

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2016
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Δεύτερο Φροντιστήριο

Άσκηση 1. Να βρεθεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του μετασχηματισμού Z του σήματος

$$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (1)$$

με $a > 0$.

Λύση:
Ο μετασχ. Z του σήματος είναι

$$X(z) = \sum_{n=0}^{M-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^M}{1 - az^{-1}} = \frac{z^M - a^M}{z^{M-1}(z - a)} \quad (2)$$

Τα μηδενικά βρίσκονται ως εξής:

$$z^M = a^M \quad (3)$$

$$(re^{j\theta})^M = |a|^M e^{j2\pi k}, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (4)$$

$$r^M e^{j\theta M} = |a|^M e^{j2\pi k}, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (5)$$

$$r = |a|, \quad \theta = 2\pi k/M, \quad k = 0, \dots, M-1 \quad (6)$$

Άρα τα μηδενικά βρίσκονται στις θέσεις $z = |a|e^{j2\pi k/M}$, $k = 0, \dots, M-1$, και είναι M το πλήθος. Οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις $z = a$ και $z = 0$. Ο τελευταίος πόλος είναι πολλαπλός ($M-1$ ς τάξης). Όμως ο πόλος στη θέση $z = a$ ακυρώνεται από το μηδενικό στην ίδια θέση, που προκύπτει για $k = 0$. Άρα, τελικά υπάρχουν $M-1$ το πλήθος μηδενικά, $z_k = |a|e^{j2\pi k/M}$, $k = 1, \dots, M$, και $M-1$ πόλοι (όλοι στη θέση $z = 0$).

Άσκηση 2. Να βρεθεί ο μετασχ. Z και το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του σήματος

$$x[n] = (1+n)u[n] \quad (7)$$

Λύση:
Θα είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1+n)u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} nz^{-n} \quad (8)$$

Για καθένα από τα επιμέρους αθροίσματα, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z| > 1 \quad (9)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{-n} \longleftrightarrow \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}, \quad |z| > 1 \quad (10)$$

Άρα

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{1-z^{-1}+z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}, \quad |z| > 1 \quad (11)$$

Γράφοντας τη σχέση του μετασχ. Ζ ως

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2} \quad (12)$$

παρατηρούμε πως έχουμε ένα μηδενικό στη θέση $z = 0$ (τάξης 2), και έναν πόλο στη θέση $z = 1$ (τάξης 2).

Άσκηση 3. Να βρεθεί ο μετασχ. Ζ και το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του σήματος

$$x[n] = (a^n + a^{-n})u[n], \quad a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad (13)$$

Λύση:

Ο μετασχ. Ζ θα είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a^n + a^{-n})u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} z^{-n} \quad (14)$$

Για καθένα από τα επιμέρους αθροίσματα, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (15)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} z^{-n} \longleftrightarrow \frac{1}{1 - (az)^{-1}}, \quad |z| > |1/a| \quad (16)$$

Άρα για να υπάρχει ο μετασχ. Ζ του παραπάνω σήματος, θα πρέπει $\{|z| > |a|\} \cap \{|z| > 1/|a|\} \neq \emptyset$, που συμβαίνει για κάθε $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. Άρα ο μετασχ. Ζ θα είναι

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - (az)^{-1}} = \frac{2 - (a^{-1} + a)z^{-1}}{(1 - az^{-1})(1 - a^{-1}z^{-1})} \quad (17)$$

με πεδίο σύγκλισης ROC $|z| > \max\{|a|, 1/|a|\}$. Τα μηδενικά βρίσκονται στις θέσεις $z = 0$ και $z = \frac{a^{-1}+a}{2}$, ενώ οι πόλοι στις θέσεις $z = a$ και $z = \frac{1}{a}$.

Άσκηση 4. Να βρεθεί ο μετασχ. Ζ και το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του σήματος

$$x[n] = a^{|n|}, \quad 0 < a < 1 \quad (18)$$

Λύση:

Ο μετασχ. Ζ θα είναι

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} \quad (19)$$

Για καθένα από τα επιμέρους αθροίσματα, έχουμε

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} az^n \longleftrightarrow \frac{a}{-a + z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{|a|} \quad (20)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} \longleftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad (21)$$

Άρα ο μετασχ. Ζ θα είναι

$$X(z) = \frac{z^{-1}(1 - a^2)}{(1 - az^{-1})(z^{-1} - a)}, \quad |a| < |z| < \frac{1}{|a|} \quad (22)$$

Γράφοντας την παραπάνω σχέση ως

$$X(z) = \frac{z(1-a^2)}{(1-az)(z-a)} \quad (23)$$

παρατηρούμε ότι ο μετασχ. Z έχει δυο πόλους στις θέσεις $z = a$ και $z = 1/a$, ενώ έχει δυο μηδενικά στις θέσεις $z = 0$ και $z = \infty$.

Άσκηση 5. Έστω ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα, το οποίο για είσοδο

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2^n u[-n-1] \quad (24)$$

παράγει έξοδο

$$y[n] = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] \quad (25)$$

Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς και την κρουστική απόκριση του συστήματος, και κατασκευάστε μια εξίσωση διαφορών που το περιγράφει.

Λύση:

Ο μετασχ. Z της εισόδου δίνεται ως

$$X(z) = Z\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2^n u[-n-1]\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}} = -\frac{\frac{5}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})} \quad (26)$$

με $2 > |z| > \frac{1}{3}$, ενώ της εξόδου ως

$$Y(z) = Z\left\{5\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]\right\} = 5\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - 5\frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} = -\frac{\frac{5}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})} \quad (27)$$

με $|z| > \frac{2}{3}$. Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ δίνεται ως

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{-\frac{\frac{5}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}}{-\frac{\frac{5}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}} \quad (28)$$

$$= \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \quad (29)$$

με πεδίο σύγκλισης $|z| > \frac{2}{3}$, αφού το σύστημα είναι αιτιατό. Η κρουστική απόκριση βρίσκεται εύκολα ως

$$h[n] = Z^{-1}\left\{\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}\right\} = Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} - 2\frac{z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}\right\} = \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (30)$$

από γνωστούς πίνακες και ιδιότητες. Η εξίσωση διαφορών τέλος, δίνεται εύκολα ως

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{2}{3}z^{-1}} \iff X(z)(1-2z^{-1}) = Y(z)(1-\frac{2}{3}z^{-1}) \quad (31)$$

η οποία με αντίστρ. μετασχ. Z δίνει

$$y[n] - \frac{2}{3}y[n-1] = x[n] - 2x[n-1] \quad (32)$$