

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τρίτο Φροντιστήριο

Άσκηση 1.

Για καθένα από τα παρακάτω συστήματα, βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του αντιστρόφου συστήματος, και βρείτε αν το αντίστροφο σύστημα μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό ταυτόχρονα.

(α) $H(z) = \frac{z^2 - \frac{81}{100}}{z^2 - 1}$

(β) $h[n] = 24\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-1] - 30\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

(γ) $y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = 6x[n] - 7x[n-1] + 3x[n-2]$

Λύση:

(α) Το αντίστροφο σύστημα είναι

$$H_{inv}(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 - \frac{81}{100}} \quad (1)$$

με πόλους στις θέσεις $z = \pm 9/10$ και μηδενικά στις θέσεις $z = \pm 1$. Οι πόλοι και τα μηδενικά βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου και άρα το αντίστροφο σύστημα μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.

(β) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{2(z + \frac{1}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})} \quad (2)$$

και άρα το αντίστροφο σύστημα είναι

$$H_{inv}(z) = \frac{(z - \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})}{2(z + \frac{1}{2})} \quad (3)$$

Υπάρχει ένας πόλος στο $z = -\frac{1}{2}$ και ένας πόλος στο $z = \infty$, οπότε το αντίστροφο σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές και αιτιατό.

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{6z^2 + 7z + 3}{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})} \quad (4)$$

και το αντίστροφο είναι

$$H_{inv}(z) = \frac{(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{2})}{6z^2 + 7z + 3} \quad (5)$$

Οι πόλοι του βρίσκονται στις θέσεις $z = \frac{7 \pm j\sqrt{23}}{12}$, και βρίσκονται εντός μοναδιαίου κύκλου. Άρα το αντίστροφο σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό.

Άσκηση 2.

Σχεδιάστε την απόκριση πλάτους για το παρακάτω σύστημα

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \frac{49}{64}z^{-2}} \quad (6)$$

Λύση:

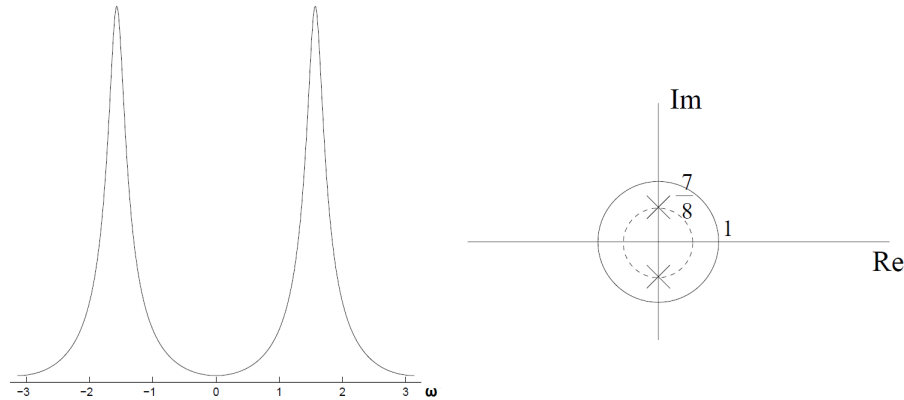
Η συνάρτηση μεταφοράς γράφεται ως

$$H(z) = \frac{z^{-2}}{(1 + j\frac{7}{8}z^{-1})(1 - j\frac{7}{8}z^{-1})} = \frac{1}{(z + j\frac{7}{8})(z - j\frac{7}{8})} \quad (7)$$

και η απόκριση πλάτους είναι

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{(e^{j\omega} + \frac{7}{8}e^{j\pi/2})(e^{j\omega} + \frac{7}{8}e^{-j\pi/2})} \quad (8)$$

Η γραφική της παράσταση και το διάγραμμα πόλων-μηδενικών φαίνονται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Γραφική παράσταση Άσκησης 2.

Άσκηση 3.

Η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης δυο πραγματικών σημάτων $x[n]$ και $y[n]$ δίνεται από τη σχέση

$$r_{xy}[n] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]y[n+l] \quad (9)$$

(α') Εκφράστε την $r_{xy}[n]$ ως συνέλιξη δυο σημάτων.

(β') Βρείτε το μετασχ. Ζ της ετεροσυσχέτισης ως συνάρτηση των μετασχ. Ζ των $x[n], y[n]$.

Λύση:

(α') Έστω $\hat{y}[n] = y[-n]$, και η συνέλιξη των $x[n], \hat{y}[n]$ δίνει

$$x[n] * \hat{y}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\hat{y}[n-k] \quad (10)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]y[n+l] \quad \text{θέσαμε } l = -k \quad (11)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x[l]y[n+l] \quad (12)$$

$$= r_{xy}[n] \quad (13)$$

(β') Είναι

$$x[n] * y[-n] \longleftrightarrow X(z)Y(z^{-1}) = X(z)Y\left(\frac{1}{z}\right) = R_{xy}(z) \quad (14)$$

Άσκηση 4.

Ένα σήμα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς έχει άρτια συμμετρία, δηλ. $x[n] = x[-n]$.

(α) Τι περιορισμούς έχουν οι πόλοι του σήματος αυτού;

(β) Δείξτε ότι ο μετασχ. Z αντιστοιχεί στην κρουστική απόκριση ενός ευσταθούς συστήματος αν και μόνο αν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad (15)$$

Λύση:

(α) Είναι

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) \quad (16)$$

$$x[-n] \longleftrightarrow X(z^{-1}) \quad (17)$$

$$x[n] = x[-n] \longleftrightarrow X(z) = X(z^{-1}) \quad (18)$$

Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχει ένας πόλος στη θέση $z = z_0$, θα υπάρχει υποχρεωτικά και ένας πόλος στη θέση $z = \frac{1}{z_0}$. Άρα οι πόλοι έρχονται σε αμοιβαίες θέσεις.

(β) Οι πόλοι θα είναι της μορφής

$$(z_0, 1/z_0) = (r_0 e^{j\theta_0}, 1/r_0 e^{j\theta_0}) \quad (19)$$

Αν το z_0 είναι εντός μοναδιαίου κύκλου, τότε ο μετασχ. Z που αντιστοιχεί σε αυτό θα δίνει ευσταθές και δεξιόπλευρο σήμα. Όμως το $1/z_0$ θα είναι εκτός μοναδιαίου κύκλου, οπότε ο μετασχ. Z που αντιστοιχεί σε αυτό θα δίνει είτε δεξιόπλευρο και ασταθές σήμα, είτε αριστερόπλευρο και ευσταθές σήμα. Για τη σύγκλιση, το πεδίο πρέπει να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, που σημαίνει ότι πρέπει το σήμα να είναι αριστερόπλευρο και ευσταθές. Άρα τα επιμέρους σήματα φθίνουν στο μηδέν όσο $n \rightarrow \pm\infty$, που σημαίνει ότι είναι ευσταθή, και άρα το συνολικό σήμα είναι ευσταθές και άρα ισχύει ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad (20)$$

Άσκηση 5.

Έστω ότι

$$H(z) = F(z)(z - a) \quad (21)$$

$$G(z) = F(z)(1 - az) \quad (22)$$

με $0 < a < 1$ πραγματικό.

(α) Δείξτε ότι $|G(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|$.

(β) Δείξτε ότι $g[n] = h[n] * v[n]$ με

$$V(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (23)$$

(γ) Μια μετρική της μέσης καθυστέρησης που εισάγει ένα αιτιατό σύστημα δίνεται από την κανονικοποιημένη ροπή πρώτης τάξης,

$$d = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} k v^2[k]}{\sum_{k=0}^{+\infty} v^2[k]} \quad (24)$$

Υπολογίστε τη μέση καθυστέρηση που δίνεται από το σύστημα $V(z)$.

Λύση:

(α') Είναι

$$G(z) = H(z) \frac{1 - az}{z - a} \quad (25)$$

$$|G(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})| \left| \frac{1 - ae^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} \right| \quad (26)$$

$$= |H(e^{j\omega})| \quad (27)$$

αφού το σύστημα

$$\left| \frac{1 - ae^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} \right| = 1 \quad (28)$$

(β') Είναι

$$G(z) = H(z)V(z) = F(z)(z - a) \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (29)$$

$$F(z)(1 - az) = F(z)(z - a) \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (30)$$

$$(1 - az) = (z - a) \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad (31)$$

$$(1 - az)(1 - az^{-1}) = (z - a)(z^{-1} - a) \quad (32)$$

$$1 - az^{-1} - az + a^2 = 1 - az - az^{-1} + a^2 \quad (33)$$

που είναι αληθές, άρα πράγματι $G(z) = H(z)V(z)$ και άρα $g[n] = h[n] * v[n]$.

(γ') Έχουμε

$$V(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \longleftrightarrow v[n] = a^{n-1}u[n-1] - a^{n+1}u[n] \quad (34)$$

Για $k = 0$, έχουμε

$$v[0] = -a, \quad v^2[0] = a^2 \quad (35)$$

και για $k \geq 1$, έχουμε

$$v[k] = a^{k-1} - a^{k+1} \quad (36)$$

$$v^2[k] = a^{2k}(a^{-2} + a^2 - 2) \quad (37)$$

Οπότε

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kv^2[k] = (a^{-2} + a^2 - 2) \sum_{k=0}^{+\infty} k(a^2)^k = \frac{1 + a^4 - 2a^2}{1 - a^4} \quad (38)$$

και

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v^2[k] = a^2 + (a^{-2} + a^2 - 2) \sum_{k=1}^{+\infty} (a^2)^k = a^2 + \frac{1 + a^4 - 2a^2}{1 - a^2} = 1 \quad (39)$$

Άρα τελικά

$$d = \frac{1 + a^4 - 2a^2}{1 - a^4} \quad (40)$$