h_2[n]) * h_3[n] - h_4[n]$$

Αντικαθιστώντας τις $h_1[n]$ και $h_2[n]$ έχουμε

$$h_{12}[n] = u[n] + u[n+2] - u[n] = u[n+2]$$

Η συνέλιξη της $h_{12}[n]$ με την $h_3[n]$ μας δίνει

$$h_{123}[n] = u[n+2] * \delta[n-2] = u[n]$$

Τελικά, προσθέτουμε τις $h_{123}[n]$ και $-h_4[n]$ για να αποκτήσουμε την συνολική κρουστική απόκριση:

$$h[n] = \{1 - a^n\}u[n].$$

Άσκηση 3.

i.
- Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο

$$y_1[n] = 2x_1[n]u[n]$$

Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος είναι

$$y_2[n] = 2x_2[n]u[n]$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = 2(ax_1[n] + bx_2[n])u[n] = 2ax_1[n]u[n] + 2bx_2[n]u[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- Ευστάθεια: αν $|x[n]| < B_x$, τότε $|y[n]| = 2|x[n]||u[n]| < 2B_x|u[n]| \leq 2B_x$, αρα το σύστημα είναι ευσταθές.
- Αιτιατότητα: η έξοδος εξαρτάται μόνο από τρέχουσες χρονικές στιγμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι αιτιατό.
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x_1[n] = x[n - n_0]$, η έξοδος θα είναι

$$y[n] = 2x[n - n_0]u[n]$$

Η έξοδος για $n := n - n_0$ είναι

$$y[n - n_0] = 2x[n - n_0]u[n - n_0] \neq 2x[n - n_0]u[n]$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά μεταβλητό.

ii.
- Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k+2]$$

Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος είναι

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k+2]$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[k+2] + bx_2[k+2]) = a\sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k+2] + b\sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k+2] = ay_1[n] + by_2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι γραμμικό.

- Ευστάθεια: αν $|x[n]| < B_x$, τότε $|y[n]| = \left|\sum_{k=-\infty}^{n} x[k+2]\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{n} |x[k+2]| < \sum_{k=-\infty}^{n} B_x \to \infty$, αρα το σύστημα είναι ασταθές.
- Αιτιατότητα: η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές χρονικές στιγμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι μη αιτιατό.

- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$, η έξοδος θα είναι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0+2]$$

Η έξοδος για $n := n - n_0$ είναι

$$y[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k+2] = \sum_{k=-\infty}^{u} x[u-n_0+2]$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά αμεταβλητό.

iii.
- Γραμμικότητα: Για είσοδο $x_1[n]$ έχουμε έξοδο $y_1[n] = \cos(2\pi x_1[n+1]) + x_1[n]$. Για είσοδο $x_2[n]$, η έξοδος είναι

$$y_2[n] = \cos(2\pi x_2[n+1]) + x_2[n]$$

Για είσοδο $ax_1[n] + bx_2[n]$ η έξοδος είναι

$$y[n] = \cos(2\pi(ax_1[n+1] + bx_2[n+1])) + (ax_1[n] + bx_2[n]) \neq ay_1[n] + by_2[n]$$

Άρα το σύστημα είναι μη-γραμμικό.

- Ευστάθεια: αν $|x[n]| < B_x$, τότε

$$|y[n]| = |\cos(2\pi x[n+1]) + x[n]| \leq |\cos(2\pi x[n+1])| + |x[n]| \leq 1 + |x[n]| < 1 + B_x$$

αρα το σύστημα είναι ευσταθές.

- Αιτιατότητα: η έξοδος εξαρτάται από μελλοντικές χρονικές στιγμές της εισόδου, άρα το σύστημα είναι μη αιτιατό.
- Χρονική Αμεταβλητότητα: για είσοδο $x_1[n] = x[n-n_0]$, η έξοδος θα είναι

$$y[n] = \cos(2\pi x[n-n_0+1]) + x[n-n_0]$$

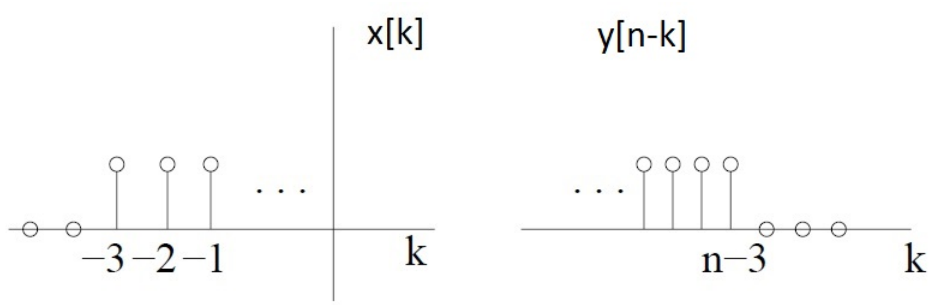
Η έξοδος για $n := n - n_0$ είναι

$$y[n-n_0] = \cos(2\pi x[n-n_0+1]) + x[n-n_0]$$

άρα το σύστημα είναι χρονικά αμεταβλητό.

Άσκηση 4.

1. $x[n] = u[n+3], \quad y[n] = u[n-3]$



Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 4.1

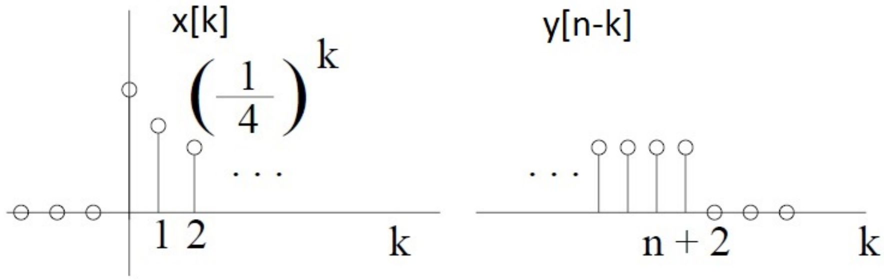
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Για $n-3 < -3 \iff n < 0$, $y[n] = 0$.

Για $n-3 \geq -3 \iff n \geq 0$, $y[n] = \sum_{k=-3}^{n-3} 1 = (n-3-(-3)+1) = n+1$. Άρα

$$y[n] = \begin{cases} n+1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

2. $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n], \quad y[n] = u[n+2]$



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 4.2

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Για $n+2 < 0 \iff n < -2$, $y[n] = 0$.
Για $n+2 \geq 0 \iff n \geq -2$,

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n+2} \left(\frac{1}{4}\right)^k \tag{9}$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^n \tag{10}$$

Άρα

$$y[n] = \begin{cases} \frac{4}{3} - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^n & n \geq -2 \\ 0 & n < -2 \end{cases}$$

3. $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2], \quad y[n] = \gamma^{|n|}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Για $n+2 \leq 0 \iff n \leq -2$, έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \gamma^{-k} \tag{11}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{n+2} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-k} \tag{12}$$

$$\tag{13}$$

Έστω $l = -k$, τότε

$$y[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{l=-(n+2)}^{\infty} \Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^l \tag{14}$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-(n+2)}}{1-\frac{\gamma}{2}} \tag{15}$$

$$= \Big(\frac{2}{\gamma}\Big)^2 \frac{\Big(\frac{1}{\gamma}\Big)^n}{1-\frac{\gamma}{2}} \tag{16}$$

για $|\gamma| < 2$.

Για $n+2 \geq 0 \iff n > -2$, έχουμε

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k} \gamma^{-k} + \sum_{k=1}^{n+2} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k} \gamma^k \tag{17}$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=-\infty}^{0} \Big(\frac{\gamma}{2}\Big)^{-k} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=1}^{n+2} \Big(2\gamma\Big)^k \tag{18}$$

$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \Big[\frac{1}{1-\dfrac{\gamma}{2}} + \Big(\frac{1-(2\gamma)^{n+3}}{1-2\gamma} - 1\Big)\Big] \tag{19}$$

για $|\gamma| < 2$.

Άσκηση 5.

i. Η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται βρίσκοντας αρχικά τις χαρακτηριστικές ρίζες του πολυωνύμου

$$\gamma - \frac{1}{2} = 0 \iff \gamma = \frac{1}{2} \tag{20}$$

Άρα λοιπόν υπάρχει μια χαρακτηριστική ρίζα, και άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής

$$y_{zi}[n] = c\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] \tag{21}$$

με τη σταθερά c να δίνεται ως

$$y[-1] = 3 = y_{zi}[-1] = 2c = 3 \iff c = \frac{3}{2} \tag{22}$$

και τελικά

$$y_{zi}[n] = \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] \tag{23}$$

Η κρουστική απόκριση είναι και αυτή της μορφής

$$h[n] = d\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] \tag{24}$$

με τη σταθερά d να δίνεται θέτοντας $x[n] = \delta[n]$ στην εξίσωση διαφορών και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τότε

$$h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = 2\delta[n] \tag{25}$$

και για $n = 0$ έχουμε

$$h[0] - \frac{1}{2}h[-1] = 2 \iff h[0] = 2 \iff d = 2 \tag{26}$$

οπότε τελικά
$$h[n] = 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] \tag{27}$$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται ως

$$y_{zs}[n] = x[n] * h[n] = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n u[n] * 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n u[n] \tag{28}$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k u[k]\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k} u[n-k] = 2\sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-k} \tag{29}$$
$$= 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k\Big(\frac{1}{2}\Big)^{-k} = 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k\Big(\frac{1}{2}\Big)^{-k} \tag{30}$$
$$= 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{n}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^k 2^k = 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \tag{31}$$
$$= 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^n \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n (1-(-1)^{n+1}),\ \ n \geq 0 \tag{32}$$

Άρα
$$y_{zs}[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n (1-(-1)^{n+1})u[n] \tag{33}$$

Η συνολική έξοδος είναι

$$y_{total}[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \left(\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + \Big(\frac{1}{2}\Big)^n(1-(-1)^{n+1})\right)u[n] \tag{34}$$
$$= \left(\frac{5}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^n + \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n\right)u[n] \tag{35}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές, αφού οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι μικρότερες της μονάδες κατ' απόλυτη τιμή.

ii. Η απόκριση μηδενικής εισόδου δίνεται βρίσκοντας αρχικά τις χαρακτηριστικές ρίζες του πολυωνύμου

$$\gamma^2 - \frac{1}{9} = 0 \Longleftrightarrow \gamma = \pm\frac{1}{3} \tag{36}$$

Άρα λοιπόν υπάρχει δυο χαρακτηριστικές ρίζες, και άρα η απόκριση μηδενικής εισόδου θα είναι της μορφής
$$y_{zi}[n] = \left(c_1\Big(\frac{1}{3}\Big)^n + c_2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\right)u[n] \tag{37}$$
με τις σταθερές c_1, c_2 να δίνονται ως η λύση του συστήματος

$$y[-1] = 1 = y_{zi}[-1] = 3c_1 - 3c_2 = 1 \tag{38}$$
$$y[-2] = 0 = y_{zi}[-2] = 9c_1 + 9c_2 = 0 \tag{39}$$

Η λύση είναι
$$c_1 = \frac{1}{6},\ \ c_2 = -\frac{1}{6} \tag{40}$$

και τελικά
$$y_{zi}[n] = \left(\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n - \frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\right)u[n] \tag{41}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος

$$y[n] - \frac{1}{9}y[n-2] = x[n] \tag{42}$$

είναι της μορφής

$$h_o[n] = \Big(d_1\Big(\frac{1}{3}\Big)^n + d_2\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big)u[n] \tag{43}$$

με τις σταθερές d_1, d_2 να δίνονται θέτοντας $x[n] = \delta[n]$ στην εξίσωση διαφορών και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τότε

$$h_o[n] - \frac{1}{9}h_o[n-2] = \delta[n] \tag{44}$$

και για $n = 0, 1$ έχουμε

$$h_o[0] - \frac{1}{9}h_o[-2] = \delta[0] = 1 \Longleftrightarrow h_o[0] = d_1 + d_2 = 1 \tag{45}$$

$$h_o[1] - \frac{1}{9}h_o[-1] = \delta[1] = 0 \Longleftrightarrow h_o[1] = \frac{1}{3}d_1 - \frac{1}{3}d_2 = 0 \tag{46}$$

Το σύστημα αυτό δίνει λύση

$$d_1 = d_2 = \frac{1}{2} \tag{47}$$

Άρα η κρουστική απόκριση του συστήματος της Σχέσης (42) είναι

$$h_o[n] = \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big)u[n] \tag{48}$$

Οπότε η κρουστική απόκριση του ζητούμενου συστήματος είναι

$$h[n] = h_o[n-1] = \Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1} + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n-1}\Big)u[n-1] \tag{49}$$

Η απόκριση μηδενικής κατάστασης δίνεται ως

$$\begin{aligned}
y_{zs}[n] = x[n] * h[n] = u[n] * \Bigg(\Big(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n-1} + \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n-1}\Big)u[n-1]\Bigg) && (50)\\
= \frac{9}{4}\Big(\frac{1}{3} - \Big(\frac{1}{3}\Big)^{n+1}\Bigg) - \frac{9}{8}\Big(-\frac{1}{3} - \Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n+1}\Big) && (51)\\
= \frac{27}{24} - \frac{9}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n+1} + \frac{9}{8}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n+1}, \; n \geq 1 && (52)\\
= \Bigg(\frac{27}{24} - \frac{9}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n+1} + \frac{9}{8}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n+1}\Bigg)u[n-1] && (53)
\end{aligned}$$

μετά από πράξεις. Άρα

$$y_{zs}[n] = \Bigg(\frac{27}{24} - \frac{9}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n+1} + \frac{9}{8}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n+1}\Bigg)u[n-1] \tag{54}$$

Η συνολική έξοδος είναι

$$y_{total}[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \Big(\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{3}\Big)^n - \frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\Big)u[n] + \Bigg(\frac{27}{24} - \frac{9}{4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{n+1} + \frac{9}{8}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^{n+1}\Bigg)u[n-1] \tag{55}$$

Το σύστημα είναι ευσταθές, αφού οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι μικρότερες της μονάδες κατ' απόλυτη τιμή.

Άσκηση 6.

i. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\gamma^2 + 0.1\gamma - 0.06 = 0 \tag{56}$$

και οι ρίζες του είναι οι $\gamma_1 = -3/10$ και $\gamma_2 = 1/5$, οι οποίες είναι μικρότερες της μονάδας, άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

ii. Θεωρούμε το σύστημα

$$y[n] + 0.1y[n-1] - 0.06y[n-2] = x[n] \tag{57}$$

και θέτουμε στην είσοδό του το σήμα $x[n] = \delta[n]$, υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τότε

$$h[n] + 0.1h[n-1] - 0.06h[n-2] = \delta[n] \tag{58}$$

Για $n = 0$, έχουμε

$$h[0] + 0.1h[-1] - 0.06h[-2] = \delta[0] = 1 \tag{59}$$
$$h[0] = 1 \tag{60}$$

ενώ για $n = 1$ έχουμε

$$h[1] + 0.1h[0] - 0.06h[-1] = \delta[1] = 0 \tag{61}$$
$$h[1] = -0.1 \tag{62}$$

Η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h_o[n] = d_1\Big(-\frac{3}{10}\Big)^n + d_2\Big(\frac{1}{5}\Big)^n,\ \ n \geq 0 \tag{63}$$

Για $n = 0, n = 1$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$h_o[0] = d_1 + d_2 = 1 \tag{64}$$
$$h_o[1] = -\frac{3}{10}d_1 + \frac{1}{5}d_2 = -0.1 \tag{65}$$

Η λύση του συστήματος δίνει

$$d_1 = \frac{3}{5} \quad d_2 = \frac{2}{5} \tag{66}$$

Άρα η κρουστική απόκριση του συστήματος της Σχέσης (57) είναι

$$h_o[n] = \Big(\frac{3}{5}\Big(-\frac{3}{10}\Big)^n + \frac{2}{5}\Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big)u[n] \tag{67}$$

Η κρουστική απόκριση του ζητούμενου συστήματος θα είναι

$$h[n] = h_o[n] - 2h_o[n-1] \tag{68}$$
$$= \Big(\frac{3}{5}\Big(-\frac{3}{10}\Big)^n + \frac{2}{5}\Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big)u[n] - 2\Big(\frac{3}{5}\Big(-\frac{3}{10}\Big)^{n-1} + \frac{2}{5}\Big(\frac{1}{5}\Big)^{n-1}\Big)u[n-1] \tag{69}$$
$$= \Big(\frac{3}{5}\Big(-\frac{3}{10}\Big)^n + \frac{2}{5}\Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big)u[n] - \Big(\frac{6}{5}\Big(-\frac{3}{10}\Big)^{n-1} + \frac{4}{5}\Big(\frac{1}{5}\Big)^{n-1}\Big)u[n-1] \tag{70}$$

Για $n = 0, 1, 2, 3, 4$ οι τιμές της κρουστικής απόκρισης είναι

$$h[0] = 1 \tag{71}$$
$$h[1] = -21/10 \tag{72}$$
$$h[2] = 27/100 \tag{73}$$
$$h[3] = -153/1000 \tag{74}$$
$$h[4] = 315/10000 \tag{75}$$

iii. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι της μορφής

$$\gamma^2 + 1.1\gamma - 0.26 = 0 \tag{76}$$

και οι ρίζες του είναι οι $\gamma_1 = -13/10$ και $\gamma_2 = 1/5$, και η γ_1 είναι μεγαλύτερη της μονάδας κατ' απόλυτη τιμή, άρα το σύστημα είναι ασταθές. Θεωρούμε το σύστημα

$$y[n] + 1.1y[n-1] - 0.26y[n-2] = x[n] \tag{77}$$

και θέτουμε στην είσοδό του το σήμα $x[n] = \delta[n]$, υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες. Τότε

$$h[n] + 1.1h[n-1] - 0.26h[n-2] = \delta[n] \tag{78}$$

Για $n = 0$, έχουμε

$$h[0] + 1.1h[-1] - 0.26h[-2] = \delta[0] = 1 \tag{79}$$
$$h[0] = 1 \tag{80}$$

ενώ για $n = 1$ έχουμε

$$h[1] + 1.1h[0] - 0.26h[-1] = \delta[1] = 0 \tag{81}$$
$$h[1] = -1.1 \tag{82}$$

Η κρουστική απόκριση είναι της μορφής

$$h_o[n] = d_1\Big(-\frac{13}{10}\Big)^n + d_2\Big(\frac{1}{5}\Big)^n, \;\; n \geq 0 \tag{83}$$

Για $n = 0, n = 1$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$h_o[0] = d_1 + d_2 = 1 \tag{84}$$
$$h_o[1] = -\frac{13}{10}d_1 + \frac{1}{5}d_2 = -1.1 \tag{85}$$

Η λύση του συστήματος δίνει

$$d_1 = \frac{13}{15} \quad d_2 = \frac{2}{15} \tag{86}$$

Άρα η κρουστική απόκριση του συστήματος της Σχέσης (77) είναι

$$h_o[n] = \Big(\frac{13}{15}\Big(-\frac{13}{10}\Big)^n + \frac{2}{15}\Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big)u[n] \tag{87}$$

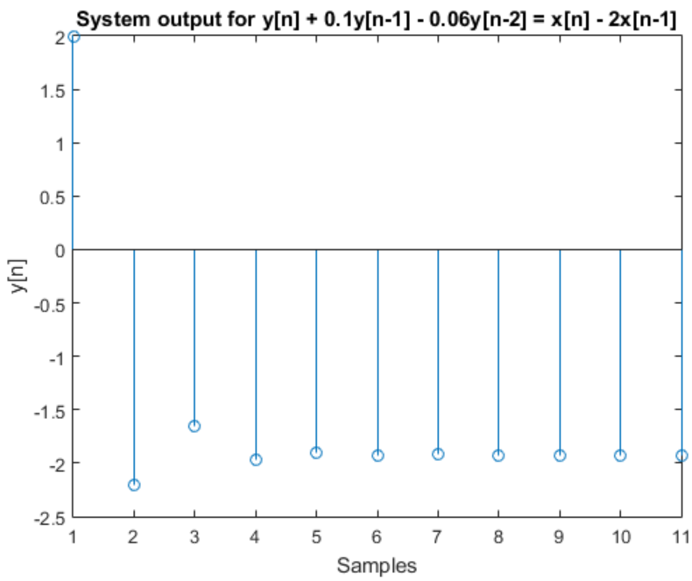
Η κρουστική απόκριση του ζητούμενου συστήματος θα είναι

$$h[n] = h_o[n] - 2h_o[n-1] \tag{88}$$
$$= \Big(\frac{13}{15}\Big(-\frac{13}{10}\Big)^n + \frac{2}{15}\Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big)u[n] - 2\Big(\frac{13}{15}\Big(-\frac{13}{10}\Big)^{n-1} + \frac{2}{15}\Big(\frac{1}{5}\Big)^{n-1}\Big)u[n-1] \tag{89}$$
$$= \Big(\frac{13}{15}\Big(-\frac{13}{10}\Big)^n + \frac{2}{15}\Big(\frac{1}{5}\Big)^n\Big)u[n] - \Big(\frac{26}{15}\Big(-\frac{13}{10}\Big)^{n-1} + \frac{4}{15}\Big(\frac{1}{5}\Big)^{n-1}\Big)u[n-1] \tag{90}$$

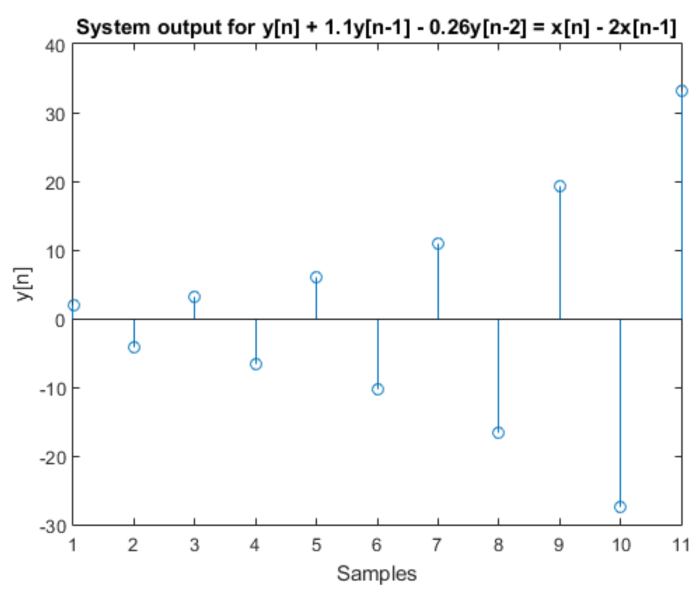
Για $n = 0, 1, 2, 3, 4$ οι τιμές της κρουστικής απόκρισης είναι

$$h[0] = 1 \tag{91}$$
$$h[1] = -31/10 \tag{92}$$
$$h[2] = 367/100 \tag{93}$$
$$h[3] = -4843/1000 \tag{94}$$
$$h[4] = 6282/1000 \tag{95}$$

iv. Μετά από την εκτέλεση της συνάρτησης filter, η έξοδος που παίρνουμε για τα δυο συστήματα, για είσοδο $x[n] = 2u[n]$, με $n = 0, 1, \cdots, 10$, φαίνεται στα Σχήματα 3, 4. Παρατηρούμε ότι πράγματι η έξοδος του πρώτου συστήματος μένει σταθερή όσο το $n \to \infty$, πράγμα που αναμενόταν από ένα ευσταθές σύστημα, ενώ αντίθετα η έξοδος του δεύτερου συστήματος μεγαλώνει χωρίς όριο όσο το $n \to \infty$, πράγμα που επίσης αναμενόταν από ένα ασταθές σύστημα.



Σχήμα 3



Σχήμα 4