

# Συστήματα στο χώρο του $Z$ και της συχνότητας $\omega$

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζης  
Δρ. Επιστήμης Η/Υ Πανεπιστημίου Κρήτης  
Δρ. Επεξεργασίας Σήματος Πανεπιστημίου Rennes 1

19 Νοεμβρίου 2015

## 1 Εισαγωγή

Δεδομένου ενός ΓΧΑ συστήματος με χρονική απόκριση  $h[n]$ , η είσοδος και η έξοδος σχετίζονται, όπως ξέρουμε, με τη σχέση της συνέλιξης

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (1)$$

Όπως έχουμε ήδη δει, η σχέση αυτή συνεπάγεται ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (2)$$

όπου  $H(e^{j\omega})$  η απόκριση σε συχνότητα του συστήματος. Η σχέση αυτή μπορεί να εκφραστεί στο χώρο του  $Z$  ως

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (3)$$

όπου  $H(z)$  ο μετασχ.  $Z$  του  $h[n]$ , που λέγεται συνάρτηση μεταφοράς, όπως γνωρίζετε, του συστήματος. Η συνάρτηση μεταφοράς είναι πολύ χρήσιμη στην περιγραφή και την ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων. Εδώ θα ασχοληθούμε με ΓΧΑ συστήματα και ειδικότερα με μερικές συγκεκριμένες κατηγορίες ΓΧΑ συστημάτων, πάντα μέσω της μελέτης της συνάρτησης μεταφοράς τους.

## 2 Η Απόκριση σε Συχνότητα ΓΧΑ Συστημάτων

Αν αναλύσουμε σε μορφή μέτρου-φάσης την απόκριση σε συχνότητα της εξόδου ενός ΓΧΑ συστήματος, εκφρασμένη όπως στη Σχέση (2), βλέπουμε ότι

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (4)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})|e^{j\angle X(e^{j\omega})}|H(e^{j\omega})|e^{j\angle H(e^{j\omega})} \quad (5)$$

$$|Y(e^{j\omega})|e^{j\angle Y(e^{j\omega})} = |X(e^{j\omega})||H(e^{j\omega})|e^{j(\angle H(e^{j\omega})+\angle X(e^{j\omega}))} \quad (6)$$

και άρα

$$|Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})||X(e^{j\omega})| \quad (7)$$

$$\angle Y(e^{j\omega}) = \angle H(e^{j\omega}) + \angle X(e^{j\omega}) \quad (8)$$

Το  $|H(e^{j\omega})|$  λέγεται *απόκριση πλάτους* (magnitude response) ή *κέρδος* του συστήματος, και το  $\angle H(e^{j\omega})$  λέγεται *απόκριση φάσης* (phase response) του συστήματος. Προσέξτε ότι η απόκριση πλάτους της εξόδου

αποτελείται από το γινόμενο των αποκρίσεων πλάτους της εισόδου και του συστήματος, ενώ η απόκριση φάσης της εξόδου αποτελείται από το άθροισμα των αποκρίσεων φάσης της εισόδου και του συστήματος.

Αυτές οι σχέσεις επιδρούν στην είσοδο του συστήματος και τη μεταβάλλουν, είτε με επιθυμητό τρόπο είτε με ανεπιθύμητο τρόπο. Όσον αφορά το τελευταίο, τότε οι αντίστοιχες σχέσεις αποκαλούνται διαταραχές πλάτους και φάσης, αντίστοιχα.

## 2.1 Συνάρτηση Φάσης

Όσον αφορά το φάσμα πλάτους, τα πράγματα είναι ξεκάθαρα. Το γινόμενο του φάσματος πλάτους του συστήματος και της εισόδου δίνει το φάσμα πλάτους της εξόδου. Τα πράγματα είναι πιο περιπλοκά αν θέλουμε να δούμε την επιρροή της φάσης του συστήματος στη φάση εξόδου, και πως αυτή μεταβάλλεται.

Η γωνία φάσης ενός οποιουδήποτε μιγαδικού αριθμού δεν ορίζεται μονοσήμαντα, αφού αν προσθέσουμε έναν ακέραιο  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  το αποτέλεσμα της γωνίας παραμένει αμετάβλητο (όπως και ο ίδιος ο μιγαδικός). Όταν υπολογίζουμε τη φάση μέσω ενός προγράμματος ή μιας αριθμομηχανής, το αποτέλεσμα εμφανίζεται πάντα στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$ . Αυτή η τιμή της φάσης λέγεται πρωτεύουσα τιμή φάσης (principal value), και θα τη συμβολίζουμε ως

$$-\pi < \text{ARG}[H(e^{j\omega})] \leq \pi \quad (9)$$

Οποιαδήποτε άλλη γωνία που δίνει ορθό αποτέλεσμα για τη μιγαδική τιμή της συνάρτησης  $H(e^{j\omega})$  μπορεί να αναπαρασταθεί με όρους πρωτεύουσας τιμής ως

$$\angle H(e^{j\omega}) = \text{ARG}[H(e^{j\omega})] + 2\pi r(\omega) \quad (10)$$

όπου  $r(\omega)$  είναι ένας θετικός ή αρνητικός ακέραιος που διαφέρει για κάθε τιμή του  $\omega$ . Θα χρησιμοποιούμε γενικά τη γραφή  $\angle H(e^{j\omega})$  ή  $\arg[H(e^{j\omega})]$  για να δηλώσουμε μη πρωτεύουσα τιμή της φάσης.

Σε πολλές περιπτώσεις, η πρωτεύουσα τιμή φάσης παρουσιάζει  $2\pi$ -ασυνέχειες όταν τη βλέπουμε ως συνάρτηση του  $\omega$ . Το Σχήμα (1) δείχνει μια συνάρτηση φάσης που είναι συνεχής,  $\arg[H(e^{j\omega})]$ , και την πρωτεύουσα τιμή της,  $\text{ARG}[H(e^{j\omega})]$  στο διάστημα  $-\pi < \omega \leq \pi$ . Η συνάρτηση φάσης του Σχήματος (1a) εκτείνεται πέρα από το διάστημα  $(-\pi, \pi]$ . Η πρωτεύουσα τιμή φάσης του Σχήματος (1b) έχει “άλματα” κατά πολλαπλάσια του  $2\pi$ , λόγω της αφαίρεσης πολλαπλασίων του  $2\pi$  που έλαβαν χώρα ώστε να βρεθεί κάθε τιμή της στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$ . Τέλος, το Σχήμα (1c) δείχνει την τιμή του  $r(\omega)$  για κάθε διάστημα, δηλ. πόσα πολλαπλάσια του  $2\pi$  απαιτούνται για το “ξετύλιγμα” (unwrapping) της φάσης εκτός του διαστήματος  $(-\pi, \pi]$ . Γι αυτό άλλωστε και η διαδικασία μετατροπής της πρωτεύουσας φάσης σε συνεχή συνάρτηση του  $\omega$  μέσω προσθήκης πολλαπλασίων του  $2\pi$  λέγεται ξετύλιγμα φάσης - *phase unwrapping*, και η αντίστοιχη συνάρτηση ξετυλιγμένη φάση - *unwrapped phase*.

## 2.2 Καθυστερήση Φάσης και Καθυστερήση Ομάδας - Phase and Group Delay

Έστω η έξοδος  $y[n]$  ενός ΓΧΑ συστήματος με φασματική απόκριση  $H(e^{j\omega})$ . Σύμφωνα με την αρχική ανάλυσή μας, το σύστημα θα εφαρμόσει κάποια καθυστέρηση στην έξοδο σε σχέση με την είσοδο  $x[n]$ , η οποία οφείλεται σε μια πιθανοτατα μη γραμμική απόκριση φάσης  $\angle H(e^{j\omega}) = \theta(\omega)$  του συστήματος.

Ας θεωρήσουμε την απλή περίπτωση όπου η είσοδος είναι ένα απλό ημίτονο

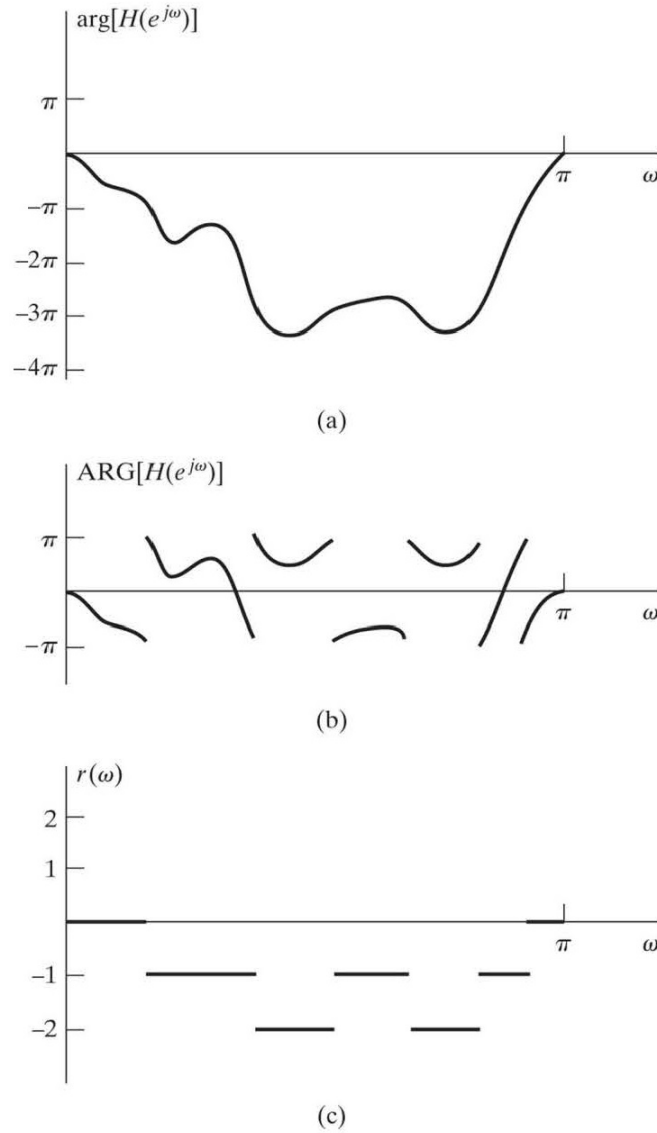
$$x[n] = A \cos(\omega_0 n + \phi) \quad (11)$$

Ξέρουμε ότι η έξοδος θα είναι επίσης ημιτονοειδούς μορφής, και συγκεκριμένα

$$y[n] = A|H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \phi + \theta(\omega_0)) = A|H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0\left(n + \frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0}\right) + \phi\right) \quad (12)$$

Η ποσότητα  $\frac{\theta(\omega_0)}{\omega_0}$  μας υποδεικνύει τη χρονική καθυστέρηση (μετατόπιση), σε δείγματα, του σήματος εξόδου σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου. Η συνάρτηση

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad (13)$$



Σχήμα 1: Συνεχής και πρωτεύουσα τιμή φάσης.

ονομάζεται *καθυστέρηση φάσης - phase delay*.

Θεωρήστε τώρα ότι το σήμα εισόδου αποτελείται από πολλά ημίτονα, διαφορετικής συχνότητας το καθένα. Καταλαβαίνετε ότι κάθε τέτοιο ημίτονο θα υποστεί διαφορετική καθυστέρηση φάσης από κάθε άλλο όταν περάσει από ένα ΓΧΑ σύστημα, και το σήμα εξόδου  $y[n]$  θα είναι, εν γένει, πολύ διαφορετικό στη μορφή του σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου  $x[n]$ . Σε τέτοιες περιπτώσεις μας είναι χρήσιμη μια διαφορετική παράμετρος, που θα την αναπτύξουμε παρακάτω, μέσω ενός παραδείγματος.

Έστω ένα σήμα

$$x[n] = A \cos(\omega_0 n) \cos(\omega_c n) \quad (14)$$

με  $\omega_c > \omega_0$ . Η παραπάνω σχέση λέγεται *διαμόρφωση πλάτους - Amplitude Modulation (AM)* και ήταν μια πρώτης μορφής ραδιοφωνική μετάδοση. Το σήμα χαμηλής συχνότητας  $\omega_0$  λέγεται *περιβάλλουσα* (ή σήμα πληροφορίας), ενώ το σήμα συχνότητας  $\omega_c$  λέγεται *φέρον σήμα*, αφού μεταφέρει την πληροφορία στο πλάτους του. Με τις σχέσεις του Euler, αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$x[n] = \frac{A}{2} \cos((\omega_c + \omega_0)n) + \frac{A}{2} \cos((\omega_c - \omega_0)n) = \frac{A}{2} \cos(\omega_1 n) + \frac{A}{2} \cos(\omega_u n) \quad (15)$$

με  $\omega_l = \omega_c - \omega_0$  και  $\omega_u = \omega_c + \omega_0$ . Αν το παραπάνω σήμα παρουσιαστεί ως είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα με φασματική απόκριση  $H(e^{j\omega})$ , τότε η έξοδος θα είναι της μορφής

$$y[n] = |H(e^{j\omega_l})| \frac{A}{2} \cos(\omega_l n + \theta(\omega_l)) + |H(e^{j\omega_u})| \frac{A}{2} \cos(\omega_u n + \theta(\omega_u)) \quad (16)$$

$$= A \cos\left(\omega_c n + \frac{\theta(\omega_u) + \theta(\omega_l)}{2}\right) \cos\left(\omega_0 n + \frac{\theta(\omega_u) - \theta(\omega_l)}{2}\right) \quad (17)$$

θεωρώντας ότι  $|H(e^{j\omega})| \approx 1$  στο διάστημα  $\omega_l \leq \omega \leq \omega_u$ . Έτσι, βλέπουμε ότι η έξοδος είναι επίσης στη μορφή γινομένου δυο ημιτόνων με συχνότητες  $\omega_c$  και  $\omega_0$ , όμως το καθένα έχει διαφορετική φάση μετατόπισης, και άρα διαφορετική καθυστέρηση φάσης σε σχέση με το αρχικό σήμα εισόδου.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου οι συχνότητες  $\omega_u, \omega_l$  είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, δηλαδή  $\omega_0 \ll \omega_c$ , οπότε  $\omega_u \approx \omega_c$  και  $\omega_l \approx \omega_c$ . Σε ένα μικρό εύρος συχνοτήτων γύρω από το  $\omega_c$ , μπορούμε να εκφράσουμε την ξετυλιγμένη φάση  $\theta_c(\omega)$  του ΓΧΑ συστήματος με ανάπτυγμα Taylor ως<sup>1</sup>

$$\theta_c(\omega) \approx \theta_c(\omega_c) + \left. \frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} (\omega - \omega_c) \quad (18)$$

κρατώντας μόνο τους δυο πρώτους όρους του αναπτύγματος. Με χρήση του αναπτύγματος, μπορούμε να βρούμε τις χρονικές καθυστερήσεις του σήματος συχνότητας  $\omega_c$  και αυτού συχνότητας  $\omega_0$  της Σχέσης (17). Για το σήμα συχνότητας  $\omega_c$  είναι

$$-\frac{\theta_c(\omega_u) + \theta_c(\omega_l)}{2\omega_c} \approx -\frac{2\theta_c(\omega_c)}{2\omega_c} = -\frac{\theta_c(\omega_c)}{\omega_c} \quad (19)$$

που είναι το ίδιο με την καθυστέρηση φάσης του σήματος συχνότητας  $\omega_c$ , σαν να περνούσε μόνο αυτό μέσα από το σύστημα. Για το σήμα συχνότητας  $\omega_0$ , η χρονική καθυστέρηση είναι

$$-\frac{\theta_c(\omega_u) - \theta_c(\omega_l)}{2\omega_0} = -\frac{\theta_c(\omega_u) - \theta_c(\omega_l)}{\omega_u - \omega_l} \approx -\left. \frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (20)$$

Η παράμετρος

$$\tau_g(\omega_c) = -\left. \frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \quad (21)$$

λέγεται *καθυστέρηση ομάδας - group delay* που προκαλείται από το σύστημα στη θέση  $\omega = \omega_c$ . Στη γενική μορφή, η συνάρτηση είναι της μορφής

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta_c(\omega)}{d\omega} \quad (22)$$

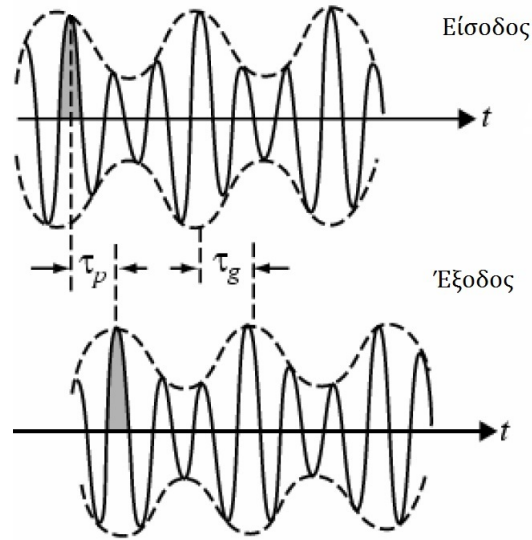
Η καθυστέρηση ομάδας ορίζεται δηλαδή ως η αρνητική παράγωγος της φάσης,

$$\tau_g(\omega) = \text{grad} \left[ H(e^{j\omega}) \right] = -\frac{d}{d\omega} \{ \angle H(e^{j\omega}) \} = -\frac{d}{d\omega} \{ \arg \{ H(e^{j\omega}) \} \} \quad (23)$$

και αφορά την καθυστέρηση της περιβάλλουσας της εξόδου στο χρόνο λόγω της επίδρασης της φάσης του ΓΧΑ συστήματος. Μια σχηματική απεικόνιση της καθυστέρησης φάσης και της καθυστέρησης ομάδας για το παραπάνω παράδειγμα βλέπετε στο Σχήμα (2). Με άλλα λόγια, μας δίνει την καθυστέρηση μιας ομάδας συχνοτήτων στενής ζώνης (narrowband). Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας μας δίνει ένα μέτρο της γραμμικότητας (ή μη) της φάσης ως συνάρτηση της συχνότητας  $\omega$ . Στο παραπάνω παράδειγμα, θεωρήσαμε ότι το σήμα μας είναι στενής ζώνης, δηλ. μη μηδενικό για  $\omega \in [\omega_c - \epsilon, \omega_c + \epsilon]$ , αλλά μπορούμε να

<sup>1</sup> Ανάπτυγμα Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$



Σχήμα 2: Καθυστέρηση φάσης και καθυστέρηση ομάδας για το σήμα  $y[n]$ .

σχεφτούμε ότι οποιοδήποτε σήμα μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα τέτοιων σημάτων, διαφορετικής  $\omega_c$  για το καθένα. Αν η καθυστέρηση ομάδας είναι σταθερή ως προς τη συχνότητα, τότε κάθε συνιστώσα στενής ζώνης θα υποστεί την ίδια καθυστέρηση. Αν η καθυστέρηση ομάδας δεν είναι σταθερή, τότε θα υπάρχουν διαφορετικές καθυστερήσεις για διαφορετικά “πακέτα” συχνοτήτων, με αποτέλεσμα τη διασπορά στο χρόνο της ενέργειας του σήματος εξόδου. Έτσι, η μη γραμμικότητα στη φάση ή, ισοδυνάμως, η μη σταθερή καθυστέρηση ομάδας συνεπάγεται διασπορά σήματος στο χρόνο.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια της καθυστέρησης ομάδας, ας δούμε δυο παραδείγματα.

Θεωρήστε το ΓΧΑ σύστημα ιδανικής καθυστέρησης, με χρονική απόκριση

$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d] \quad (24)$$

το οποίο έχει φασματική απόκριση

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \quad (25)$$

η οποία σε μορφή μέτρου-φάσης γράφεται ως

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1 \quad (26)$$

$$\angle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega n_d, \quad |\omega| < \pi \quad (27)$$

όπου θεωρούμε ότι η περιοδικότητα κατά  $2\pi$  υπονοείται. Παρατηρήστε ότι η χρονική καθυστέρηση (ή προήγηση, αν  $n_d < 0$ ) σχετίζεται με τη φάση, η οποία είναι γραμμική ως προς τη συχνότητα. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{\arg\{H(e^{j\omega})\}\} = -\frac{d}{d\omega}(-\omega n_d) = n_d \quad (28)$$

και

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\arg\{H(e^{j\omega})\}}{\omega} = -\frac{-\omega n_d}{\omega} = n_d \quad (29)$$

Στην περίπτωση της γραμμικής φάσης, η καθυστέρηση ομάδας συμπίπτει με την καθυστέρηση φάσης.

Σε πολλές εφαρμογές, η διαταραχή φάσης σε μορφή καθυστέρησης θεωρείται αρκετά ήπια μορφή διαταραχής, μια και απλά μετατοπίζει την ακολουθία στο χρόνο, χωρίς κανένα άλλο ανεπιθύμητο πρόβλημα.

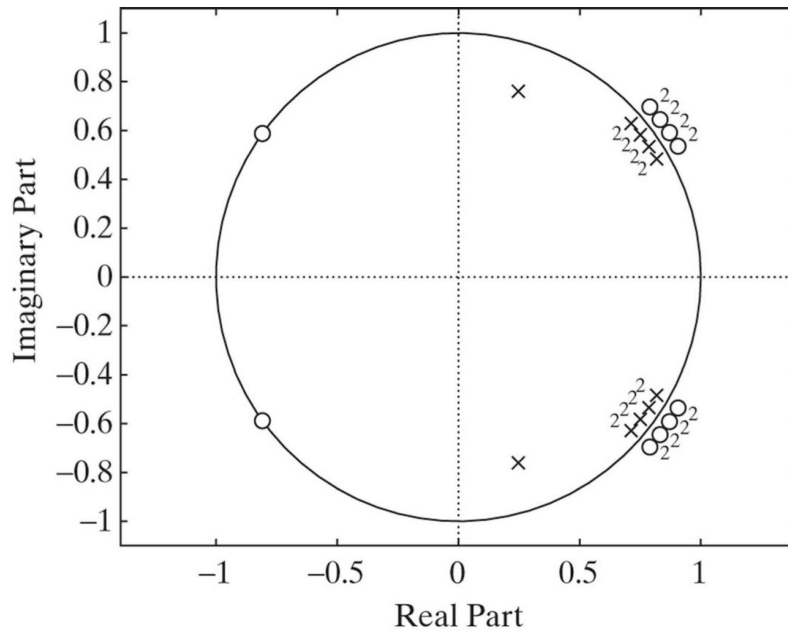
Έτσι, σε πολλές περιπτώσεις σχεδίασης φίλτρων ή ΓΧΑ συστημάτων, η γραμμική φάση είναι αποδεκτή ως μορφή διαταραχής φάσης.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα όπου η καθυστέρηση ομάδας δεν είναι σταθερή.

Θεωρήστε το σύστημα

$$H(z) = \left( \frac{(1 - 0.98e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.98e^{-j0.8\pi}z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j0.4\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.4\pi}z^{-1})} \right) \prod_{k=1}^4 \left( \frac{(c_k^* - z^{-1})(c_k - z^{-1})}{(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})} \right)^2 = H_1(z)H_2(z) \quad (30)$$

Το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του παραπάνω συστήματος φαίνεται στο Σχήμα (3). Το υποσύστημα



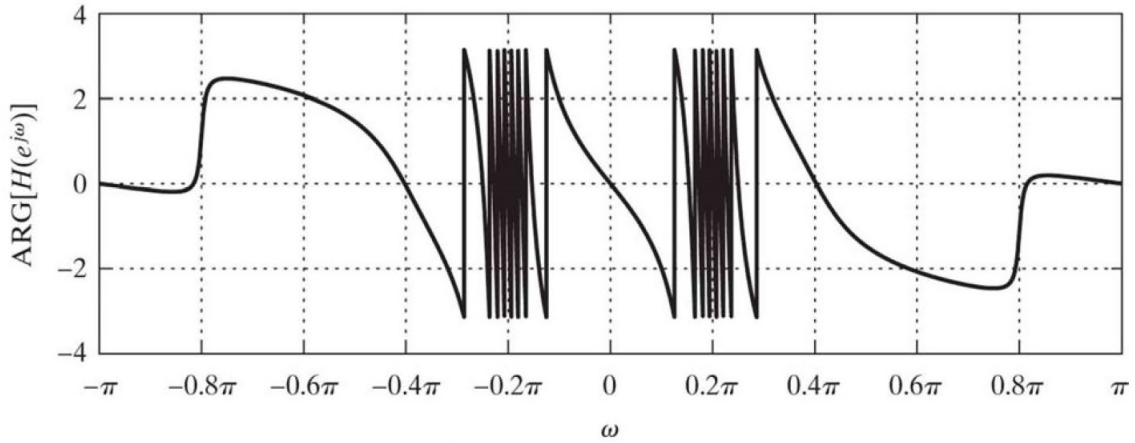
Σχήμα 3: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών συστήματος  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ .

$H_1(z)$  συνεισφέρει το συζυγές ζεύγος πόλων  $z = 0.8e^{\pm j0.4\pi}$ , όπως και το ζεύγος μηδενικών κοντά στο μοναδιαίο κύκλο στις θέσεις  $z = 0.98e^{\pm j0.8\pi}$ . Το υποσύστημα  $H_2(z)$  συνεισφέρει τα ζεύγη πόλων και μηδενικών δεύτερης τάξης στις θέσεις  $c_k = 0.95e^{\pm j(0.15\pi + 0.02\pi k)}$  και  $1/c_k = (1/0.95)e^{\mp j(0.15\pi + 0.02\pi k)}$ , με  $k = 1, 2, 3, 4$ . Το  $H_2(z)$  ονομάζεται *all-pass* σύστημα, γιατί  $|H_2(e^{j\omega})| = 1$ ,  $\forall \omega$ . Θα μελετήσουμε πιο κάτω τα *all-pass* συστήματα, και θα δούμε ότι εισάγουν μεγάλη καθυστέρηση ομάδας σε μια στενή ζώνη συχνοτήτων.

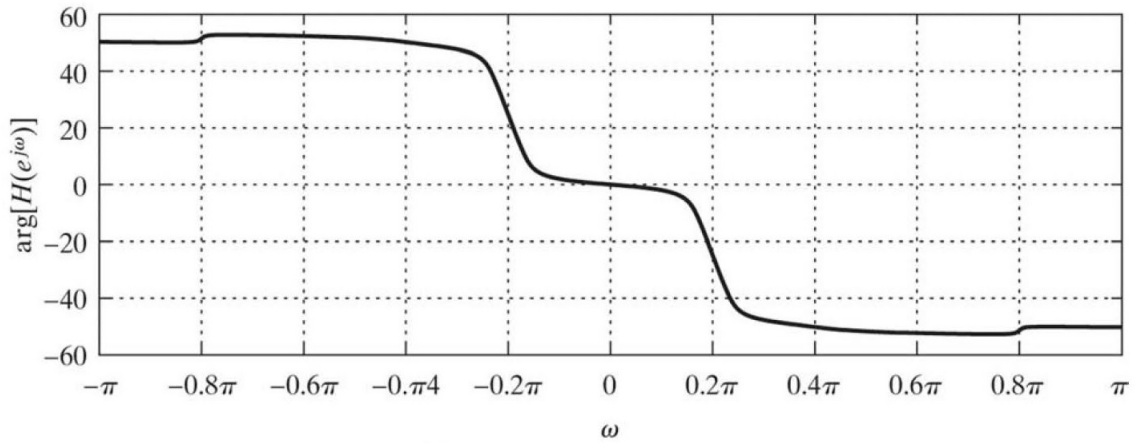
Η φασματικές αποκρίσεις (πλάτους και φάσης) του συνολικού συστήματος φαίνονται στο Σχήμα (4) και στο Σχήμα (5). Αρχικά, παρατηρήστε το Σχήμα (4). Βλέπετε ότι αρχικά η φάση έχει υπολογιστεί στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$  (πρωτεύουσα φάση), με αποτέλεσμα να έχει  $2\pi$ -ασυνέχειες, οι οποίες στη συνέχεια αφαιρούνται, όταν προσθέσουμε κατάλληλα πολλαπλάσια του  $2\pi$  στην πρωτεύουσα φάση, καταλήγοντας στην ξετυλιγμένη φάση.

Στο Σχήμα (5), βλέπετε την καθυστέρηση ομάδας και το φάσμα πλάτους του συστήματος. Παρατηρήστε αρχικά ότι η ξετυλιγμένη φάση είναι μονότονη συνάρτηση, και μάλιστα φθίνουσα, εκτός από μια μικρή περιοχή γύρω από τη συχνότητα  $\omega = \pm 0.8\pi$ . Έτσι, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι θετική παντού εκτός αυτής της μικρής περιοχής γύρω από το  $\omega = \pm 0.8\pi$ . Επίσης, δείτε ότι η καθυστέρηση ομάδας έχει μεγάλες τιμές γύρω από τις συχνότητες  $0.17\pi < |\omega| < 0.23\pi$ , όπου εκεί η ξετυλιγμένη φάση έχει μέγιστη αρνητική κλίση. Αυτές οι συχνότητες αντιστοιχούν στις γωνίες των ομάδων πόλων-μηδενικών που συζητήσαμε

νωρίτερα. Επίσης, προσέξτε το αρνητικό “βύθισμα” στη συχνότητα  $\omega = \pm 0.8\pi$ , όπου η φάση έχει θετική κλίση. Είπαμε νωρίτερα ότι το  $H_2(z)$  είναι ένα all-pass σύστημα, άρα το φάσμα πλάτους καθορίζεται



(a) Principle Value of Phase Response



(b) Unwrapped Phase Response

Σχήμα 4: (a) Πρωτεύουσα φάση και (b) ζετυλιγμένη φάση συστήματος  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ .

απόλυτα από τις θέσεις των πόλων και μηδενικών του συστήματος  $H_1(z)$ . Έτσι, αφού ξέρουμε ότι η φασματική απόκριση δεν είναι τίποτε άλλο παρά η εκτίμηση του  $H(z)$  επάνω στο μοναδιαίο κύκλο  $z = e^{j\omega}$ , τα μηδενικά στις θέσεις  $z = 0.98e^{\pm j0.8\pi}$  είναι η αιτία που το φάσμα πλάτους  $|H(e^{j\omega})|$  έχει πολύ μικρές τιμές, σχεδόν μηδενικές, κοντά στο  $\omega = \pm 0.8\pi$ . Αντίστοιχα, οι πόλοι στις θέσεις  $z = 0.8e^{\pm j0.4\pi}$  είναι η αιτία που το φάσμα πλάτους  $|H(e^{j\omega})|$  έχει υψηλές τιμές κοντά στο  $\omega = \pm 0.4\pi$ . Ας θεωρήσουμε τώρα ότι στο παραπάνω σύστημα εμφανίζεται ως είσοδος το σήμα του Σχήματος (6). Όπως βλέπετε, το σήμα αποτελείται από τρεις παλμούς στενής ζώνης, οι οποίοι είναι διαχωρισμένοι στο χρόνο για ευκολία εποπτείας τους. Το φάσμα πλάτους του σήματος φαίνεται επίσης στο ίδιο Σχήμα. Η μαθηματική μορφή των παλμών είναι η

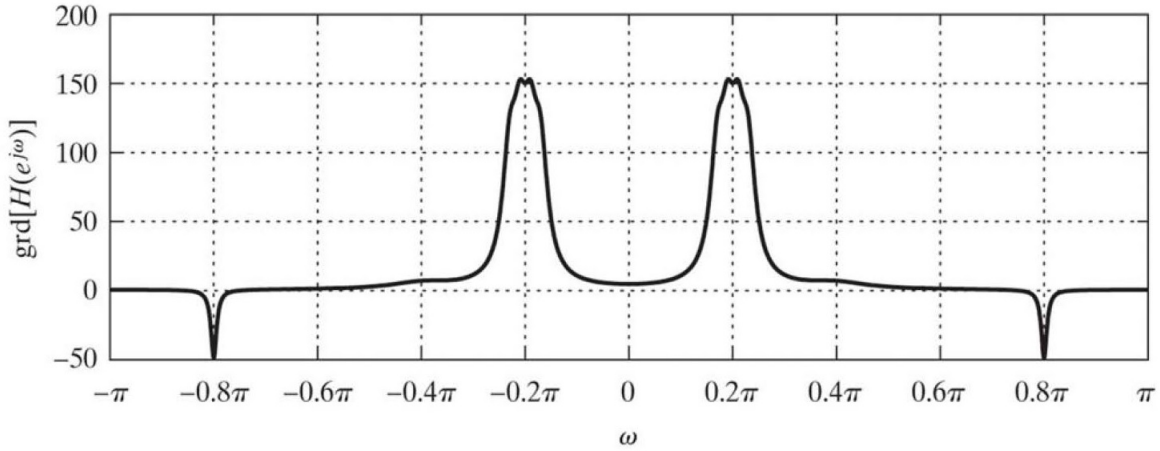
$$x_1[n] = w[n] \cos(0.2\pi n) \quad (31)$$

$$x_2[n] = w[n] \cos(0.4\pi n - \pi/2) \quad (32)$$

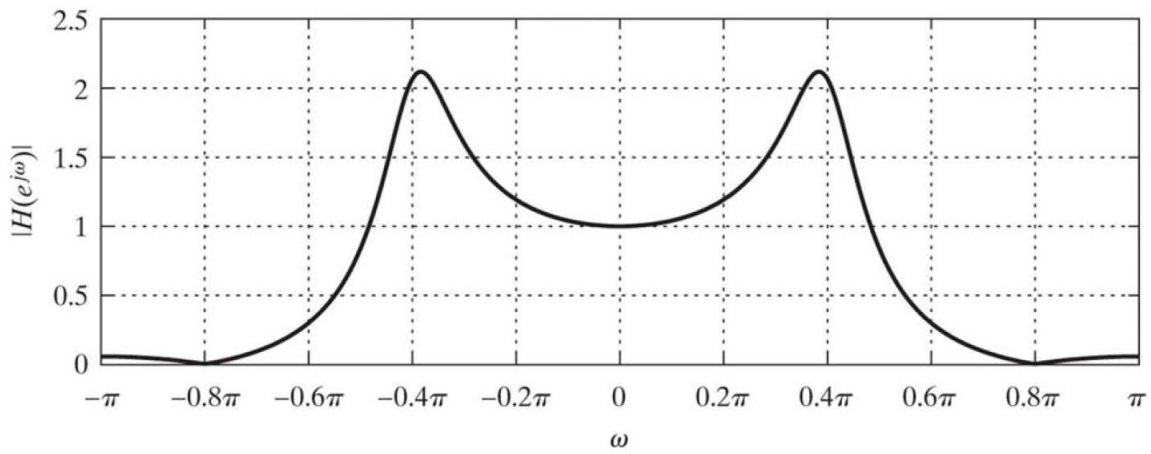
$$x_3[n] = w[n] \cos(0.8\pi n + \pi/5) \quad (33)$$

με  $w[n]$  να είναι ένας πεπερασμένης διάρκειας παλμός που δίνεται ως

$$w[n] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/M), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (34)$$



(a) Group delay of  $H(z)$



(b) Magnitude of Frequency Response

Σχήμα 5: (a) Καθυστέρηση ομάδας και (b) φάσμα πλάτους συστήματος  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ .

με  $M = 60^2$ . Άρα το συνολικό σήμα εισόδου περιγράφεται από τη σχέση

$$x[n] = x_3[n] + x_1[n - M - 1] + x_2[n - 2M - 2] \quad (35)$$

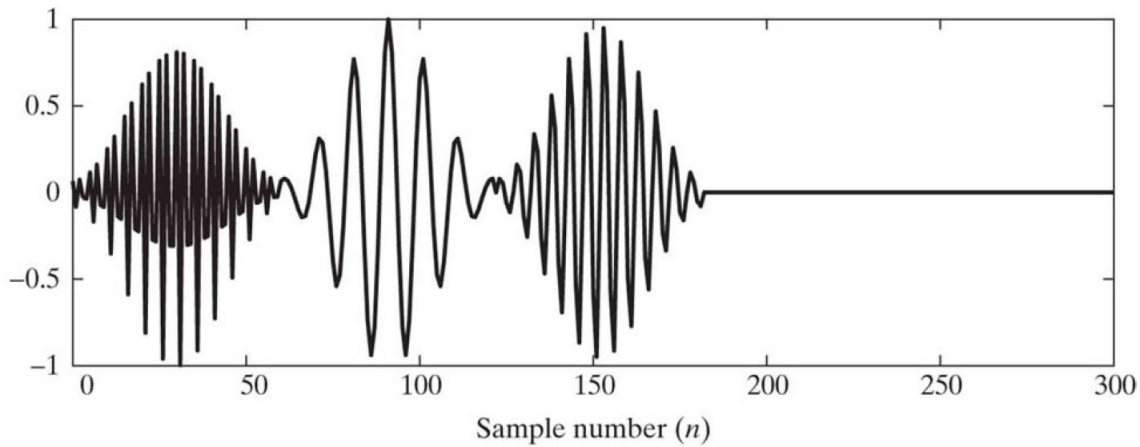
δηλ. όπως φαίνεται και στο Σχήμα (6), η υψηλότερη συχνότητα εμφανίζεται πρώτη, η χαμηλότερη συχνότητα εμφανίζεται δεύτερη, και ακολουθεί η μεσαία συχνότητα. Κοιτάζοντας το  $|X(e^{j\omega})|$  μπορεί να αναρωτηθεί κανείς που βρέθηκαν αυτοί οι λοβοί γύρω από τις συχνότητες  $\omega = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ . Θα περίμενε κανείς να συναντήσει συναρτήσεις Δέλτα σε αυτές τις συχνότητες, μια και αυτές αποτελούν το μετασχ. Fourier σημάτων συνημιτόνου όπως αυτά που έχουμε στην είσοδο. Ο λόγος που εμφανίζονται αυτοί οι λοβοί σε αυτές τις συχνότητες γίνονται κατανοητοί αν σκεφτούμε πώς “μεταφράζεται” το γινόμενο  $w[n]$  επί  $\cos(\omega_0 n)$  στο χώρο της συχνότητας. Όπως ήδη ξέρετε, το γινόμενο στο χρόνο γίνεται συνέλιξη στη συχνότητα, και άρα

$$w[n] \cos(\omega_0 n) \longleftrightarrow W(e^{j\omega}) * (\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)) = \pi W(e^{j(\omega - \omega_0)}) + \pi W(e^{j(\omega + \omega_0)}) \quad (36)$$

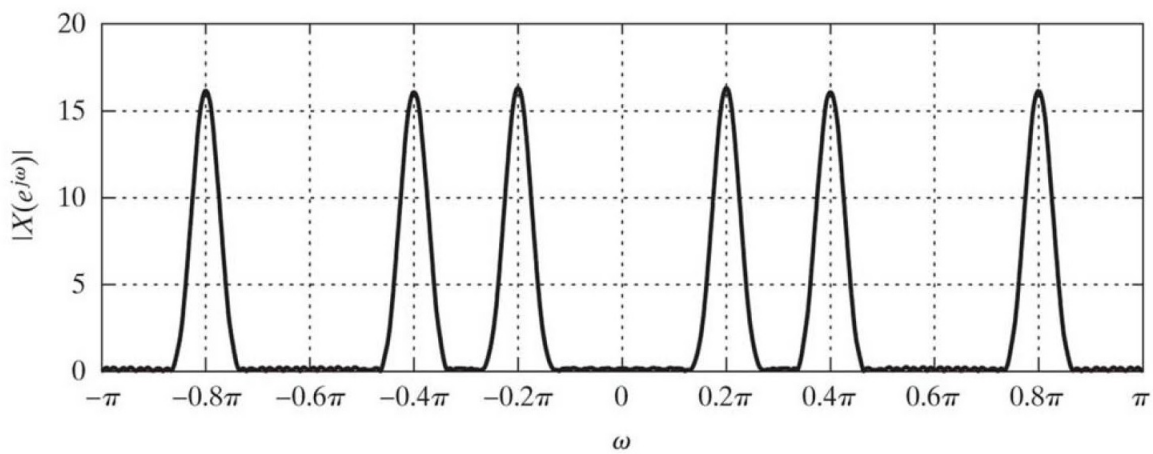
Άρα ουσιαστικά αυτό που βλέπουμε στο φάσμα πλάτους  $X(e^{j\omega})$  για κάθε ημίτονο της εισόδου είναι ο μετασχ. Fourier Διακριτού Χρόνου  $W(e^{j(\omega \pm \omega_0)})$  του παραθύρου  $w[n]$  γύρω από τις συχνότητες  $\omega_0 =$

<sup>2</sup>Το σήμα αυτό λέγεται παράθυρο *Hamming*, και είναι πολύ σημαντικό στην επεξεργασία σήματος.





(a) Waveform of signal  $x[n]$



(b) Magnitude of DTFT of  $x[n]$

Σχήμα 6: Σήμα (a) στο χρόνο και (b) φάσμα πλάτους σήματος εισόδου  $x[n]$  του συστήματος  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ .

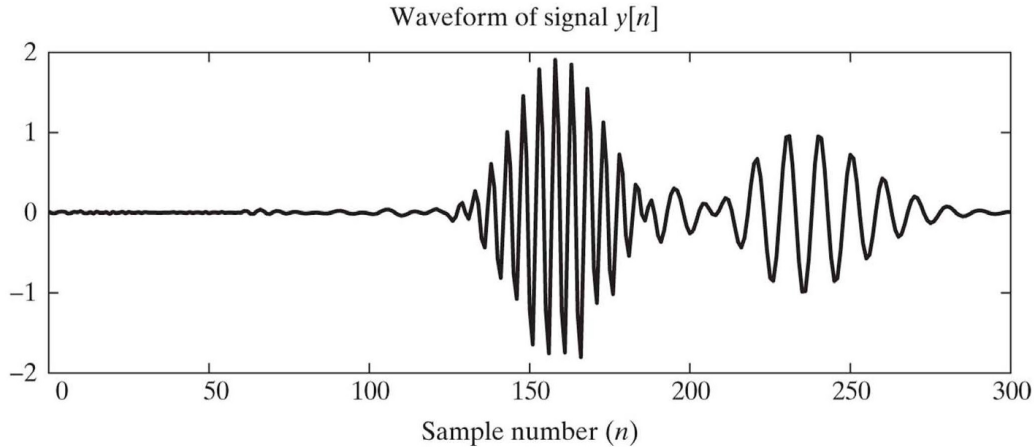
$\pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ ! Γί' αυτό και αντί για συναρτήσεις Δέλτα στις συχνότητες  $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$  (δηλ. ενέργεια ακριβώς και μόνο σε αυτές τις συχνότητες), βλέπουμε σημαντική ενέργεια γύρω από αυτές τις συχνότητες, σε ένα μικρό εύρος συχνοτήτων, που εξαρτάται από το είδος και τη διάρκεια του παραθύρου. Έστω ότι αυτό το εύρος έχει διάρκεια  $2B$ . Κάθε παλμός λοιπόν συνεισφέρει ένα σύνολο από συχνότητες ( $\omega_0 - B, \omega_0 + B$ ), όπου  $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ , ή αλλιώς ένα εύρος από συχνότητες που έχουν κέντρο τις συχνότητες  $\omega_0 = \pm 0.2\pi, 0.4\pi, 0.8\pi$ .

Όταν λοιπόν το παραπάνω σήμα παρουσιαστεί ως είσοδος στο ΓΧΑ σύστημα  $H(z)$ , κάθε ένα από τα συχνοτικά “πακέτα” ή αλλιώς, κάθε μια από τις συχνοτικές “ομάδες” που σχετίζεται με καθέναν απ’ τους παλμούς στενής ζώνης, θα επηρεαστεί από την απόκριση πλάτους του συστήματος, καθώς και από την καθυστέρηση ομάδας στο εύρος συχνοτήτων της κάθε συχνοτικής “ομάδας”. Από την απόκριση πλάτους του συστήματος, βλέπουμε ότι η συχνοτική “ομάδα” γύρω από τη συχνότητα  $\omega_1 = 0.2\pi$  θα λάβει ένα μικρό κέρδος στο πλάτος της, και η “ομάδα” γύρω από τη συχνότητα  $\omega_2 = 0.4\pi$  θα λάβει κέρδος στο πλάτος της περίπου ίσο με 2. Όσο για τη συχνότητα  $\omega_3 = 0.8\pi$ , αφού η απόκριση πλάτους του συστήματος είναι πολύ μικρή γύρω από αυτή τη συχνότητα, τότε ο παλμός υψηλότερης συχνότητας θα κατασταλεί σχεδόν πλήρως.

Κάνοντας την ίδια εξέταση για την καθυστέρηση ομάδας του συστήματος, θα δούμε ότι η καθυστέρηση

ομάδας γύρω από τη συχνότητα  $\omega_1 = 0.2\pi$  θα είναι σημαντικά μεγαλύτερη από αυτή είτε της συχνότητας  $\omega_2 = 0.4\pi$  είτε της συχνότητας  $\omega_3 = 0.8\pi$ , και κατά συνέπεια ο παλμος με τη χαμηλότερη συχνότητας θα λάβει τη μεγαλύτερη καθυστέρηση μέσω του συστήματος.

Το σήμα εξόδου δίνεται στο Σχήμα (7). Ο παλμός συχνότητας  $\omega_3 = 0.8\pi$  έχει ουσιαστικά εξουδετερωθεί. Οι άλλοι δυο παλμοί έχουν ενισχυθεί και καθυστερήσει: ο παλμός συχνότητας  $\omega_1 = 0.2\pi$  είναι ελαφρώς μεγαλύτερου πλάτους, και έχει καθυστερήσει κατά 150 δείγματα περίπου, ενώ ο παλμός συχνότητας  $\omega_2 = 0.4\pi$  είναι σχεδόν διπλάσιου πλάτους, και έχει καθυστερήσει κατά 10 δείγματα περίπου. Η



Σχήμα 7: Σήμα εξόδου  $y[n]$  του συστήματος  $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ .

υποενότητα αυτή έδειξε πως τα ΓΧΑ συστήματα τροποποιούν τα σήματα εισόδου τους μέσω του συνδυασμού της απόκρισης πλάτους και της απόκρισης φάσης. Για το τελευταίο παράδειγμα, όπου το σήμα εισόδου αποτελούνταν από συνιστώσες στενής ζώνης, ήταν εύκολο να βρούμε τις συνέπειες σε κάθε παλμό ξεχωριστά. Αυτό συνέβη γιατί οι συναρτήσεις φασματικής απόκρισης (πλάτους, φάσης, καθυστέρηση ομάδας) ήταν ομαλές και μεταβάλλονται ελάχιστα γύρω από το μικρό εύρος συχνοτήτων που εμφανίζονταν οι συνιστώσες της εισόδου. Έτσι, όλες οι συχνότητες που σχετίζονται με ένα δεδομένο παλμό υπέστησαν περίπου την ίδια καθυστέρηση και το ίδιο κέρδος στο πλάτος τους, με αποτέλεσμα την αναπαραγωγή του παλμού στην έξοδο, σε διαφορετική θέση και με διαφορετικό πλάτος.

Για σήματα που δεν είναι στενής ζώνης, αλλά ευρείας ζώνης (wideband signals), το παραπάνω δε θα ήταν γενικά αληθές, γιατί διαφορετικά τμήματα του φάσματος θα τροποποιούνταν διαφορετικά από το σύστημα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, τα αναγνωρίσιμα χαρακτηριστικά της εισόδου, όπως το σχήμα του παλμού, δε θα είναι εμφανή στην έξοδο, και ξεχωριστοί παλμοί στο χρόνο στην είσοδο μπορεί να καταλήξουν να είναι επικαλύψεις παλμών στην έξοδο.

### 3 Συνάρτηση Μεταφοράς ΓΧΑ Συστημάτων

Όπως ξέρουμε, η συνάρτηση μεταφοράς είναι ο μετασχ.  $Z$  της χρονικής απόκρισης ενός συστήματος

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad (37)$$

Η απόκριση σε συχνότητα μπορεί να προέλθει από τη συνάρτηση μεταφοράς, όταν την υπολογίζουμε επάνω στο μοναδιαίο κύκλο:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (38)$$

Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τα ΓΧΑ συστήματα που χαρακτηρίζονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές:

$$y[n] + \sum_{k=1}^M a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \quad (39)$$

Αυτά τα ΓΧΑ συστήματα έχουν συνάρτηση μεταφοράς που είναι ρητή συνάρτηση του  $z$ :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})} \quad (40)$$

Έτσι, η συνάρτηση μεταφοράς ορίζεται αποκλειστικά (εκτός από τη σταθερά  $A$ ) από τη θέση των πόλων,  $a_k$  και των μηδενικών  $b_k$ . Προσέξτε ότι κάθε όρος του αριθμητή

$$1 - b_k z^{-1} = \frac{z - b_k}{z} \quad (41)$$

συνεισφέρει ένα μηδενικό, στη θέση  $z = b_k$ , και έναν πόλο στη θέση  $z = 0$ , στη συνάρτηση μεταφοράς. Όμοια, ο αντίστοιχος όρος στον παρονομαστή συνεισφέρει έναν πόλο στη θέση  $z = a_k$  και ένα μηδενικό στη θέση  $z = 0$ . Καταλαβαίνετε ότι αν  $M = N$ , τα μηδενικά και οι πόλοι στο  $z = 0$  αλληλοακυρώνονται, και έτσι το σύστημα χαρακτηρίζεται από τους πόλους και τα μηδενικά που βρίσκονται στο υπόλοιπο  $z$ -επίπεδο. Σε διαφορετική περίπτωση, συμπεριλαμβάνουμε τους πόλους και τα μηδενικά που μπορεί να βρίσκονται στο  $z = 0$  ή στο  $z = \infty$ , κι έτσι έχουμε το πλήρες διάγραμμα πόλων-μηδενικών. Θυμίζουμε ότι όσοι πόλοι, τόσα μηδενικά σε κάθε συνάρτηση μεταφοράς!

Αν η χροστική απόκριση  $h[n]$  είναι πραγματική συνάρτηση, το  $H(z)$  είναι συζυγές συμμετρική συνάρτηση του  $z$ :

$$H(z) = H^*(z^*) \quad (42)$$

και έτσι οι πόλοι και τα μηδενικά απαντώνται σε συζυγη συμμετρικά ζευγη (δηλ. αν ένας πόλος ή μηδενικό βρίσκεται στη θέση  $z = z_0$ , υπάρχει κι ένας πόλος ή μηδενικό στη θέση  $z = z_0^*$ ).

### 3.1 Ευστάθεια και Αιτιατότητα

Η ευστάθεια και η αιτιατότητα επιβάλλουν κάποιους σημαντικούς περιορισμούς στη συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος.

#### 3.1.1 Ευσταθεια

Η χροστική απόκριση ενός ευσταθούς συστήματος γνωρίζουμε ότι πρέπει να είναι απολύτως αθροίσιμη:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (43)$$

Προσέξτε ότι αυτή η σχέση είναι ισοδυναμη με τη σχέση

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| z^{-n} < \infty \quad (44)$$

για  $|z| = 1$ , που σημαίνει ότι η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς να περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο, αν και μόνο αν το σύστημα είναι ευσταθές.

### 3.1.2 Αιτιατότητα

Επειδή η κρουστική απόκριση  $h[n]$  ενός αιτιατού συστήματος είναι δεξιόπλευρο σήμα, το πεδίο σύγκλισης του  $H(z)$  θα είναι εξωστρεφές, δηλ. θα είναι της μορφής  $|z| > |a|$ , με  $a$  τον πόλο της  $H(z)$  με το μεγαλύτερο μέτρο.

Η αιτιατότητα επιβάλλει κάποιους περιορισμούς στην απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος. Ένας απ' αυτούς εκφράζεται με το θεώρημα **Paley-Wiener**:

Αν  $h[n] = 0$ ,  $n < 0$ , και  $h[n]$  έχει πεπερασμένη ενέργεια, τότε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log|H(e^{j\omega})|d\omega < \infty \quad (45)$$

Κατά συνέπεια, η απόκριση σε συχνότητα ενός ευσταθούς και αιτιατού συστήματος δεν μπορεί να είναι ποτέ μηδενική για κάποια πεπερασμένη ζώνη συχνοτήτων. Έτσι, οποιοδήποτε ευσταθές ιδανικό φίλτρο επιλογής συχνοτήτων (χαμηλοπερατό, ζωνοπερατό, υψιπερατό) θα είναι αναγκαστικά μη αιτιατό.

Η αιτιατότητα επίσης επιβάλλει κάποιους περιορισμούς στο πραγματικό και στο φανταστικό μέρος της απόκρισης σε συχνότητα,  $H(e^{j\omega})$ . Για παράδειγμα, αν  $h[n]$  είναι πραγματική, μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα του άρτιου και του περιττού μέρους της, ως

$$h[n] = h_e[n] + h_o[n] \quad (46)$$

με  $h_e[n] = \frac{1}{2}(h[n] + h[-n])$  και  $h_o[n] = \frac{1}{2}(h[n] - h[-n])$ . Αν το  $h[n]$  είναι αιτιατό, μπορεί να καθοριστεί απόλυτα από το άρτιο μέρος του ως

$$h[n] = 2h_e[n]u[n] - h_e[n]\delta[n] \quad (47)$$

Αν η  $h[n]$  είναι απολύτως άθροισιμη, ο μετασχ. Fourier της υπάρχει, και μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του ως

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \quad (48)$$

Έτσι, επειδή το  $H_R(e^{j\omega})$  είναι ο μετασχ. Fourier του άρτιου μέρους του  $h[n]$ , συνεπάγεται ότι το  $h[n]$  είναι πραγματικό, ευσταθές, και αιτιατό σήμα, και το  $H(e^{j\omega})$  ορίζεται μοναδικά από το πραγματικό του μέρος. Αυτό υποδηλώνει μια σχέση μεταξύ του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του  $H(e^{j\omega})$ , η οποία είναι

$$H_I(e^{j\omega}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_R(e^{j\theta}) \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta \quad (49)$$

Αυτό το ολοκλήρωμα λέγεται - προς ενημέρωσή σας :- ) - Διακριτός Μετασχηματισμός Hilbert. Δηλ. το  $H_I(e^{j\omega})$  είναι ο Διακριτός Μετασχηματισμός Hilbert του  $H_R(e^{j\omega})$ .

### 3.2 Αντίστροφα Συστήματα

Για ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$ , το *αντίστροφο σύστημα* ορίζεται ως το σύστημα που έχει συνάρτηση μεταφοράς  $G(z)$ , τέτοια ώστε

$$H(z)G(z) = 1 \leftrightarrow h[n] * g[n] = \delta[n] \quad (50)$$

Συνήθως το αντίστροφο σύστημα συμβολίζεται με το δείκτη  $i$ , ως  $H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$ . Ένα ερώτημα που μπορεί να αναφερθεί είναι τι συμβαίνει με το πεδίο σύγκλισης του αντιστροφικού συστήματος. Αν  $ROC_H = R_H$ , τότε ποιο είναι το πεδίο σύγκλισης του αντιστροφικού συστήματος,  $ROC_{H_i}$ ; Την απάντηση σε αυτό το ερωτημα μας τη δίνει το θεώρημα της συνέλιξης, το οποίο - όπως γνωρίζετε - λέει ότι τα  $H(z)$  και  $G(z) = H_i(z)$  πρέπει να έχουν επικαλυπτόμενα πεδία σύγκλισης.

Για παράδειγμα, αν το  $H(z)$  είναι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς του  $z$ , όπως στη Σχέση (40), το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$G(z) = H_i(z) = \frac{1 \prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})}{A \prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})} \quad (51)$$

δηλ. οι πόλοι του  $H(z)$  γίνονται μηδενικά για το αντίστροφο σύστημα, ενώ τα μηδενικά γίνονται πόλοι. Ας δούμε δυο παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 1

Έστω

$$H(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}, |z| > 0.8 \quad (52)$$

τότε το αντίστροφο σύστημα είναι το

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \quad (53)$$

Όμως, για το πεδίο σύγκλισης έχουμε δυο επιλογές: *i*)  $|z| > 0.5$ , *ii*)  $|z| < 0.5$ . Από αυτά τα δυο πεδία, αυτό που επικαλύπτεται με το πεδίο σύγκλισης του  $H(z)$  είναι το  $|z| > 0.5$ . Έτσι, μπορούμε να βρούμε και την κρουστική απόκριση, η οποία είναι

$$h_i[n] = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \right\} - Z^{-1} \left\{ \frac{0.8z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 0.8 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (54)$$

το οποίο είναι αιτιατό και ευσταθές.

#### Παράδειγμα 2

Έστω το σύστημα

$$H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}, |z| > 0.8 \quad (55)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το αντίστροφο σύστημα είναι

$$H_i(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}} = 2 \frac{1 - 0.8z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \quad (56)$$

το οποίο έχει δυο πιθανά πεδία σύγκλισης, το  $|z| > 2$  και το  $|z| < 2$ . Παρατηρήστε ότι ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ πεδία σύγκλισης επικαλύπτονται με το πεδίο σύγκλισης του  $H(z)$ . Έτσι, και τα δυο είναι έγκυρα αντίστροφα συστήματα, μόνο που ανταποκρίνονται σε διαφορετικά σήματα στο χρόνο. Για αυτό με πεδίο σύγκλισης το  $|z| > 2$ , η κρουστική απόκριση θα είναι

$$h_i[n] = 2(2)^n u[n] - 1.6(2)^{n-1} u[n-1] \quad (57)$$

το οποίο είναι αιτιατό αλλά ασταθές. Αυτό με πεδίο σύγκλισης το  $|z| < 2$  έχει κρουστική απόκριση

$$h_i[n] = -2(2)^n u[-n-1] + 1.6(2)^{n-1} u[-n] \quad (58)$$

το οποίο είναι ευσταθές αλλά όχι αιτιατό!

### 3.3 Μοναδιαία Απόκριση Ρητών Συναρτήσεων Μεταφοράς

Ένα ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})} \quad (59)$$

Αν θεωρήσουμε ότι  $a_k \neq b_l$  για κάθε  $k$  και  $l$ , το  $H(z)$  μπορεί να αναπτυχθεί, στη γενικότερη μορφή του, με τη γνωστή μέθοδο σε απλά κλάσματα (PFE) ως

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-M} B_k z^{-k} + \sum_{k=1, k \neq i}^M \frac{A_k}{1 - a_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^S \frac{C_m}{(1 - a_i z^{-1})^m} \quad (60)$$

και αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε η Σχέση (60) δίνει απόκριση σε συχνότητα

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-M} B_k \delta[n - k] + \sum_{k=1, k \neq i}^M A_k a_k^n u[n] + \sum_{m=1}^S C_m \frac{n + m - 1}{(m - 1)!} a_i^n u[n + m - 1] \quad (61)$$

Φυσικά, αν δεν υπάρχουν πολλαπλές ρίζες, η σχέση γίνεται απλά

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-M} B_k \delta[n - k] + \sum_{k=1}^M A_k a_k^n u[n] \quad (62)$$

ενώ αν  $M = 0$ , το  $H(z)$  έχει μόνο μηδενικά, δηλ.

$$H(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \quad (63)$$

και άρα η κρουστική απόκριση θα είναι πεπερασμένης διάρκειας, δηλ.

$$h[n] = \sum_{k=0}^N b_k \delta[n - k] \quad (64)$$

Αυτά τα συστήματα, όπως ήδη ξέρετε, λέγονται Finite Impulse Response (FIR) filters. Αν  $M > 0$ , τότε η  $H(z)$  έχει πόλους σε θέσεις εκτός του μηδενός, και η κρουστική απόκριση είναι όπως στη Σχέση (62) ή στη Σχέση (60). Αυτά τα συστήματα λέγονται Infinite Impulse Response (IIR) filters, γιατί είναι άπειρα σε διάρκεια.

### 3.4 Απόκριση Συχνότητας $H(e^{j\omega})$ για Ρητές Συναρτήσεις Μεταφοράς $H(z)$

Είπαμε πριν ότι η απόκριση σε συχνότητα ενός συστήματος μπορεί να υπολογιστεί αν εκτιμήσουμε το  $H(z)$  επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, δηλ.

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (65)$$

Αρα σίγουρα αυτές οι δυο συναρτήσεις έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους. Ένα μεγάλο ερώτημα είναι τι επιρροή έχουν οι πόλοι και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς  $H(z)$  στη μορφή της  $H(e^{j\omega})$ . Για ρητές συναρτήσεις μεταφοράς του  $z$ , η απόκριση σε συχνότητα μπορεί να βρεθεί γεωμετρικά από τους πόλους και τα μηδενικά του  $H(z)$ . Ας δούμε πως.

Το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα δίνεται από τη Σχέση (40), αν θέσουμε  $z = e^{j\omega}$  και πάρουμε το μέτρο:

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^N |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^M |1 - a_k e^{-j\omega}|} \quad (66)$$

ενώ η φάση δίνεται από τη σχέση

$$\angle H(e^{j\omega}) = \arg\left[\frac{b_0}{a_0}\right] + \sum_{k=1}^M \arg[1 - b_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^N \arg[1 - a_k e^{-j\omega}] \quad (67)$$

όπου  $\angle H(e^{j\omega})$  είναι η ζετυλιγμένη φάση. Τέλος, η καθυστέρηση ομάδας δίνεται ως

$$\text{grad}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^M \frac{d}{d\omega} \arg[1 - a_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^N \frac{d}{d\omega} \arg[1 - b_k e^{-j\omega}] \quad (68)$$

Μια εναλλακτική έκφραση για την καθυστέρηση ομάδας είναι

$$\text{grad}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^N \frac{|a_k|^2 - \Re\{a_k e^{-j\omega}\}}{1 + |a_k|^2 - 2\Re\{a_k e^{-j\omega}\}} - \sum_{k=1}^M \frac{|b_k|^2 - \Re\{b_k e^{-j\omega}\}}{1 + |b_k|^2 - 2\Re\{b_k e^{-j\omega}\}} \quad (69)$$

Παρατηρήστε ότι οι Σχέσεις (66, 67, 68) εκφράζονται ως άθροισμα από τις συνεισφορές των πόλων των και των μηδενικών σε πλάτος, φάση, και καθυστέρηση ομάδας. Αυτό είναι ενδιαφέρον, γιατί για να καταλάβουμε πώς οι πόλοι και τα μηδενικά επηρεάζουν τη φασματική απόκριση σε πραγματικά συστήματα μεγάλης τάξης, πρέπει να καταλάβουμε σε βάθος πως λειτουργούν συστήματα μικρής τάξης, όπως π.χ. πρώτης και δεύτερης τάξης, σε σχέση με τη θέση των πόλων και των μηδενικών τους.

### 3.5 Απόκριση Συστημάτων με Χρήση Διαγράμματος Διανυσμάτων

Ας επιστρέψουμε στη σχέση

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{b_0}{a_0} \right| \frac{\prod_{k=1}^N |1 - b_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^M |1 - a_k e^{-j\omega}|} \quad (70)$$

Βλέπετε ότι το  $|H(e^{j\omega})|$  είναι  $|b_0/a_0|$  φορές το γινόμενο των όρων  $|1 - b_k e^{-j\omega}|$  δια το γινόμενο των όρων  $|1 - a_k e^{-j\omega}|$ . Κάθε όρος στον αριθμητή

$$|1 - b_k e^{-j\omega}| = \frac{|e^{j\omega} - b_k|}{|e^{j\omega}|} = |e^{j\omega} - b_k| \quad (71)$$

είναι το μήκος του διανύσματος  $u_k$  από το μηδενικό στη θέση  $z = b_k$  ως το μοναδιαίο κύκλο στο  $z = e^{j\omega}$ . Όμοια ακριβώς, κάθε όρος στον παρονομαστή

$$|1 - a_k e^{-j\omega}| = \frac{|e^{j\omega} - a_k|}{|e^{j\omega}|} = |e^{j\omega} - a_k| \quad (72)$$

είναι το μήκος του διανύσματος  $u_k$  από τον πόλο στη θέση  $z = a_k$  ως το μοναδιαίο κύκλο στο  $z = e^{j\omega}$ . Ας δούμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού απόκρισης πλάτους από το διάγραμμα διανυσμάτων.

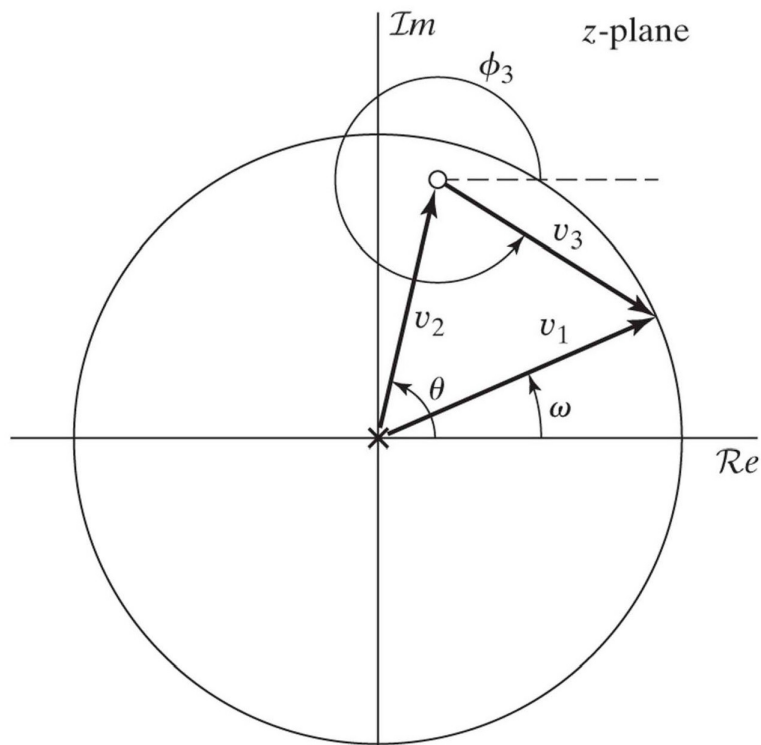
#### Παράδειγμα 1:

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό σύστημα που έχει ένα μηδενικό στη θέση  $z = b_k = r e^{j\theta}$  και, αναπόφευκτα, θα έχει έναν πόλο στη θέση  $z = 0$ , όπως στο Σχήμα (8). Το διάνυσμα από το μηδενικό ως το μοναδιαίο κύκλο συμβολίζεται με  $u_3$ , ενώ το διάνυσμα  $u_1$  είναι το διάνυσμα  $e^{j\omega}$  και το διάνυσμα  $u_2$  είναι το διάνυσμα  $r e^{j\theta}$ , όπου και βρίσκεται το μηδενικό. Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι

$$H(z) = (1 - r e^{j\theta} z^{-1}) = \frac{z - r e^{j\theta}}{z} \quad (73)$$

και άρα η φασματική απόκριση είναι

$$H(e^{j\omega}) = (1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - r e^{j\theta}}{e^{j\omega}} \quad (74)$$



Σχήμα 8: Διάγραμμα Διανυσμάτων Συστήματος Πρώτης Τάξης.

Η πρωτεύουσα φάση θα είναι

$$\text{ARG}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (75)$$

Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι

$$\text{grad}[1 - re^{j\theta}e^{-j\omega}] = \frac{r^2 - r \cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (76)$$

Η απόκριση πλάτους θα είναι, όπως είδαμε πιο πάνω, ίση με

$$|H(e^{j\omega})| = \left| \frac{e^{j\omega} - re^{j\theta}}{e^{j\omega}} \right| = |e^{j\omega} - re^{j\theta}| \quad (77)$$

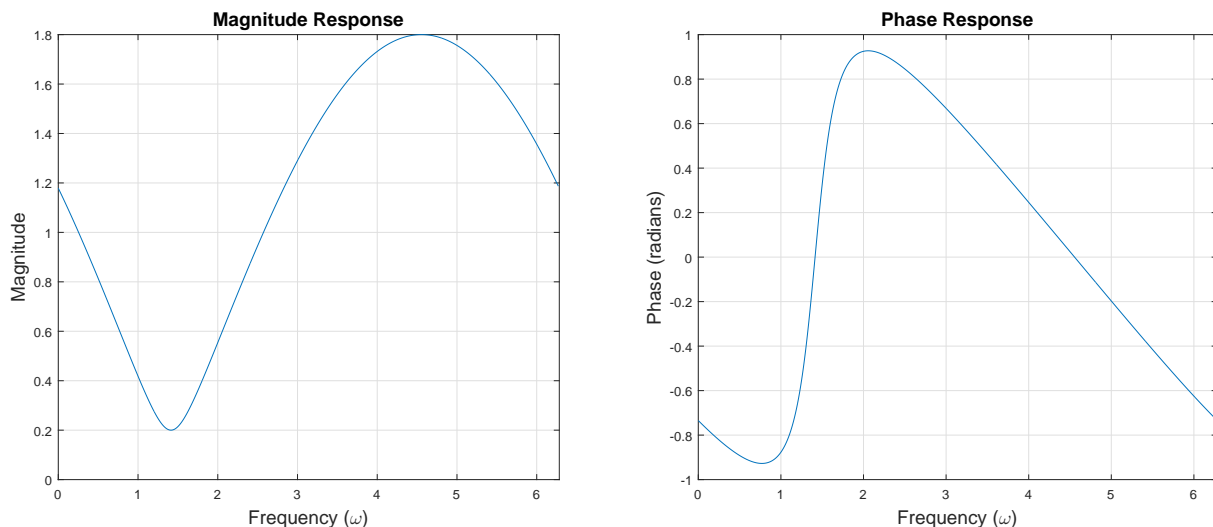
Αυτό το μέτρο είναι το μέτρο του διανύσματος  $u_3$ . Δηλαδή, η απόκριση πλάτους εξαρτάται μόνο από το μέτρο του διανύσματος  $u_3$ ! Όταν το διάνυσμα  $u_1$  αρχίζει να “τρέχει” επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μεταβάλλοντας τη γωνία  $\omega$  του, το μέτρο του  $u_3$  μεταβάλλεται, δίνοντάς μας τις τιμές της  $|H(e^{j\omega})|$  για κάθε  $\omega$ . Ας δούμε πως, εξετάζοντας μια πλήρη περιστροφή του  $u_1$ :

- Προσέξτε ότι το  $|u_3|$  μικραίνει όσο το  $\omega \rightarrow \theta$ , και θα γίνει ελάχιστο όταν  $\omega = \theta$ .
- Οπότε η  $|H(e^{j\omega})|$  θα ξεκινά από μια τιμή στο  $\omega = 0$ , έστω  $|H(e^{j0})|$ , και θα φθίνει μέχρι το  $\omega = \theta$ , όπου το  $|H(e^{j\omega})|$  θα γίνει ελάχιστο.
- Μετά, το διάνυσμα  $|u_3|$  θα αρχίσει να μεγαλώνει ξανά, άρα η  $|H(e^{j\omega})|$  θα αυξάνει και πάλι μέχρι  $\omega = \pi + \theta$ , όπου θα γίνει μέγιστη.



- Όσο  $\omega \rightarrow 2\pi$ , το  $|u_3|$  θα φθίνει και πάλι, άρα η  $|H(e^{j\omega})|$  θα μικραίνει ξανά, μέχρι να επανέλθει στην ίδια τιμή  $|H(e^{j0})|$  που είχε όταν  $\omega = 0$ , αφού τώρα έχει συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές του μηδενικού είναι  $r = 0.8$  και  $\theta = 0.45\pi$ , τιμές που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στο Σχήμα (8). Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο Σχήμα (9). Παρατηρήστε ότι η ελάχιστη τιμή του



Σχήμα 9: Φάσμα Πλάτους και Φάσμα Φάσης Συστήματος Πρώτης Τάξης.

είναι για  $\omega = \theta = 0.45\pi \approx 1.41$ , όταν δηλαδή το διάνυσμα  $|u_3|$  βρίσκεται στο μικρότερο μήκος του, ενώ η μέγιστη τιμή του είναι για  $\omega = \pi + 0.45\pi = 1.45\pi \approx 4.55$ , όπως ακριβώς αναμενόταν από την προηγούμενη ανάλυσή μας.

Για τη φάση, έχουμε ότι

$$\angle(1 - re^{j\theta}) = \angle(e^{j\omega} - re^{j\theta}) - \angle e^{j\omega} = \angle u_3 - \angle u_1 = \phi_3 - \phi_1 = \phi_3 - \omega \quad (78)$$

Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση φάσης ισούται με τη διαφορά της γωνίας  $\phi_3$ , δηλ. της γωνίας του διανύσματος  $u_3$  μείον τη γωνία του διανύσματος  $u_1$ . Ας κάνουμε παρόμοια ανάλυση κι εδώ, με βάση το Σχήμα (8):

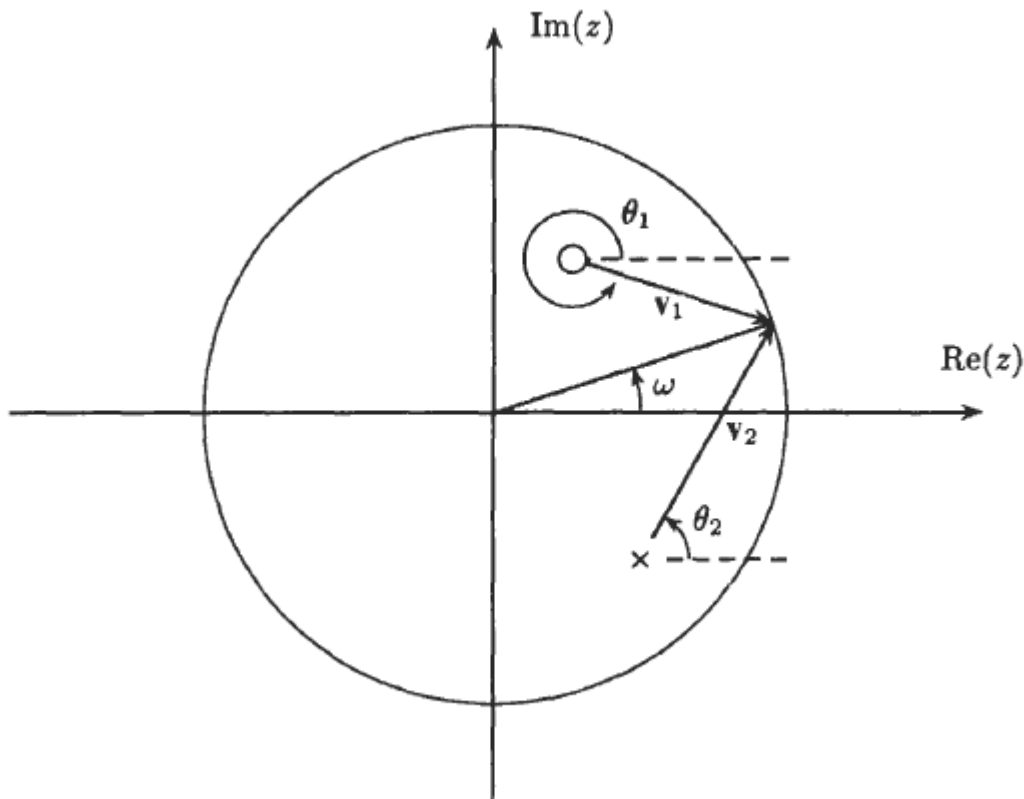
- Όταν  $\omega = 0$ , η απόκριση φάσης έχει μια τιμή, έστω  $\angle H(e^{j\omega}) = \phi_3$ , η οποία όμως είναι αρνητική, γιατί η  $\phi_3$  είναι μεγαλύτερη από  $\pi$ , οπότε η τιμή της ανήκει στο διάστημα  $(-\pi, 0)$ .
- Όταν  $\omega \rightarrow \theta$ , παρατηρούμε τα εξής:
  - Όταν το φανταστικό μέρος του  $u_1$  γίνει ίσο με το φανταστικό μέρος του  $u_2$ , τότε  $\angle H(e^{j\omega}) = 2\pi - \omega = -\omega$ , και εκεί η απόκριση φάσης είναι ελάχιστη.
  - Όταν η  $\omega \rightarrow \theta$  από τα δεξιά, η γωνία  $\phi_3$  θα έχει πολύ μικρή μεταβολή σε σχέση με την  $\omega$ , άρα η διαφορά τους θα μεγαλώνει απότομα.
  - όταν  $\omega = \theta$ , η διαφορά  $\phi_3 - \omega$  θα είναι μηδέν, γιατί τότε  $\phi_3 = \theta = \omega$ . Άρα η φάση θα είναι μηδέν.
  - Όταν η  $\omega$  απομακρύνεται αλλά βρίσκεται κοντά στη  $\theta$ , η γωνία  $\phi_3$  θα έχει πολύ μεγάλη μεταβολή σε σχέση με την  $\omega$ , άρα η διαφορά τους θα μεγαλώνει απότομα μέχρι το φανταστικό μέρος του  $u_1$  γίνει ξανά ίσο με το φανταστικό μέρος του  $u_2$ . Τότε η απόκριση φάσης θα γίνει μέγιστη, και από εκεί και μετά θα αρχίσει να φθίνει.

- Όταν  $\omega = \pi + \theta$ , η φάση θα είναι μηδέν, γιατί οι γωνίες  $\phi_3$  και  $\omega$  θα είναι ίσες.
- Τέλος, όταν  $\omega \rightarrow 2\pi$ , η  $\omega$  θα είναι όλο και μεγαλύτερη από την  $\phi_3$  και άρα η απόκριση φάσης θα φθίνει, μέχρι να φτάσει στην ίδια τιμή  $\angle H(e^{j\omega}) = \phi_3$  που είχε όταν  $\omega = 0$ .

Επιβεβαιώστε τα παραπάνω κοιτάζοντας το Σχήμα (9).

Παράδειγμα 2:

Ας πάμε τώρα σε κάτι πιο σύνθετο. Δείτε το Σχήμα (10), όπου έχουμε έναν πόλο  $z = a$  και ένα μηδενικό  $z = b$  στο  $z$ -επίπεδο. Τότε η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  και το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα,

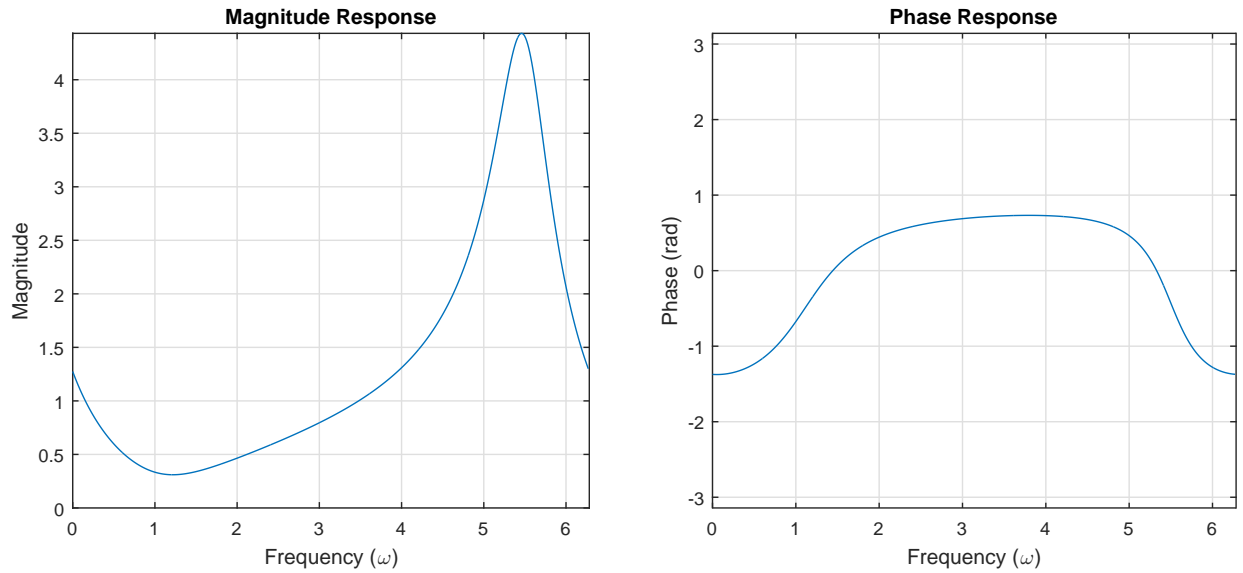


Σχήμα 10: Διανύσματα Διανυσμάτων για Σύστημα Πρώτης Τάξης με έναν πόλο και ένα μηδενικό.

$|H(e^{j\omega})|$ , δίνεται απλά ως

$$H(z) = \frac{1 - bz^{-1}}{1 - az^{-1}} \Rightarrow |H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j\omega} - b|}{|e^{j\omega} - a|} = \frac{|v_1|}{|v_2|} \quad (79)$$

με  $v_2$  το διάνυσμα από τον πόλο ως το μοναδιαίο κύκλο, και  $v_1$  αυτό από το μηδενικό ως το μοναδιαίο κύκλο. Βλέπετε λοιπόν ότι το μέτρο της απόκρισης σε συχνότητα καθορίζεται ΜΟΝΟ από τις αποστάσεις των πόλων και των μηδενικών από το μοναδιαίο κύκλο! Όταν ο πόλος,  $a = re^{j\omega_1}$ , είναι κοντά στο μοναδιαίο κύκλο (δηλ.  $r \approx 1$ ), το πλάτος της απόκρισης σε συχνότητα γίνεται μεγάλο για  $\omega \approx \omega_1$ , επειδή το μήκος του διανύσματος  $v_2$  γίνεται μικρό. Όταν το μηδενικό,  $b = \rho e^{j\omega_2}$ , είναι κοντά στο μοναδιαίο κύκλο (δηλ.  $\rho \approx 1$ ), το πλάτος της απόκρισης σε συχνότητα γίνεται μικρό για  $\omega \approx \omega_2$ , επειδή το μήκος του διανύσματος  $v_1$  γίνεται μεγάλο. Καταλαβαίνετε φυσικά ότι αν το μηδενικό είναι πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, τότε  $|H(e^{j\omega_1})| = 0$ , και αντίστοιχα, αν ένας πόλος βρίσκεται εκεί, τότε  $|H(e^{j\omega_2})| = +\infty$ .



Σχήμα 11: Φάσμα Πλάτους και Φάσμα Φάσης Συστήματος Πρώτης Τάξης με έναν πόλο και ένα μηδενικό.

Το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης του παραπάνω διαγράμματος φαίνεται στο Σχήμα (11), αν θεωρήσουμε ότι το μηδενικό είναι στη θέση  $z = 0.56e^{j5\pi/14}$ , ενώ ο πόλος είναι στη θέση  $z = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}$ , που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στις θέσεις του σχήματος. Καταλαβαίνετε γιατί η καμπύλη του φάσματος πλάτους είναι αυτής της μορφής; Αναλύστε το σύστημα αυτό όπως κάναμε για το προηγούμενο!

Όμοια είναι η ανάλυση για το υπολογισμό της φάσης. Για το μηδενικό, βλέπουμε ότι

$$\arg(1 - be^{-j\omega}) = \arg(e^{-j\omega}(e^{j\omega} - b)) = \arg(e^{j\omega} - b) - \omega = \theta_1 - \omega \quad (80)$$

με  $\theta_1$  τη γωνία μεταξύ του άξονα των πραγματικών και του διανύσματος  $v_1$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα (10). Όμοια, για τον πόλο, βλέπουμε ότι

$$\arg(1 - ae^{-j\omega}) = \theta_2 - \omega \quad (81)$$

με  $\theta_2$  τη γωνία μεταξύ του άξονα των πραγματικών και του διανύσματος  $v_2$ . Αναλύστε το σύστημα αυτό και επιβεβαιώστε την καμπύλη της φάσης που φαίνεται στο Σχήμα (11).

### Παράδειγμα 3:

Ας δούμε κι ένα σύστημα δεύτερης τάξης, με δυο πόλους σε συζυγείς θέσεις, όπως στο Σχήμα (12). Το σύστημα αυτό περιγράφεται από τη σχέση

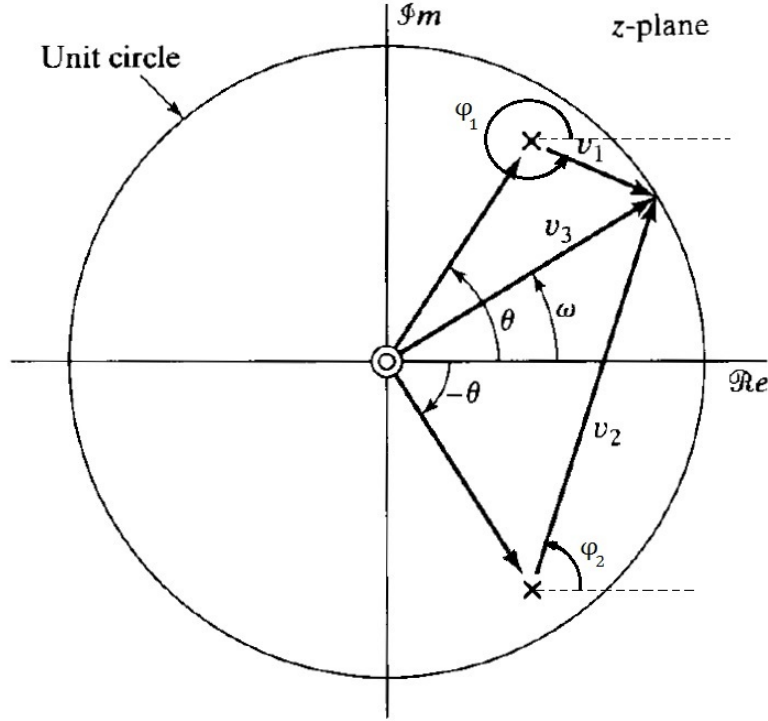
$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r \cos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}} \quad (82)$$

ή εναλλακτικά, από την εξίσωση διαφορών<sup>3</sup>

$$y[n] - 2r \cos(\theta)y[n - 1] + r^2y[n - 2] = x[n] \quad (84)$$

<sup>3</sup>Δείξτε ότι αν κάνουμε Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, η κρουστική απόκριση του συστήματος δίνεται ως

$$h[n] = \frac{r^n \sin(\theta(n+1))}{\sin(\theta)} u[n] \quad (83)$$



Σχήμα 12: Διάγραμμα Διανυσμάτων Συστήματος Δευτέρας Τάξης με δυο συζυγείς πόλους.

Η φάση του συστήματος δίνεται ως

$$\arg[H(e^{j\omega})] = -\tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} - \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)} \quad (85)$$

και άρα η καθυστέρηση ομάδας είναι

$$\text{grad}[H(e^{j\omega})] = -\frac{r(1 - r \cos(\omega - \theta))}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} - \frac{r(1 - r \cos(\omega + \theta))}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega + \theta)} \quad (86)$$

Η εξαγωγή των φασματικών χαρακτηριστικών του συστήματος από τις παραπάνω σχέσεις απαιτεί λίγη προσπάθεια, αλλά θα μας ανταμείψει με υψηλή ακρίβεια. :-) Μια πιο ποιοτική παραγωγή των φασματικών συναρτήσεων μπορεί να γίνει με διάγραμμα διανυσμάτων.

Προφανώς, για δυο πόλους σε συζυγείς θέσεις, θα έχουμε δυο μηδενικά στο μηδέν, όπως φαίνεται και στο Διάγραμμα (;;) Το διάνυσμα  $|e^{j\omega} - re^{j\theta}|$ , από τον πόλο του πρώτου τεταρτημορίου,  $re^{j\theta}$ , ως το μοναδιαίο κύκλο συμβολίζεται με  $u_1$ , ενώ το διάνυσμα  $u_3$  είναι το διάνυσμα  $e^{j\omega}$ , και το διάνυσμα  $u_2 = |e^{j\omega} - re^{-j\theta}|$  είναι το διάνυσμα από το συζυγή πόλο του τέταρτου τεταρτημορίου ως το μοναδιαίο κύκλο.

Η συνάρτηση μεταφοράς αυτού του συστήματος είναι

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})} \quad (87)$$

και άρα η φασματική απόκριση είναι

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j2\omega}}{(e^{j\omega} - re^{j\theta})(e^{j\omega} - re^{-j\theta})} = \frac{e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - re^{j(\omega-\theta)} - re^{j(\omega+\theta)} + r^2} = \frac{e^{j2\omega}}{e^{j2\omega} - 2r \cos(\theta)e^{j\omega} + r^2} \quad (88)$$

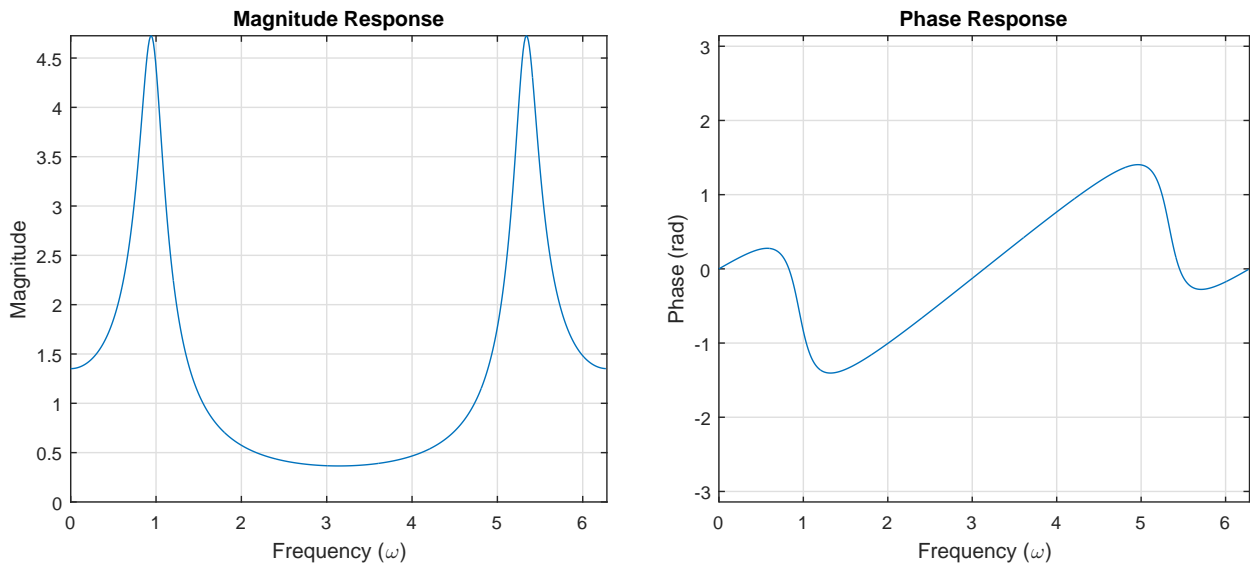
Η απόκριση πλάτους θα είναι ίση με

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{j2\omega}|}{|(e^{j\omega} - re^{j\theta})||e^{j\omega} - re^{-j\theta})|} = \frac{1}{|u_1||u_2|} \quad (89)$$

Δηλαδή, η απόκριση πλάτους εξαρτάται μόνο από τα μέτρα των διανυσμάτων  $u_1, u_2$ ! Όταν το διάνυσμα  $u_3$  αρχίζει να “τρέχει” επάνω στο μοναδιαίο κύκλο, μεταβάλλοντας τη γωνία  $\omega$  του, το μέτρο των  $u_1, u_2$  μεταβάλλεται, δίνοντάς μας τις τιμές της  $|H(e^{j\omega})|$  για κάθε  $\omega$ . Ας δούμε πως, εξετάζοντας μια πλήρη περιστροφή του  $u_3$ :

- Όταν  $\omega = 0$ , τα διανύσματα  $u_1, u_2$  έχουν το ίδιο μέτρο.
- Στη συνέχεια, το  $|u_1|$  μικραίνει όσο το  $\omega \rightarrow \theta$ , ενώ αντίστοιχα το  $|u_2|$  μεγαλώνει, και θα άρα το γινόμενο τους θα γίνει μέγιστο όταν  $\omega = \theta$ .
- Οπότε η  $|H(e^{j\omega})|$  θα ξεκινά από μια τιμή στο  $\omega = 0$ , έστω  $|H(e^{j0})|$ , και θα αυξάνει μέχρι το  $\omega = \theta$ , όπου το  $|H(e^{j\omega})|$  θα γίνει μέγιστο.
- Μετά, το διάνυσμα  $u_1$  θα αρχίσει να μεγαλώνει ξανά, ενώ το ίδιο θα κάνει και το  $u_2$ , άρα η  $|H(e^{j\omega})|$  θα φθίνει και πάλι μέχρι  $\omega = \pi$ , όπου τα μέτρα των  $u_1, u_2$  είναι ξανά ίσα. Εκεί, η απόκριση πλάτους θα έχει ελάχιστο.
- Όσο  $\omega \rightarrow -\theta$ , το  $|u_2|$  θα μικραίνει, ενώ το  $|u_1|$  θα μεγαλώνει, άρα η  $|H(e^{j\omega})|$  θα μεγαλώνει ξανά, μέχρι  $\omega = -\theta$ , όπου θα γίνει μέγιστη. Παρατηρήστε ότι η διαδικασία αυτή είναι συμμετρική με αυτή όταν  $\omega \rightarrow \theta$ .
- Όταν η  $\omega$  απομακρυνθεί από τη γωνία  $-\theta$  και  $\omega \rightarrow 0$ , η απόκριση πλάτους θα φθίνει ξανά, μέχρι να επανέλθει στην ίδια τιμή  $|H(e^{j0})|$  που είχε όταν  $\omega = 0$ , αφού τώρα έχει συμπληρώσει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.

Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές των πόλων είναι  $r = 0.86$  και  $\theta = \pm 0.9505 \approx \pm 55^\circ$ , τιμές που μοιάζουν να ανταποκρίνονται στο Σχήμα (12). Το φάσμα πλάτους φαίνεται στο Σχήμα (13). Παρατηρήστε ότι η ελάχιστη



Σχήμα 13: Φάσμα Πλάτους και Φάσμα Φάσης Συστήματος Δεύτερης Τάξης με δυο συζυγείς πόλους.

τιμή του είναι για  $\omega = \pi$ , όταν δηλαδή τα  $|u_1|, |u_2|$  γίνονται ταυτόχρονα μέγιστα, άρα το  $\frac{1}{|u_1||u_2|}$  ελάχιστο,

ενώ η μέγιστη τιμή του είναι για  $\omega = \pm\theta$ , όπως ακριβώς αναμενόταν από την προηγούμενη ανάλυσή μας.

Για τη φάση, έχουμε ότι

$$\arg\left[\frac{1}{(1 - re^{j\theta}e^{j\omega})(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega})}\right] = -\arg(1 - re^{j\theta}e^{j\omega}) - \arg(1 - re^{-j\theta}e^{j\omega}) \quad (90)$$

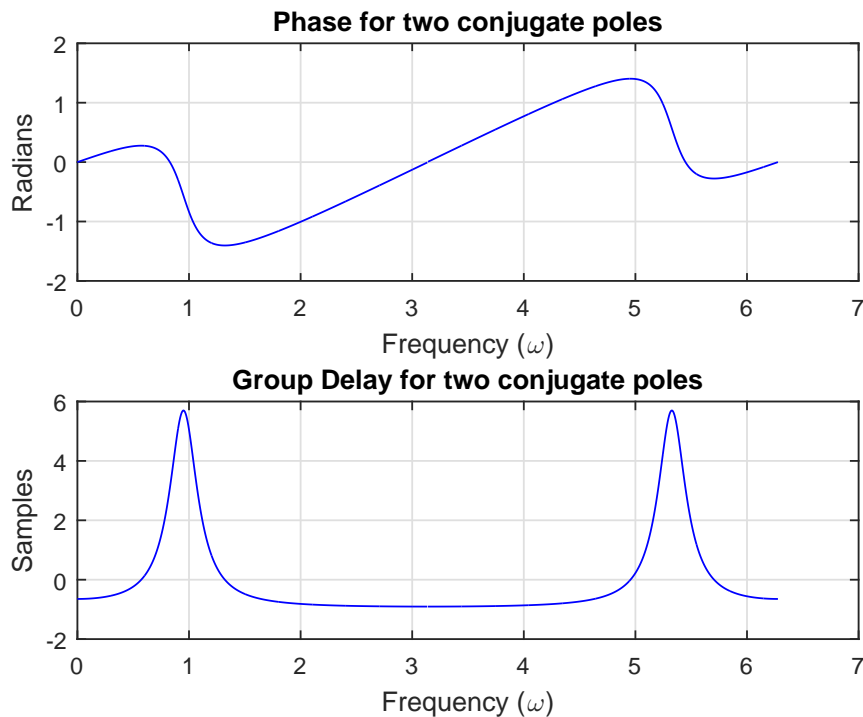
$$= -(\phi_1 - \omega) - (\phi_2 - \omega) \quad (91)$$

$$= 2\omega - \phi_1 - \phi_2 \quad (92)$$

με βάση τις Σχέσεις (67,80). Εδώ η απόκριση φάσης είναι πιο πολυπλοκή. Ας κάνουμε παρόμοια ανάλυση κι εδώ, με βάση το Σχήμα (12):

- Όταν  $\omega = 0$ , η απόκριση φάσης είναι  $\arg H(e^{j0}) = -\phi_1 - \phi_2 = 0$ , γιατί η  $\phi_1 = -\phi_2$ , και άρα  $\arg H(e^{j0}) = \phi_2 - \phi_2 = 0$ .
- Όταν  $\omega \rightarrow \theta$ , παρατηρούμε ότι η  $\phi_2$  μεγαλώνει, καθώς και η  $\phi_1$ , οπότε όταν  $\omega = \theta$ , έχουμε  $\arg H(e^{j\omega}) = 2\theta - \theta - \pi/2 = \theta - \pi/2$ .
- Όταν  $\omega = \pi$ , τότε  $\arg H(e^{j\pi}) = 2\pi - \phi_1 - \phi_2$ , όμως τότε  $\phi_2 = 2\pi - \phi_1$ , και άρα  $\arg H(e^{j\pi}) = 0$ .
- Τέλος, όταν  $\omega$  απομακρύνεται από το  $\pi$  και προχωρά προς το  $2\pi$ , η  $\arg H(e^{j\omega})$  θα έχει περιττή συμμετρία σε σχέση με την καμπύλη που μόλις περιγράψαμε όσο  $\omega \in (0, \pi]$ .

Επιβεβαιώστε τα παραπάνω κοιτάζοντας το Σχήμα (13). Τέλος, για την καθυστέρηση ομάδας, γνωρίζοντας την φάση και παραγωγίζοντάς την, μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικά τη γραφική παράστασή της, όπως στο Σχήμα (14).



Σχήμα 14: Φάση Φάσης και Καθυστέρηση Ομάδας Συστήματος Δεύτερης Τάξης με δυο συζυγείς πόλους.

Παράδειγμα 4:

Θεωρήστε το σύστημα

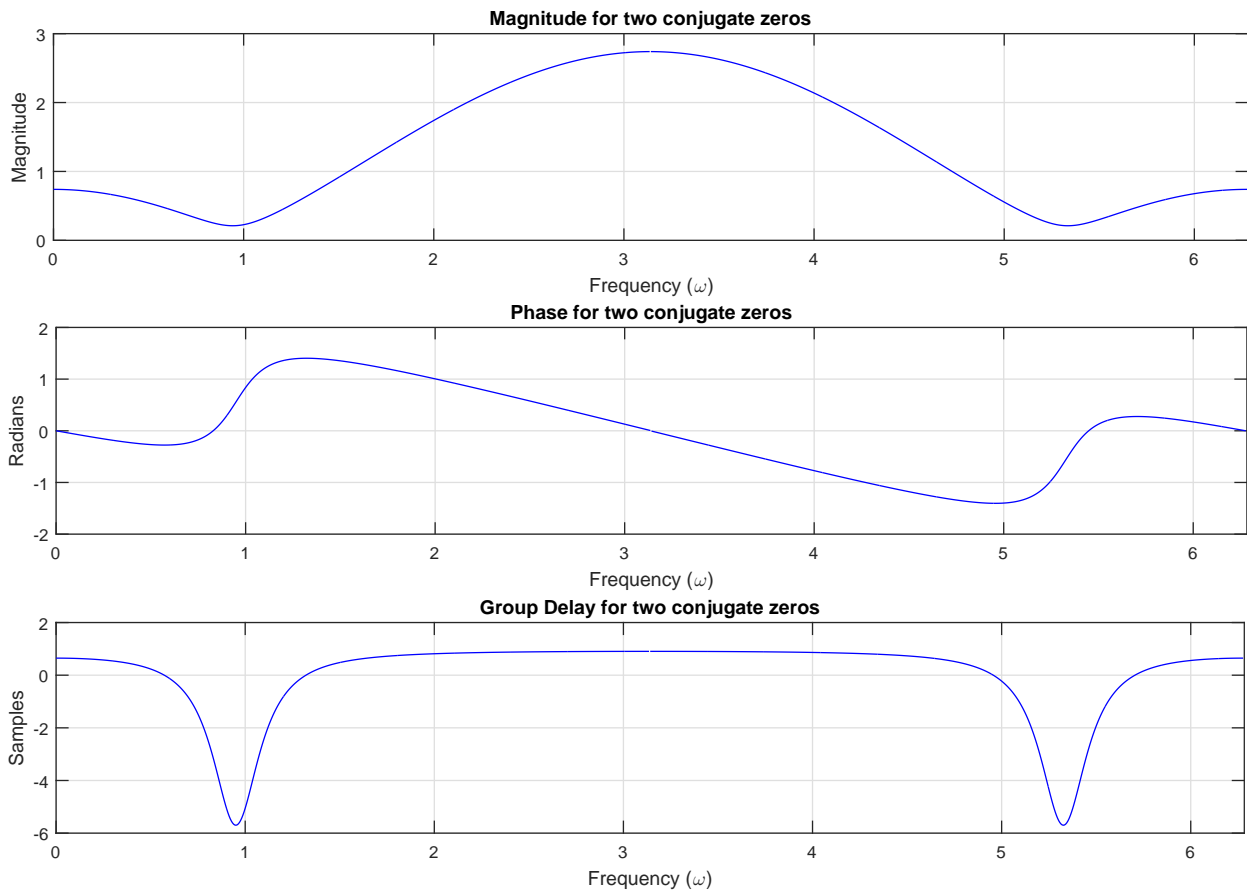
$$h[n] = \delta[n] - 2r \cos(\omega - \theta)\delta[n - 1] + r^2\delta[n - 2] \quad (93)$$

με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = 1 - 2r \cos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2} \quad (94)$$

Προσέξτε ότι η  $H(z)$  είναι η αντίστροφη του συστήματος του Παραδείγματος 3! Σύμφωνα λοιπόν με όσα έχουμε πει για τα αντίστροφα συστήματα, θα πρέπει οι αποκρίσεις πλάτους, φάσης, και καθυστέρησης ομάδας να είναι οι αντίστροφες απ' αυτές του Παραδείγματος 3.

Πράγματι, για  $r = 0.86$  και  $\theta = 0.9505$ , έχουμε τις αποκρίσεις του Σχήματος (15).



Σχήμα 15: Φάσμα Πλάτους, Φάσμα Φάσης, και Καθυστέρηση Ομάδας Συστήματος Δεύτερης Τάξης με δυο συζυγή μηδενικά.

Όλη η παραπάνω συζήτηση μας υποδεικνύει ότι όταν ένας πόλος είναι κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, το πλάτος αυξάνεται γρήγορα ενώ η φάση μικραίνει γρήγορα όταν περνάμε κοντά απ' αυτόν τον πόλο. Όμοια, όταν ένα μηδενικό είναι κοντά στο μοναδιαίο κύκλο, το πλάτος μειώνεται γρήγορα, ενώ η φάση μεγαλώνει γρήγορα όταν περνάμε κοντά απ' αυτό το μηδενικό. Επειδή η καθυστέρηση ομάδας (group delay) είναι η αρνητική παράγωγος της φάσης, αυτό σημαίνει ότι η καθυστέρηση ομάδας είναι μεγάλη και θετική κοντά σε έναν πόλο, και μεγάλη και αρνητική κοντά σε ένα μηδενικό. :-). Φυσικά, όλη αυτή η γεωμετρική ανάλυση και η ακρίβειά της δυσκολεύει όσο μεγαλώνει ο αριθμός των πόλων και των μηδενικών.

## 4 Σχέση Πλάτους και Φάσης

Μετά από όλη αυτή τη συζήτηση περί φασμάτων πλάτους και φάσης ενός ΓΧΑ συστήματος, θα μπορούσε κάποιος να αναρωτηθεί: υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ φάσματος πλάτους και φάσματος φάσης; Μπορεί να βρεθεί το ένα από το άλλο, μονοσήμαντα; Κι αν ναι, πότε;

Κατ' αρχάς πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι οι ερωτήσεις αυτές είναι ενδιαφέρουσες. :-) Έπειτα, ας προσπαθήσουμε να μελετήσουμε αν κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί - η απάντηση θα είναι έκπληξη στο τέλος ;-). Εν γένει, το φάσμα πλάτους δε μας δίνει κάποια πληροφορία για το φάσμα φάσης, και το αντίστροφο. Όμως, αν γνωρίζουμε πόσους πόλους και πόσα μηδενικά έχει ένα σύστημα, καθώς και την απόκριση πλάτους  $|H(e^{j\omega})|$ , τότε έχουμε πεπερασμένους πλήθους επιλογές για τη φάση. Όμοια ακριβώς, αν γνωρίζουμε πόσους πόλους και πόσα μηδενικά έχει ένα σύστημα, καθώς και την απόκριση φάσης  $\angle H(e^{j\omega})$ , τότε έχουμε πεπερασμένους πλήθους επιλογές για την απόκριση πλάτους! Κι ακόμα, αν το σύστημα έχει έναν περιορισμό ο οποίος ονομάζεται *ελάχιστη φάση* - *minimum phase*, τότε μπορεί μονοσήμαντα να οριστεί η φάση από το φάσμα πλάτους, ενώ και η φάση μπορεί να ορίσει το φάσμα πλάτους σχεδόν μονοσήμαντα (με διαφορά μιας σταθεράς)!

Ας δούμε αρχικά γιατί δεν μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα η συνάρτηση μεταφοράς από το φάσμα πλάτους. Η μελέτη μας θα γίνει μέσω διαγραμμάτων πόλων-μηδενικών, αφού στην ουσία μέσω της γνώσης αυτών ορίζεται (σχεδόν μονοσήμαντα) η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$ .

Ας εκφράσουμε το  $|H(e^{j\omega})|^2$  ως

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H(z)H^*(1/z^*) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (95)$$

Αυτό σημαίνει ότι το τετράγωνο της απόκρισης πλάτους είναι η εκτίμηση επάνω στο μοναδιαίο κύκλο του μετασχ. Z

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - b_k z^{-1})(1 - b_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - a_k z^{-1})(1 - a_k^* z)} \quad (96)$$

αν θεωρήσουμε ότι η  $H(z)$  είναι μια ρητή συνάρτηση μεταφοράς, όπως την έχουμε δει τόσες φορές, δηλ.

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^N (1 - b_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - a_k z^{-1})} \quad (97)$$

και άρα

$$H^*(1/z^*) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^N (1 - b_k^* z)}{a_0 \prod_{k=1}^M (1 - a_k^* z)} \quad (98)$$

Άρα αν μας δωθεί το  $|H(e^{j\omega})|^2$ , αν αντικαταστήσουμε  $z = e^{j\omega}$ , μπορούμε να βρούμε το  $C(z) = H(z)H^*(1/z^*)$ . Από το  $C(z)$  θέλουμε να μάθουμε όσα μπορούμε περισσότερα για το  $H(z)$ . Παρατηρώντας τη Σχέση (96), βλέπουμε ότι για κάθε πόλο  $a_k$  του  $H(z)$ , έχουμε έναν πόλο  $a_k$  κι έναν πόλο  $(a_k^*)^{-1}$  στο  $C(z)$ . Αντίστοιχα, βλέπουμε ότι για κάθε μηδενικό  $b_k$  του  $H(z)$ , έχουμε ένα μηδενικό  $b_k$  κι ένα μηδενικό  $(b_k^*)^{-1}$  στο  $C(z)$ . Αυτό μας δείχνει ότι οι πόλοι και τα μηδενικά "έρχονται" σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη<sup>4</sup> στο  $C(z)$ . Παρατηρήστε ότι το ένα στοιχείο ενός αμοιβαίου συζυγούς ζεύγους σχετίζεται με το  $H(z)$ , ενώ το άλλο με το  $H^*(1/z^*)$ . Επιπλέον, αν το ένα στοιχείο του ζεύγους βρίσκεται εντός του μοναδιαίου κύκλου, τότε το άλλο βρίσκεται εκτός (στην αμοιβαία συζυγή θέση)<sup>5</sup>.

Αν υποθέσουμε ότι το  $H(z)$  είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε όλοι οι πόλοι του θα είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Με αυτόν τον περιορισμό, μας είναι εύκολο να ξεχωρίσουμε τους πόλους του  $H(z)$  από το  $C(z)$ . Όμως χωρίς να ξέρουμε τίποτα για τα μηδενικά, δεν μπορούμε να βρούμε τα μηδενικά του  $H(z)$  από το  $C(z)$ , κι έτσι να ορίσουμε μονοσήμαντα το  $H(z)$ . Ας το δούμε αυτό σε ένα παράδειγμα.

<sup>4</sup> Συζυγές αμοιβαίο θα λέμε το ζεύγος πόλων ή μηδενικών που τα στοιχεία του ζεύγους βρίσκονται σε θέσεις  $z = re^{j\theta}$  το ένα και  $z = \frac{1}{r}e^{j\theta}$  το άλλο.

<sup>5</sup> Εκτός κι αν βρίσκονται στην ίδια θέση, επάνω στο μοναδιαίο κύκλο.



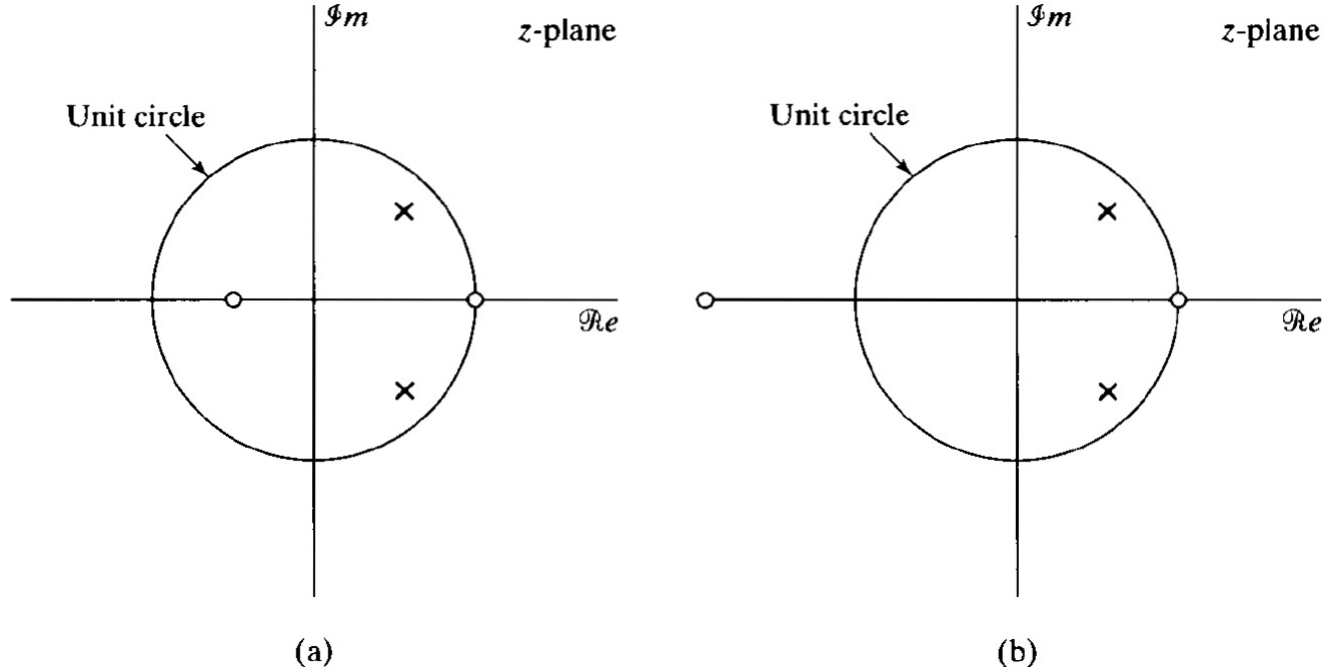
Παράδειγμα

Έστω δυο ευσταθή συστήματα με συναρτήσεις μεταφοράς

$$H_1(z) = \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})} \quad (99)$$

$$H_2(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})} \quad (100)$$

Τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών των δυο αυτών συστημάτων φαίνονται στο Σχήμα (16). Ας σχηματίσουμε



Σχήμα 16: Διαγράμματα πόλων-μηδενικών των  $H_1(z)$  και  $H_2(z)$  αντίστοιχα.

το  $C(z)$  για κάθε σύστημα. Είναι

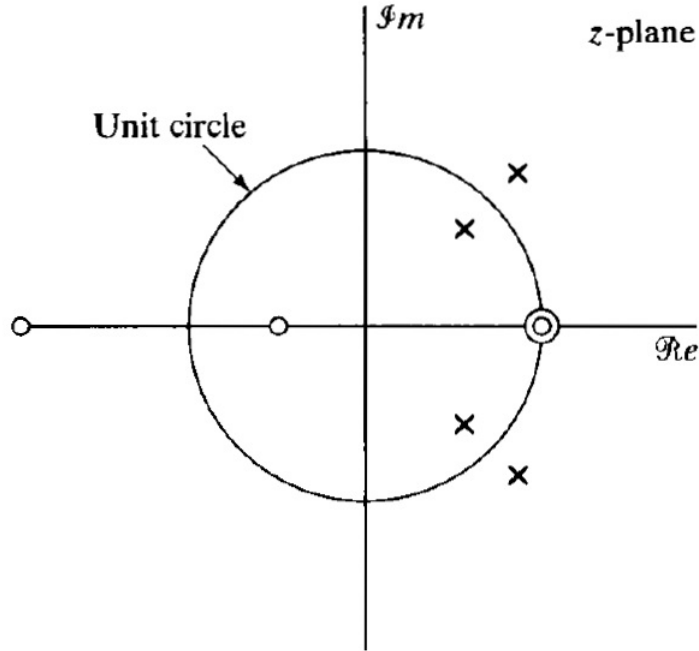
$$C_1(z) = \frac{2(1 - z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})} \frac{2(1 - z)(1 + 0.5z)}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z)(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z)} \quad (101)$$

$$C_2(z) = \frac{(1 - z^{-1})(1 + 2z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z^{-1})} \frac{(1 - z)(1 + 2z)}{(1 - 0.8e^{j\pi/4}z)(1 - 0.8e^{-j\pi/4}z)} \quad (102)$$

Όμως ο αριθμητής του  $C_1(z)$  είναι

$$4(1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.5z)(1 - z^{-1})(1 - z) = (1 + 2z^{-1})(1 + 2z)(1 - z^{-1})(1 - z) \quad (103)$$

δηλ. ίσος με τον αριθμητή του  $C_2(z)$ . Οι παρονομαστές είναι επίσης ίδιοι, άρα τελικά  $C_1(z) = C_2(z)$ , με διάγραμμα πόλων-μηδενικών όπως στο Σχήμα (17)! Οι συναρτήσεις μεταφοράς  $H_1(z), H_2(z)$  στο παραπάνω παράδειγμα διαφέρουν μόνο στη θέση των μηδενικών. Στο παράδειγμα αυτό, ο όρος  $2(1 + 0.5z^{-1}) = (z^{-1} + 2)$  συνεισφέρει το ίδιο στο τετράγωνο της απόκρισης πλάτους με τον όρο  $(1 + 2z^{-1})$ , και κατά συνέπεια, οι αποκρίσεις πλάτους  $|H_1(e^{j\omega})|$  και  $|H_2(e^{j\omega})|$  είναι ίσες. Όμως, οι αποκρίσεις φάσεις αυτών των δυο φασματικών αποκρίσεων είναι διαφορετικές. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι ένα συγκεκριμένο  $C(z)$  δεν μπορεί να αντιστοιχιστεί μονοσήμαντα σε ένα  $H(z)$ , ή με άλλα λόγια, δεν μπορούμε μονοσήμαντα να βρούμε το  $H(z)$  από το  $C(z)$ .



Σχήμα 17: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών του  $C_1(z) = C_2(z)$ .

Κάποιος θα μπορούσε όμως να πει ότι υπάρχουν πεπερασμένες επιλογές για τα πιθανά  $H(z)$  που μπορούν να προκύψουν από ένα δεδομένο  $C(z)$ , οπότε ίσως αυτές οι επιλογές - αν βρεθούν - να αρκούν. Ας δούμε αν είναι έτσι.

#### Παράδειγμα

Έστω ότι μας δίνουν ένα διάγραμμα πόλων-μηδενικών για το  $C(z)$ , όπως στο Σχήμα (18). Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τους πόλους και τα μηδενικά του  $H(z)$ . Γνωρίζουμε ότι οι πόλοι και τα μηδενικά που αποτελούν στοιχεία συζυγών αμοιβαίων ζευγών θα ανήκουν το ένα στο  $H(z)$  και το άλλο στο  $H^*(1/z^*)$ . Τα ζεύγη αυτά είναι:

$$PP_1 := (p_1, p_4) \quad (104)$$

$$PP_1 := (p_2, p_5) \quad (105)$$

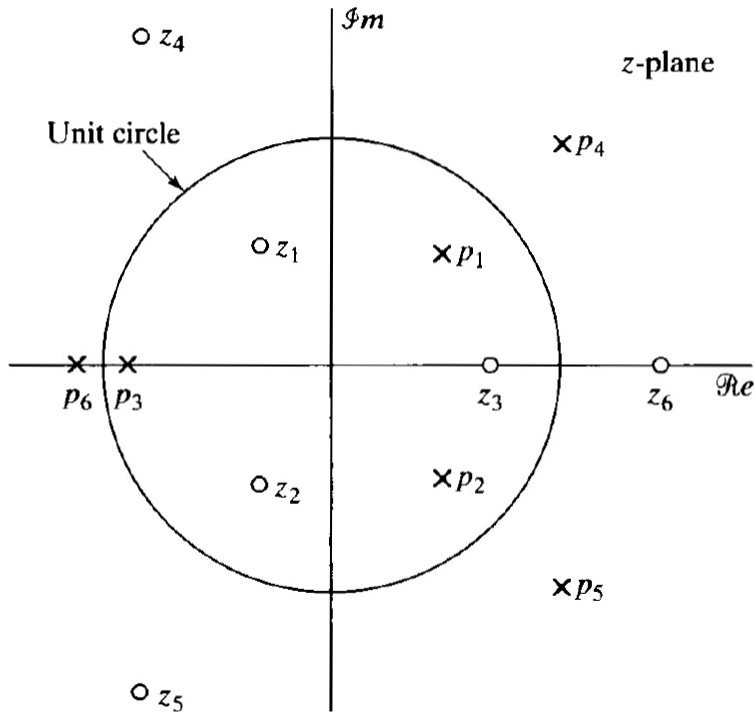
$$PP_1 := (p_3, p_6) \quad (106)$$

$$ZP_1 := (z_1, z_4) \quad (107)$$

$$ZP_1 := (z_2, z_5) \quad (108)$$

$$ZP_1 := (z_3, z_6) \quad (109)$$

με  $PP_x$  τα ζεύγη πόλων και  $ZP_x$  τα ζεύγη μηδενικών. Προφανώς αν δεν έχουμε καμία άλλη πληροφορία για το  $H(z)$ , υπάρχουν πολλοί τρόποι να αντιστοιχίσουμε πόλους και μηδενικά σε αυτό. Αν όμως γνωρίζουμε ότι το  $H(z)$  είναι ευσταθές και αιτιατό, τότε ξέρουμε ότι οι πόλοι που θα διαλέξουμε από κάθε ζεύγος  $PP_x$  θα πρέπει να είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου. Άρα επιλέγουμε τους  $p_1, p_2, p_3$ . Όμως δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για τα μηδενικά όταν μιλάμε για ευσταθή και αιτιατά συστήματα. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές  $c_k, d_k$  της εξίσωσης διαφορών που περιγράφει το σύστημα  $H(z)$  είναι πραγματικοί. Αυτό σημαίνει ότι οι πόλοι και τα μηδενικά έρχονται σε συζυγή ζεύγη ή είναι πραγματικοί αριθμοί. Με αυτόν τον περιορισμό, τα μηδενικά (τους πόλους τους διαλέξαμε ήδη) του  $H(z)$  μπορούν να



Σχήμα 18: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών του  $C(z)$ .

είναι:

$$z_3 \quad \text{ή} \quad z_6 \quad (110)$$

$$(z_1, z_2) \quad \text{ή} \quad (z_4, z_5) \quad (111)$$

Έτσι, έχουμε συνολικά τέσσερα διαφορετικά συστήματα  $H_i(z)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  που είναι ευσταθή και αιτιατά, με πραγματικούς συντελεστές, και τρεις πόλους και τρία μηδενικά το καθένα, των οποίων το διάγραμμα πόλων-μηδενικών του  $C(z)$  τους είναι αυτό του Σχήματος (18), και κατά συνέπεια, το φάσμα πλάτους τους,  $|H_i(e^{j\omega})|$  είναι το ίδιο για όλα.

Φαίνεται ως τώρα λοιπόν ότι ακόμα κι αν δε γνωρίζουμε πόσους πόλους ή πόσα μηδενικά έχει ένα σύστημα  $H(z)$ , μπορούμε να βρούμε πεπερασμένου πλήθους  $H_i(z)$  από ένα δοθέν  $C(z)$ , αν υποθεσουμε κάποια πράγματα για την ευστάθεια ή αιτιατότητα ή αν έχουμε κάποια άλλη πληροφορία, τα οποία όλα να έχουν ίδιο φάσμα πλάτους  $|H_i(e^{j\omega})|$  αλλά διαφορετικό φάσμα φάσης  $\arg[H_i(e^{j\omega})]$ .

Άρα μήπως απαντήσαμε στο αρχικό μας ερώτημα

“μπορώ να βρω γενικά το  $H(z)$ , και άρα το  $|H(e^{j\omega})|$ , από το  $C(z) = |H(z)|^2$ ;

Η απάντησή μας ως τώρα είναι “Ναι, αλλά όχι μονοσήμαντα, υπάρχουν όμως πεπερασμένου πλήθους συστήματα που έχουν ίδιο  $|H(e^{j\omega})|$ ”. Κάτι είναι κι αυτό, αν ισχύει. :-) Προσέξτε - δυστυχώς :-(- όμως το εξής. Αν ένα  $H(z)$  από αυτά τα τέσσερα που βρήκαμε έχει έναν όρο της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (112)$$

δηλ. μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = H_1(z)H_{ap}(z) = H_1(z)\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (113)$$

τότε αν βρούμε το  $C(z)$  ξανά, είναι

$$C(z) = H(z)H^*(1/z^*) = H_1(z)\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}\left(H_1(1/z^*)\frac{z^* - a^*}{1 - az^*}\right)^* = H_1(z)H_1^*(1/z^*) \quad (114)$$

γιατί

$$H_{ap}(z)H_{ap}^*(1/z^*) = \left(\frac{z^* - a^*}{1 - az^*}\right)^* \left(\frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}}\right) = \frac{z - a}{1 - a^*z} \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} = \frac{1 - a^*z - az^{-1} + |a|^2}{1 - az^{-1} - a^*z + |a|^2} = 1 \quad (115)$$

Αυτο τι σημαίνει;; Σημαίνει ότι το  $H(z)$  και  $H_1(z)$  έχουν το ίδιο  $C(z)$ , και άρα το ίδιο  $|H(e^{j\omega})|$ ! Αυτό συμβαίνει γιατί ο όρος  $H_{ap}(z)$  ακυρώνεται στο  $C(z)$ , λόγω της παρουσίας του όρου

$$H_{ap}^*(1/z^*) = \frac{z - a}{1 - a^*z} \quad (116)$$

και άρα ο πόλος  $z = 1/a^*$  και το μηδενικό  $z = a$  του  $H_{ap}(z)$  δεν εμφανίζονται ποτέ στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών του  $C(z)$ !!

Έτσι, αν ο αριθμός των πόλων και των μηδενικών του  $H(z)$  δε μας είναι γνωστός, δεδομένου ενός  $C(z)$ , υπάρχουν άπειρες επιλογές  $H(z)$ , γιατί για κάθε ένα  $H(z)$  που μπορεί κανείς να βρει, μπορεί να θεωρήσει ότι υπάρχουν άπειροι όροι της μορφής

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad (117)$$

πολλαπλασιασμένοι με το  $H(z)$  που βρέθηκε, οι οποίοι δε φαίνονται στο διάγραμμα πόλων-μηδενικών του  $C(z)$ , λόγω της ακύρωσής τους με τους πόλους και τα μηδενικά του όρου

$$H_{ap}^*(1/z^*) = \frac{z - a}{1 - a^*z} \quad (118)$$

Το ενδιαφέρον στην υπόθεση είναι ότι αυτοί οι όροι  $H_{ap}(z)$  έχουν μοναδιαία απόκριση πλάτους, όπως θα δούμε σύντομα, δηλ.

$$|H_{ap}(e^{j\omega})| = 1, \quad \forall \omega \quad (119)$$

Είναι αρκετά εύκολο να το δείξετε. Άρα όλα αυτά τα διαφορετικά  $H_i(z)$  που μπορούν να βρεθούν λόγω των διαφορετικών  $H_{ap}(z)$  που μπορεί να υπάρχουν ως όροι τους, θα έχουν φασματική απόκριση  $H(e^{j\omega})$  με ίδιο πλάτος αλλά με διαφορετική φάση το καθένα, λόγω της επίδρασης της φάσης του όρου  $H_{ap}(z)$ <sup>6</sup>.

Οπότε τελικά, η απάντηση στο ερώτημα

**“μπορώ να βρω γενικά το  $H(z)$ , και άρα το  $|H(e^{j\omega})|$ , από το  $C(z) = |H(z)|^2$ ;**”

είναι *OXI*, δεν μπορεί να βρεθεί μονοσήμαντα το  $H(z)$  από το  $C(z)$ , υπάρχουν άπειρες πιθανές επιλογές για το  $H(z)$ , οι οποίες γίνονται πεπερασμένες αν γνωρίζουμε το πλήθος των πόλων και των μηδενικών του  $H(z)$ .

Φυσικά, αυτοί οι περίφημοι όροι  $H_{ap}(z)$  δε θα μπορούσαν να μην έχουν το δικό τους όνομα. Τέτοια συστήματα ονομάζονται *all-pass* συστήματα, και θα τα μελετήσουμε αμέσως τώρα.

<sup>6</sup>Του οποίου τη φάση δεν έχουμε μελετήσει αλλά σας λέμε τώρα ότι είναι μη μηδενική :-)

## 5 All-pass Συστήματα

Ένα all-pass σύστημα (όπως προδίδει και το όνομά του :-)) έχει απόκριση σε συχνότητα που έχει σταθερό πλάτος, δηλ.

$$|H(e^{j\omega})| = 1, \quad \forall \omega \quad (120)$$

δηλ. ένα all-pass σύστημα αφήνει αμετάβλητο το πλάτος του σήματος που δέχεται στην είσοδό του. Αυτή η ιδιότητα επιβάλλει τον περιορισμό στους πόλους και τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς να βρίσκονται σε συζυγή αμοιβαία ζευγη:

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \quad (121)$$

Έτσι, αν το  $H(z)$  έχει έναν πόλο στη θέση  $z = a_k$ , πρέπει να έχει κι ένα μηδενικό στη συζυγή αμοιβαία θέση  $z = 1/a_k^*$ . Αν η  $h[n]$  είναι πραγματική, οι μιγαδικές ρίζες στην παραπάνω σχέση έρχονται σε συζυγή ζευγη, και αν συνδυάσουμε αυτά τα ζευγη για να πάρουμε παράγοντες δευτερης τάξης, θα έχουμε

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{N_1} \frac{z^{-1} - b_k}{1 - b_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{(z^{-1} - d_k^*)(z^{-1} - d_k)}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \quad (122)$$

με συντελεστές  $b_k$  πραγματικούς και  $d_k$  μιγαδικούς, και τη σταθερά  $A$  πραγματικό αριθμό.

Αν ένα all-pass σύστημα είναι ευσταθές και αιτιατό, έχει προφανώς όλους τους πόλους του εντος του μοναδιαίου κύκλου,  $|a_k| < 1$ .

Η απόκριση φάσης για ένα τέτοιο φίλτρο πρώτης τάξης είναι της μορφής

$$\angle \left[ \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - a e^{j\omega}} \right] = \angle \left[ \frac{e^{-j\omega} - r e^{-j\theta}}{1 - r e^{j\theta} e^{j\omega}} \right] = -\omega - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} \quad (123)$$

ενώ για ένα δευτέρας τάξης με πόλους στις θέσεις  $z = r e^{j\theta}$  και  $z = r e^{-j\theta}$ , είναι

$$\angle \left[ \frac{(e^{-j\omega} - r e^{-j\theta})(e^{-j\omega} - r e^{j\theta})}{(1 - r e^{j\theta} e^{j\omega})(1 - r e^{-j\theta} e^{j\omega})} \right] = -2\omega - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega - \theta)}{1 - r \cos(\omega - \theta)} - 2 \tan^{-1} \frac{r \sin(\omega + \theta)}{1 - r \cos(\omega + \theta)} \quad (124)$$

Ένα αιτιατό all-pass σύστημα έχει καθυστέρηση ομάδας που είναι μη-αρνητική για κάθε  $\omega$ . Αυτό γιατί για ένα πρώτης τάξης all-pass συστημα της μορφης

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - a z^{-1}} \quad (125)$$

με  $a = r e^{j\theta}$ ,  $|r| < 1$ , η καθυστέρηση ομάδας δίνεται από (δειξτε το αναλυτικά! :-))

$$\text{grad}[H(e^{j\omega})] = \frac{1 - r^2}{|1 - r e^{j\theta} e^{-j\omega}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \theta)} \quad (126)$$

Έτσι, για  $0 \leq r < 1$ , συνεπάγεται ότι  $\text{grad}[H(e^{j\omega})] \geq 0$ . Αυτό όμως μας δίνει μια πολύ σημαντική ιδιότητα των αιτιατών συστημάτων all-pass: ότι η απόκριση φάσης είναι αρνητική. Ας το δείξουμε.

Η φάση δίνεται ως

$$\text{arg}[H_{ap}(e^{j\omega})] = - \int_0^\omega \text{grad}[H_{ap}(e^{j\phi})] d\phi + \text{arg}[H_{ap}(e^{j0})] \quad (127)$$

για  $0 \leq \omega \leq \pi$ . Όμως μπορούμε να δείξουμε από τη Σχέση (122) ότι

$$H_{ap}(e^{j0}) = A \prod_{k=1}^{N_1} \frac{1 - b_k}{1 - b_k} \prod_{k=1}^{N_2} \frac{|1 - d_k|^2}{|1 - d_k|^2} = A \quad (128)$$

Άρα

$$\arg[H_{ap}(e^{j0})] = 0 \quad (129)$$

και έτσι, αφού

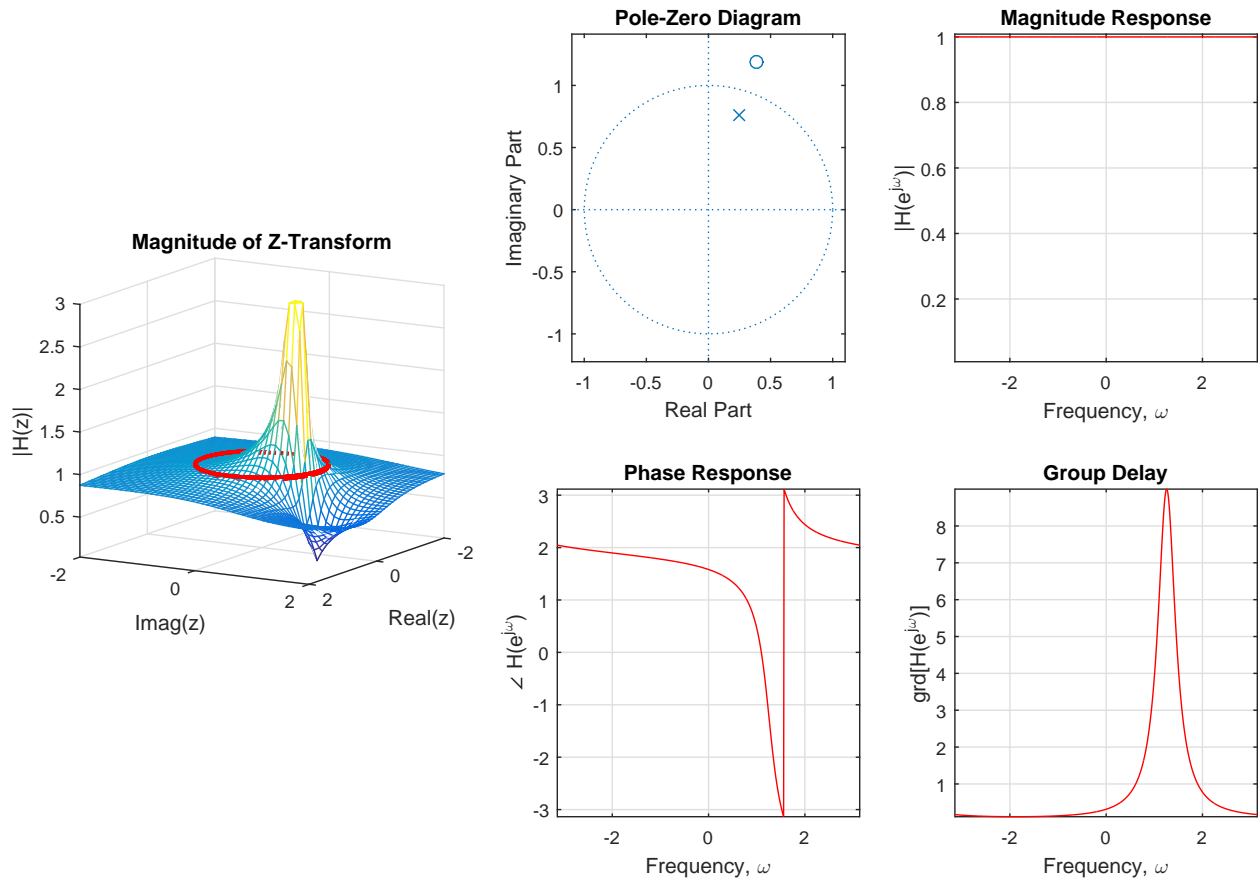
$$\text{grad}[H(e^{j\omega})] \geq 0 \quad (130)$$

η Σχέση (127) δίνει

$$\arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \leq 0 \quad (131)$$

για  $0 \leq \omega \leq \pi$ .

Επειδή τα υψηλότερης τάξης all-pass συστήματα αποτελούνται από γινόμενα όρων πρώτης τάξης, η καθυστέρηση ομάδας ισούται με ένα άθροισμα καθυστερήσεων ομάδας όπως αυτής της Σχέσης (126). Το ίδιο και η φάση. Άρα εν γένει, ένα αιτιατό all-pass σύστημα έχει πάντα θετική καθυστέρηση ομάδας και αρνητική απόκριση φάσης, όπως μόλις δείξαμε. Η ιδιότητα αυτή είναι αρκετά σημαντική. Ένα παράδειγμα ευσταθούς και αιτιατού all-pass συστήματος πρώτης τάξης φαίνεται στο Σχήμα (19), όπου  $a = 0.8e^{j0.4\pi}$ . Τα



Σχήμα 19: Φασματικές αποκρίσεις ενός all-pass συστήματος.

all-pass φίλτρα είναι χρήσιμα για εφαρμογές εξίσωσης καθυστέρησης ομάδας, για να αντισταθμίζουν τις μη γραμμικότητες της φάσης σε διάφορες εφαρμογές (επεξεργασία φωνής, ήχου). Επίσης, θα χρειαστούν για τη θεωρία των φίλτρων ελάχιστης φάσης - *minimum phase* που θα δούμε αμέσως. Επίσης, χρησιμοποιούνται για μετατροπή χαμηλοπερατών φίλτρων σε άλλα φίλτρα.

## 6 Συστήματα Ελαχίστης Φάσης - Minimum Phase Systems

Αφού λοιπόν μελετήσαμε τα all-pass συστήματα, ας επανέλθουμε στο πρότερο πρόβλημα της μελέτης της απόκρισης πλάτους μέσω των πόλων και των μηδενικών του  $C(z) = |H(z)|^2$ . Βρήκαμε στην Ενότητα (4) ότι δεν υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του  $C(z)$  και του  $H(z)$ , τουλάχιστον, υπάρχουν άπειρα συστήματα  $H(z)$  με ίδια απόκριση πλάτους αλλά διαφορετική απόκριση φάσης που ικανοποιούν το  $C(z)$ . Η κατάσταση γίνεται κάπως πιο “βατή” αν ξέρουμε τον αριθμό των πόλων και των μηδενικών του συστήματος, καθώς τότε τα συστήματα  $H(z)$  γίνονται πεπερασμένου πλήθους.

Έστω ότι θεωρούμε ένα ευσταθές και αιτιατό ΓΧΑ σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς που έχει όλους τους πόλους του εντός του μοναδιαίου κύκλου. Τα μηδενικά μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στο μιγαδικό επίπεδο, δεν έχουν κάποιο περιορισμό λόγω της ευστάθειας ή της αιτιατότητας. Σε αρκετες εφαρμογές, χρειαζόμαστε ένα σύστημα που να είναι ευσταθές και αιτιατό, αλλά να έχει ευσταθές και αιτιατό αντίστροφο σύστημα,  $H_i(z)$ . Αυτό απαιτεί, μια και τα μηδενικά του  $H(z)$  γίνονται πόλοι του  $H_i(z)$ , να είναι και τα μηδενικά του  $H(z)$  εντός του μοναδιαίου κύκλου.

Ένα τέτοιο σύστημα λοιπόν, που έχει και πόλους και μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου, λέγεται *σύστημα ελάχιστης φάσης - minimum phase system*. Παρ’ ότι το όνομά του δεν προέρχεται από την κατανομή πόλων και μηδενικών, θα δούμε μερικές ιδιότητες της απόκρισης φάσης του που κάνουν πιο κατανοητή την ονομασία του.

### 6.1 Παραγοντοποίηση Συστημάτων σε Ελάχιστης Φάσης και All-pass Συστήματα

Ένα οποιοδήποτε σύστημα  $H(z)$  μπορεί πάντα να παραγοντοποιηθεί ως το γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης,  $H_{min}(z)$ , και ενός all-pass συστήματος,  $H_{ap}(z)$ :

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) \quad (132)$$

Για αυτήν την παραγοντοποίηση ισχύει ότι

$$|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})||H_{ap}(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})| \quad (133)$$

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (134)$$

Άρα βλέπουμε ότι ένα σύστημα ελάχιστης φάσης έχει την ίδια απόκριση πλάτους με το μη-ελάχιστης φάσης σύστημα!

Η διαδικασία παραγοντοποίησης έχει ως εξής:

1. Όλα τα μηδενικά του  $H(z)$  που βρίσκονται εκτός του μοναδιαίου κύκλου αντικατοπτρίζονται εντός του μοναδιαίου κύκλου, στα συζυγή αμοιβαία μηδενικά. Η συνάρτηση μεταφοράς που προκύπτει είναι ελάχιστης φάσης,  $H_{min}(z)$ .
2. Το all-pass σύστημα επιλέγεται έτσι ώστε να αντικατοπτρίζει το καταλλήλο σύνολο από μηδενικά του  $H_{min}(z)$  πάλι ξανά εκτός του μοναδιαίου κύκλου.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (135)$$

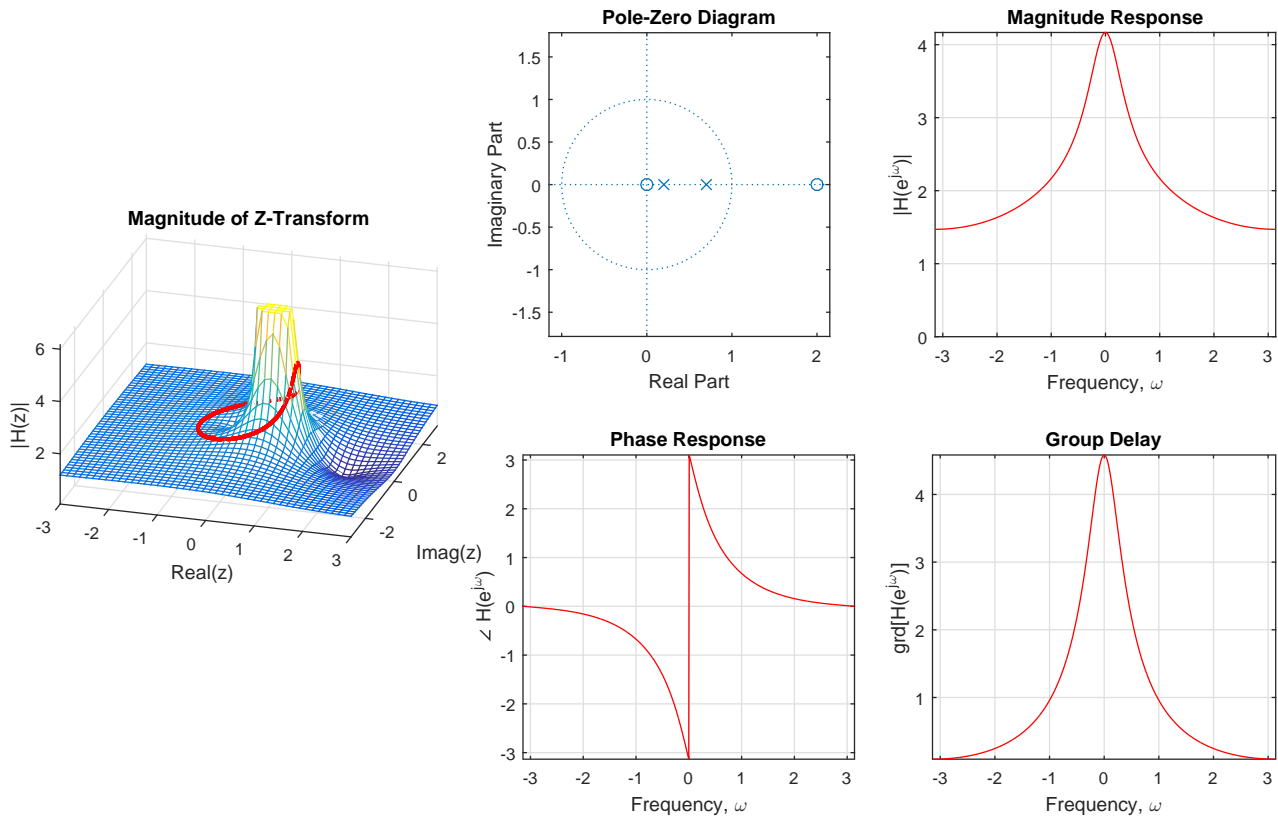
Το σύστημα ελάχιστης φάσης είναι το

$$H_{min}(z) = \frac{z^{-1} - 2}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})} \quad (136)$$

Τώρα, για να αντικατοπτρίσουμε το μηδενικό στη θέση  $z = 0.5$  πάλι έξω από το μοναδιαίο κύκλο στη θέση  $z = 2$ , χρησιμοποιούμε το all-pass σύστημα

$$H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1} - 2} \quad (137)$$

Η παραγοντοποίηση για αιτιατά και ευσταθή συστήματα φαίνεται στα Σχήματα (20,21,22). Το Σχήμα (20) δείχνει τα φασματικά χαρακτηριστικά του αρχικού συστήματος  $H(z)$ . Το Σχήμα (21) δείχνει τα χαρακτη-



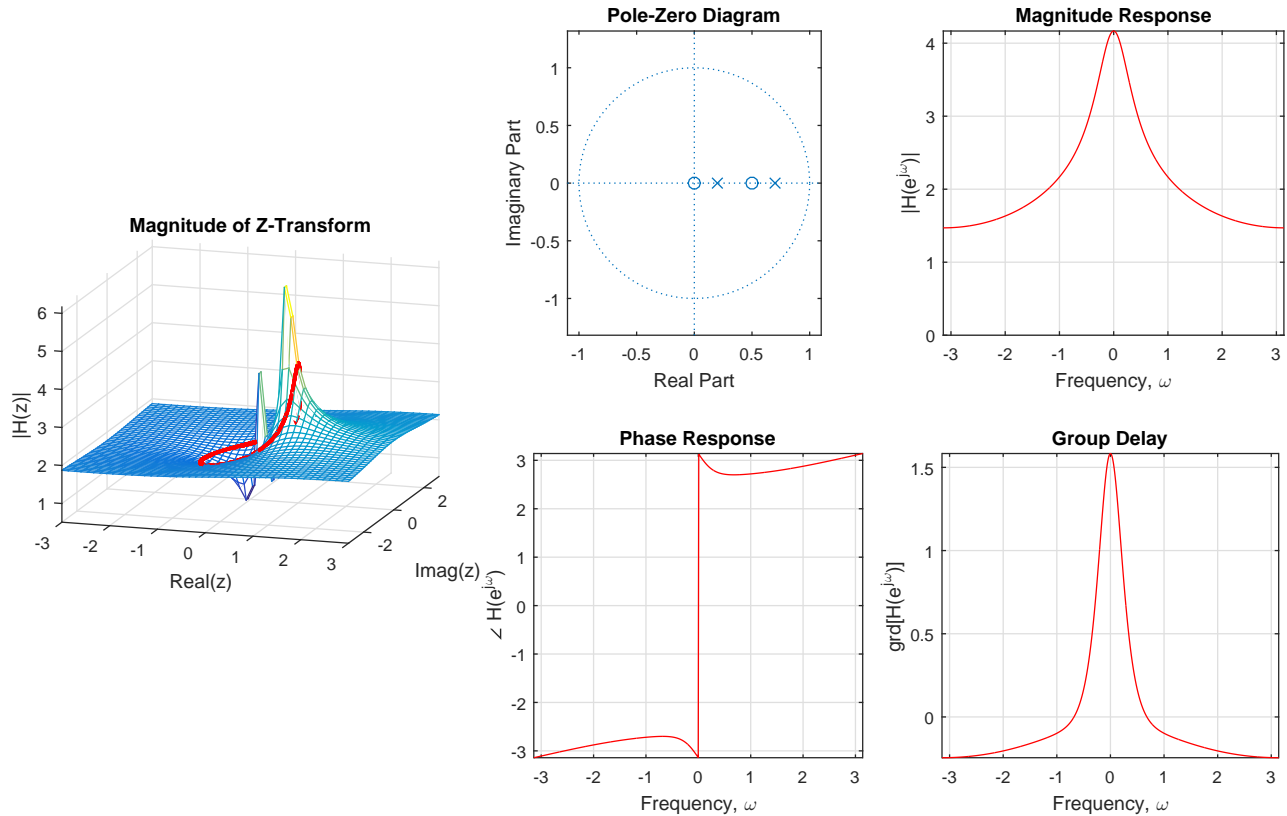
Σχήμα 20: Σύστημα  $H(z)$  Παραδείγματος 1.

ριστικά του συστήματος ελάχιστης φάσης,  $H_{min}(z) = \frac{z^{-1} - 2}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.7z^{-1})}$ . Τέλος, το Σχήμα (22)

παρουσιάζει τα φασματικά χαρακτηριστικά του all-pass συστήματος,  $H_{ap}(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{z^{-1} - 2}$ .

Παρατηρήστε ότι το φάσμα πλάτους,  $|H(e^{j\omega})|$ , του αρχικού συστήματος  $H(z)$  είναι το ίδιο με το φάσμα πλάτους,  $|H_{min}(e^{j\omega})|$ , του συστήματος ελάχιστης φάσης,  $H_{min}(z)$ . Φυσικά, το φάσμα πλάτους του all-pass συστήματος είναι μοναδιαίο, όπως αναμενόταν. Προσέξτε επίσης την καθυστέρηση ομάδας. Η καθυστέρηση ομάδας του συστήματος ελάχιστης φάσης είναι μικρότερη από την καθυστέρηση ομάδας του αρχικού συστήματος. Επίσης, προσέξτε ότι η καθυστέρηση ομάδας του αιτιατού και ευσταθούς all-pass συστήματος είναι θετική, όπως είχαμε δει νωρίτερα. Κρατήστε αυτές τις παρατηρήσεις, θα τις χρειαστούμε στη συνέχεια.





Σχήμα 21: Σύστημα  $H_{min}(z)$  Παραδείγματος 1.

### Παράδειγμα 2

Έστω δυο ευσταθή και αιτιατά συστήματα

$$H_1(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (138)$$

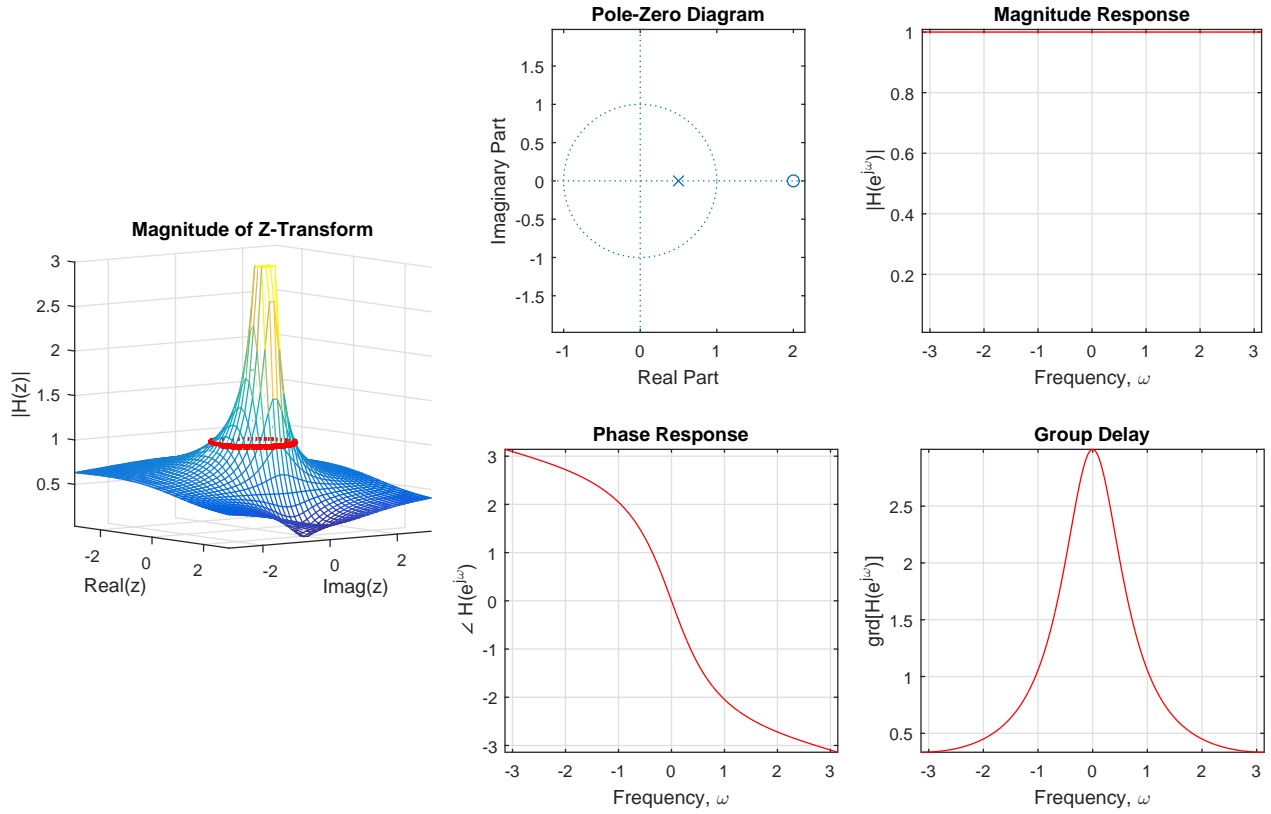
$$H_2(z) = \frac{(1 + \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (139)$$

Η πρώτη συνάρτηση μεταφοράς,  $H_1(z)$ , έχει έναν πόλο εντός μοναδιαίου κύκλου, στη θέση  $z = 0.5$  αλλά ένα μηδενικό στη θέση  $z = -3$ . Πρέπει να βρούμε το κατάλληλο all-pass σύστημα που θα πάρει αυτό το μηδενικό και θα έχει επίσης έναν πόλο στη συζυγή αμοιβαία θέση. Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = 3 \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (140)$$

Οπότε το σύστημα ελάχιστης φάσης θα είναι

$$H_{min}(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (141)$$



Σχήμα 22: Σύστημα  $H_{ap}(z)$  Παραδείγματος 1.

κι αν φέρουμε τη σταθερά 3 στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα έχουμε

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (142)$$

$$H_{min}(z) = 3 \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (143)$$

Για το  $H_2(z)$  έχει δυο μιγαδικά μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου και έναν πραγματικό πόλο εντός του. Τα δυο μηδενικά θα είναι μέρος του all-pass συστήματος ενώ ο πόλος του minimum phase συστήματος. Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 + \frac{3}{2}e^{j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}z^{-1})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (144)$$

$$= \frac{9}{4} \frac{(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (145)$$

Στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα έχουμε τον πόλο του αρχικού συστήματος και τα μηδενικά που προσθέσαμε στο all-pass στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις:

$$H_{min}(z) = \frac{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad (146)$$

και αν φέρουμε τη σταθερά  $9/4$  στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα έχουμε τελικά

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4})(z^{-1} + \frac{2}{3}e^{j\pi/4})}{(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})} \quad (147)$$

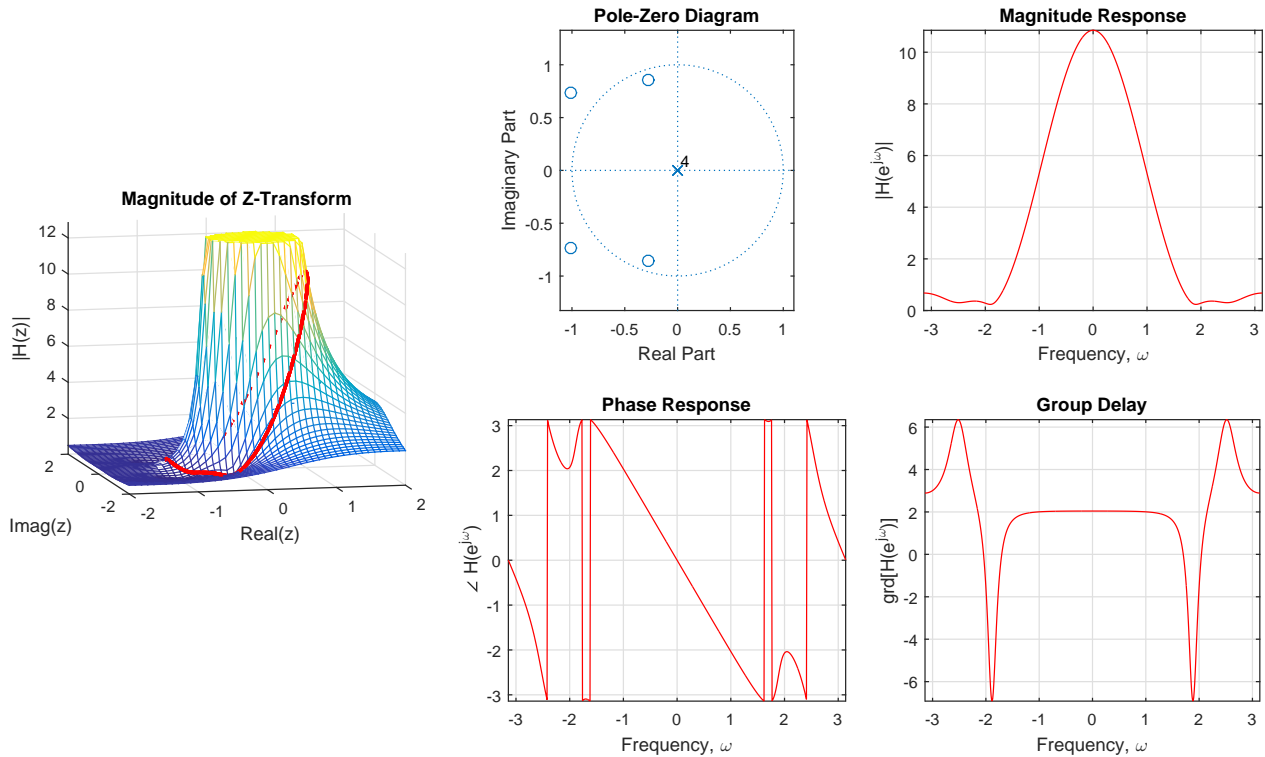
$$H_{min}(z) = \frac{9(1 + \frac{2}{3}e^{-j\pi/4}z^{-1})(1 + \frac{2}{3}e^{j\pi/4}z^{-1})}{4(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \quad (148)$$

### Παράδειγμα 3

Έστω το σύστημα

$$H(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (149)$$

Παρατηρούμε ότι αυτό το σύστημα έχει 4 μηδενικά στο μιγαδικό επίπεδο και 4 πόλους στο  $z = 0$ .



Σχήμα 23: Σύστημα  $H(z)$  Παραδείγματος 3.

Προφανώς το minimum phase σύστημα θα κρατήσει τους 4 πόλους, καθώς και τα  $z = 0.9e^{j0.6\pi}$ ,  $z = 0.9e^{-j0.6\pi}$  μηδενικά που βρίσκονται εντός μοναδιαίου κύκλου. Το all-pass θα πάρει τα δυο μηδενικά εκτός μοναδιαίου κύκλου,  $z = 1.25e^{j0.8\pi}$  και  $z = 1.25e^{-j0.8\pi}$ , και θα πρέπει να έχει και πόλους στις συζυγείς αμοιβαίες θέσεις.

Άρα

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \quad (150)$$

$$= (1.25)^2 \frac{(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \quad (151)$$

Το σύστημα ελάχιστης φάσης θα έχει επιπλέον δυο μηδενικά για να ακυρωθούν οι πόλοι του  $H_{ap}(z)$ , οπότε

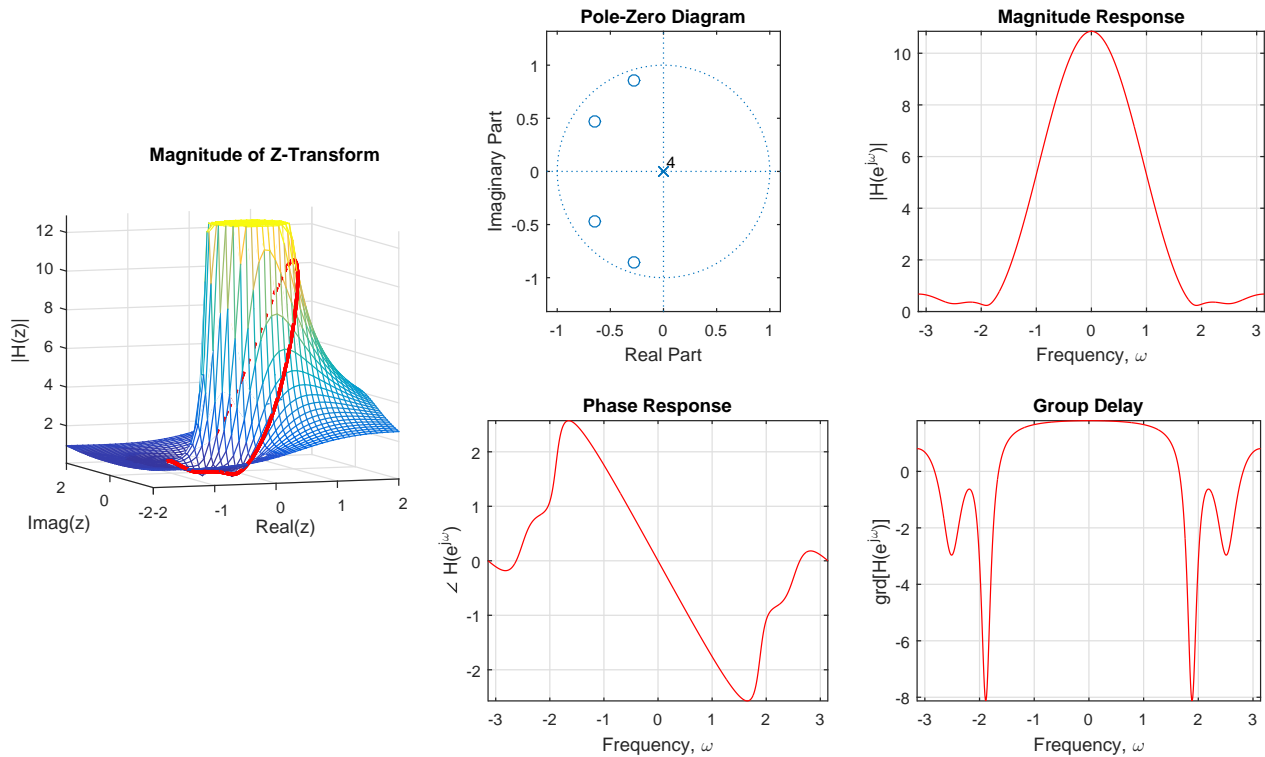
$$H_{min}(z) = (1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (152)$$

και φέρνοντας τη σταθερά  $(1.25)^2$  στο σύστημα ελάχιστης φάσης, θα είναι

$$H_{min}(z) = (1.25)^2(1 - 0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1}) \quad (153)$$

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi})(z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi})}{(1 - 0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})} \quad (154)$$

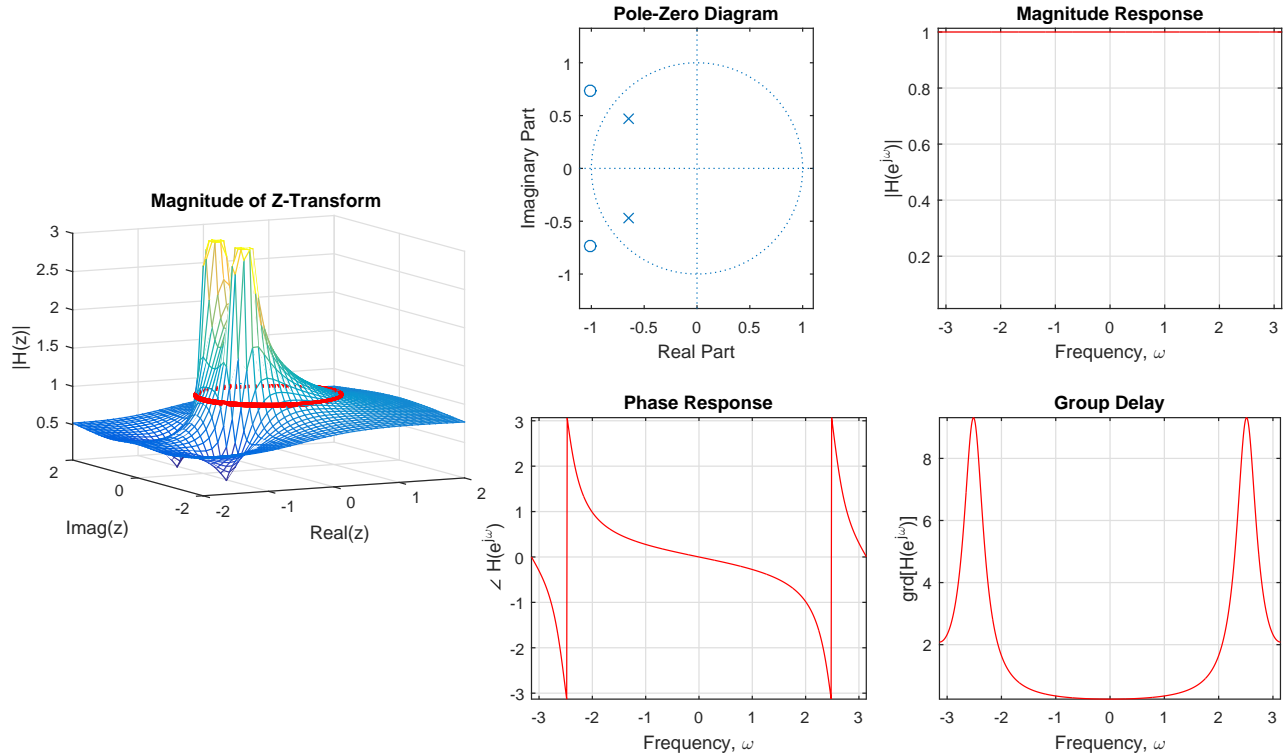
Η παραγοντοποίηση για αιτιατά και ευσταθή συστήματα φαίνεται στα Σχήματα (23,24,25). Το Σχήμα (23) δείχνει τα φασματικά χαρακτηριστικά του αρχικού συστήματος  $H(z)$ . Το Σχήμα (24) δείχνει τα χαρακτηριστικά του συστήματος ελάχιστης φάσης,  $H_{min}(z)$ . Τέλος, το Σχήμα (22) παρουσιάζει τα φασματικά



Σχήμα 24: Σύστημα  $H_{min}(z)$  Παραδείγματος 3.

χαρακτηριστικά του all-pass συστήματος,  $H_{ap}(z)$ .

Παρατηρήστε ξανά: το φάσμα πλάτους,  $|H(e^{j\omega})|$ , του αρχικού συστήματος  $H(z)$  είναι το ίδιο με το φάσμα πλάτους,  $|H_{min}(e^{j\omega})|$ , του συστήματος ελάχιστης φάσης,  $H_{min}(z)$ , ενώ το φάσμα πλάτους του all-pass συστήματος είναι μοναδιαίο, όπως αναμενόταν. Η καθυστέρηση ομάδας του συστήματος ελάχιστης φάσης είναι μικρότερη από την καθυστέρηση ομάδας του αρχικού συστήματος. Επίσης, η καθυστέρηση ομάδας του αιτιατού και ευσταθούς all-pass συστήματος είναι θετική, όπως είχαμε δει νωρίτερα.



Σχήμα 25: Σύστημα  $H_{ap}(z)$  Παραδείγματος 3.

Αναφερόμαστε συνεχώς στα συστήματα ελάχιστης φάσης ως αυτά που είναι ευσταθή και αιτιατά και που έχουν όλους τους πόλους και όλα τα μηδενικά εντός του μοναδιαίου κύκλου, δηλ. έχουν ευσταθή και αιτιατό αντίστροφο σύστημα. Η επιλογή του ονόματός τους προέρχεται από μια ιδιότητα της απόκρισης φάσης τους, και παρ' ότι δεν είναι προφανές, έχει άμεση σχέση με τον ορισμό που μόλις δώσαμε.

Ας δούμε αυτήν την ιδιότητα, μαζί με άλλες δυο πολύ σημαντικές ιδιότητες των συστημάτων ελάχιστης φάσης.

1. Δείξαμε μόλις πριν λίγο ότι ένα οποιοδήποτε σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z) \quad (155)$$

Άρα η απόκριση φάσης του συστήματος θα είναι

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[H_{min}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (156)$$

Ξέρουμε όμως ότι η απόκριση φάσης ενός all-pass συστήματος είναι αρνητική για κάθε  $\omega \in [0, \pi]$ . Έτσι, η “ανάκλαση” των μηδενικών του  $H_{min}(z)$  από εντός σε εκτός του μοναδιαίου κύκλου στις αμοιβάδες συζυγείς θέσεις πάντα μειώνει την απόκριση φάσης ή αυξάνει την αρνητική της φάσης, η οποία ονομάζεται καθυστέρηση φάσης - *phase lag*<sup>7</sup>. Άρα το αιτιατό και ευσταθές σύστημα που έχει την απόκριση πλάτους  $|H_{min}(e^{j\omega})|$  και όλα τα μηδενικά (και φυσικά τους πόλους) εντός μοναδιαίου κύκλου, έχει τη μικρότερη καθυστέρηση φάσης (για  $0 \leq \omega \leq \pi$ ) από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους<sup>8</sup>

<sup>7</sup>Μην τη συγχέετε με την καθυστέρηση φάσης  $-\theta(\omega)/\omega$  που είδαμε όταν μελετούσαμε την καθυστέρηση ομάδας στην Ενότητα (2.2).

<sup>8</sup>Ίσως η ονομασία “συστήματα ελάχιστης καθυστέρησης φάσης” να είναι η πιο κατάλληλη, αλλά ιστορικά έχει επικρατήσει να τα λέμε απλά *συστήματα ελάχιστης φάσης*.

2. Από όλα τα συστήματα που έχουν το ίδιο φάσμα πλάτους μετασχ. Fourier, τα συστήματα ελάχιστης φάσης έχουν την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας. Ας το δείξουμε. Εστω δυο συστήματα με το ίδιο φάσμα πλάτους μετασχ. Fourier. Το ένα είναι ελάχιστης φάσης,  $H_{min}(z)$ , και το άλλο όχι,  $H(z)$ . Η καθυστέρηση ομάδας για το  $H(z)$  μπορεί να γραφεί ως

$$\text{grad}[H(e^{j\omega})] = \text{grad}[H_{min}(e^{j\omega})] + \text{grad}[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (157)$$

λόγω της παραγοντοποίησης που συζητήσαμε παραπάνω. Επειδή όταν μιλήσαμε για all-pass συστήματα, είπαμε ότι έχουν μη αρνητική καθυστέρηση ομάδας,  $\text{grad}[H_{ap}(e^{j\omega})] > 0$ , αυτό σημαίνει ότι το  $\text{grad}[H(e^{j\omega})]$  είναι πάντα μεγαλύτερο από το  $\text{grad}[H_{min}(e^{j\omega})]$ . Άρα ξανά, από όλα τα συστήματα με την ίδια απόκριση πλάτους, το σύστημα ελάχιστης φάσης είναι αυτό που έχει την ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας. Ένα εξίσου καλό όνομα για αυτά τα συστήματα θα ήταν “ελάχιστης καθυστέρησης ομάδας - minimum group delay systems”, αλλά σπάνια χρησιμοποιείται αυτή η ορολογία.

3. Μπορούμε να δείξουμε ότι τα συστήματα ελάχιστης φάσης έχουν ελάχιστη καθυστέρηση ενέργειας. Αυτό σημαίνει ότι αν  $h_{min}[n]$  είναι η κρουστική απόκριση ενός συστήματος ελάχιστης φάσης, και  $h[n]$  είναι η κρουστική απόκριση ενός άλλου αιτιατού συστήματος με το ίδιο φάσμα πλάτους,  $|H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$ , τότε

$$\sum_{k=0}^n |h[k]|^2 < \sum_{k=0}^n |h_{min}[k]|^2 \quad (158)$$

για κάθε  $n \geq 0$ . Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για τα συστήματα ελάχιστης φάσης, η ενέργεια του σήματος είναι συγκεντρωμένη στα πρώτα δείγματα της κρουστικής απόκρισης  $h_{min}[n]$  (δηλ. τα πρώτα δείγματα έχουν μεγαλύτερες τιμές από τα επόμενα), ενώ για οποιοδήποτε άλλο σύστημα με το ίδιο φάσμα πλάτους  $|H(e^{j\omega})|$ , η ενέργεια της κρουστικής απόκρισης είναι κατανομημένη διαφορετικά. Προσοχή: η παραπάνω σχέση μιλά για την κατανομή της ενέργειας, όχι για την τιμή της. Σε όλα τα συστήματα που έχουν το ίδιο  $|H(e^{j\omega})|$ , ισχύει ότι

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |h[k]|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |h_{min}[k]|^2 \quad (159)$$

Ένα τρίτο όνομα για αυτά τα συστήματα θα ήταν “ελάχιστης καθυστέρησης ενέργειας - minimum energy delay systems”. Δείτε, για παράδειγμα το Σχήμα (26). Μπορείτε φυσικά να αναγνωρίσετε το σύστημα ελάχιστης φάσης (a). Δείτε τώρα την κρουστική απόκριση καθενός από αυτά στο Σχήμα (27). Σύμφωνα με τη Σχέση (158), το σύστημα ελάχιστης φάσης πρέπει να είναι εκείνο με την ενέργειά του κατανομημένη πιο κοντά στο  $n = 0$  από τα υπόλοιπα συστήματα. Από αυτά, το Σχήμα (27)(a) ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, που είναι πράγματι η κρουστική απόκριση του συστήματος ελάχιστης φάσης του Σχήματος (26)(a).

## 7 Συστήματα Γραμμικής Φάσης

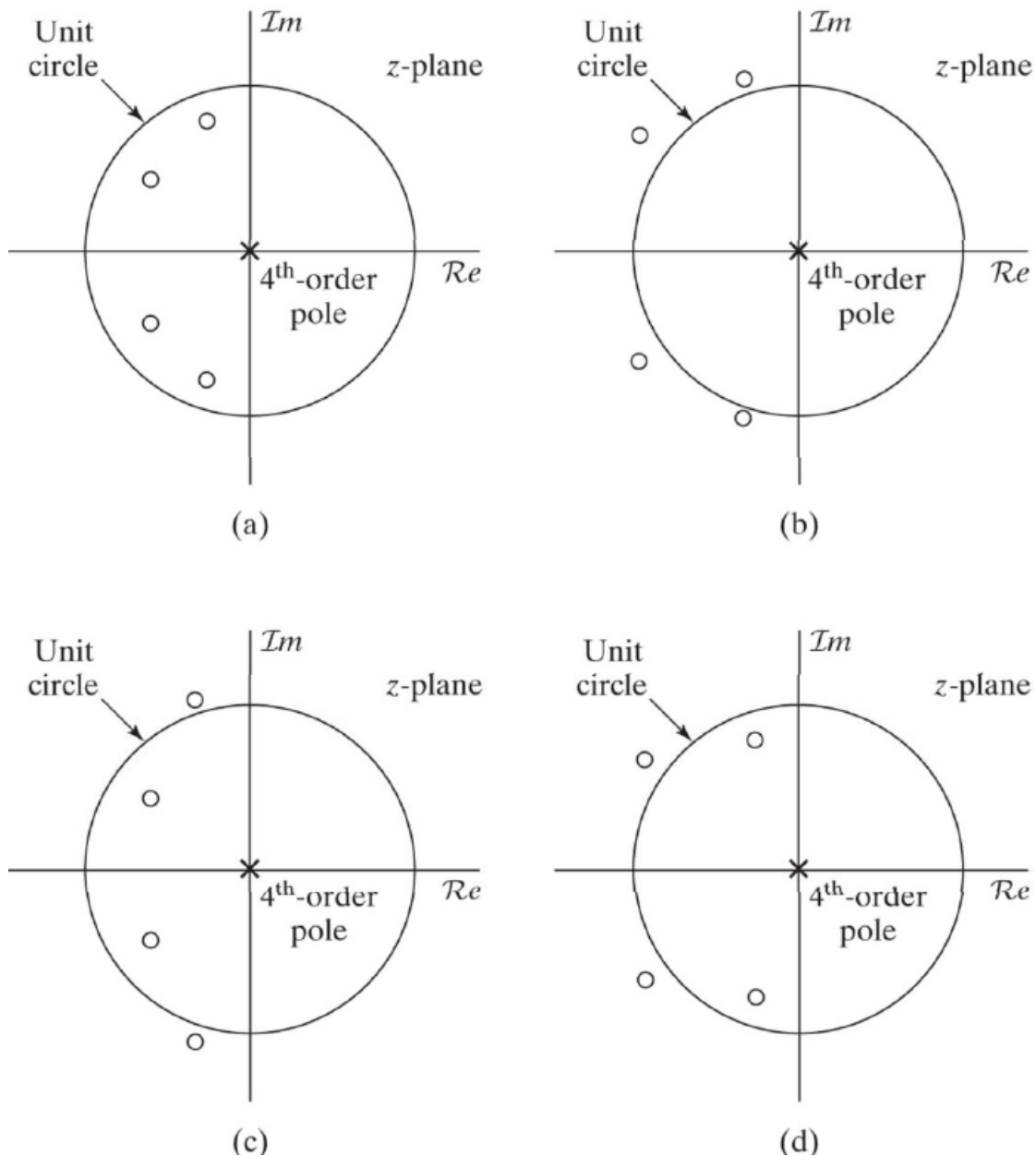
Ένα ΓΧΑ σύστημα έχει γραμμική φάση όταν η απόκριση σε συχνότητά του είναι της μορφής

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{-j\alpha\omega} \quad (160)$$

με  $\alpha$  πραγματικός αριθμός. Έτσι, καταλαβαίνετε ότι τα συστήματα γραμμικής φάσης έχουν σταθερή καθυστέρηση ομάδας:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\phi(\omega) = -\frac{d}{d\omega}(-\alpha\omega) = \alpha \quad (161)$$

Αυτό σημαίνει ότι όλες οι συχνότητες καθυστερούν στην έξοδο κατά τον ίδιο αριθμό δειγμάτων, χωρίς να “ανακατευονται” μεταξύ τους. Αυτή η ιδιότητα μας είναι αρκετά επιθυμητή. Σε πολλές εφαρμογές, μας



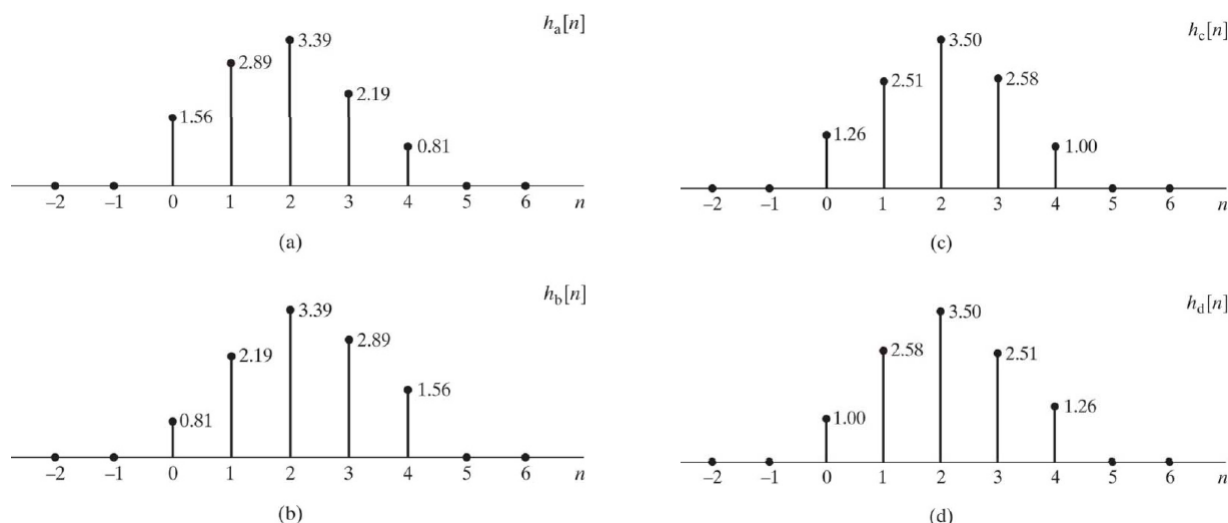
Σχήμα 26: Διάγραμμα πόλων-μηδενικών τεσσάρων συστημάτων με ίδια απόκριση πλάτους. Τα μηδενικά είναι συνδυασμοί των  $0.9e^{\pm j0.6\pi}$ ,  $0.8e^{\pm j0.8\pi}$  και των αμοιβαίων τους.

ενδιαφέρει να μπορούμε να σχεδιάζουμε συστήματα που έχουν την περίφημη γενικευμένη γραμμική φάση. Ένα σύστημα έχει γενικευμένη γραμμική φάση αν η απόκριση σε συχνότητά του είναι της μορφής

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)} \quad (162)$$

με  $A(e^{j\omega})$  μια πραγματική συνάρτηση του  $\omega$ , και  $\beta$  μια σταθερά. Συχνά, ο όρος γραμμική φάση χρησιμοποιείται για να δηλώσει συστήματα που έχουν είτε γραμμική είτε γενικευμένη γραμμική φάση.

Μας ενδιαφέρουν, όπως ξέρετε, ιδιαίτερα τα αιτιατά συστήματα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$ . Για να έχουν αυτά γραμμική φάση, πρέπει η χρουστική τους απόκριση  $h[n]$  να είναι πεπερασμένης διάρκειας (να είναι δηλαδή FIR συστήματα). Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουν πόλους στο  $z$ -επίπεδο, εκτός από τη θέση  $z = 0$ . Άρα τα IIR συστήματα ΔΕΝ μπορεί να έχουν (γενικευμένη) γραμμική φάση. Άρα, ας επικεντρωθούμε στα FIR συστήματα. Για ένα FIR σύστημα διάρκειας  $M + 1$  με πραγματική χρουστική



Σχήμα 27: Κρουστικές αποκρίσεις των τεσσάρων συστημάτων με ίδια απόκριση πλάτους του Σχήματος (26).

απόκριση  $h[n]$ , μια ικανή συνθήκη για να έχει αυτό γενικευμένη γραμμική φάση είναι να έχει συμμετρική κρουστική απόκριση  $h[n]$ , δηλ.

$$h[n] = h[M - n] \quad (163)$$

Σε αυτήν την περίπτωση,  $\alpha = M/2$  και  $\beta = 0$  ή  $\pi$ . Μια άλλη ικανή συνθήκη είναι το  $h[n]$  να είναι αντισυμμετρικό

$$h[n] = -h[M - n] \quad (164)$$

και τότε έχουμε  $\alpha = M/2$  και  $\beta = \pi/2$  ή  $3\pi/2$ .

Τα συστήματα γραμμικής φάσης μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις κατηγορίες (Τύπους), ανάλογα με το αν η κρουστική τους απόκριση  $h[n]$  είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική, και αν το  $M$  είναι άρτιο ή περιττό (προσέξτε, το  $M$  ΔΕΝ είναι η διάρκεια του σήματος - αυτή είναι  $M + 1$ ). Κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες έχει συγκεκριμένους περιορισμούς όσον αφορά τις θέσεις των μηδενικών (μια και πόλους έχουμε μόνο στο  $z = 0$ ) στο  $H(z)$ , τα οποία μηδενικά επιβάλλουν περιορισμούς στο φάσμα πλάτους της απόκρισης σε συχνότητα. Ας τα δούμε ένα-ένα, ξεχωριστά<sup>9</sup>.

## 7.1 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου I

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης τυπου I έχει συμμετρική κρουστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (165)$$

και το  $M$  είναι άρτιο. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο  $a = M/2$ , που είναι ακέραιος αριθμός. Η απόκριση σε συχνότητα ενός τυπου I συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega/2} \sum_{k=0}^{M/2} a_k \cos(k\omega) \quad (166)$$

με

$$a_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, M/2 \quad (167)$$

$$a_0 = h\left[\frac{M}{2}\right] \quad (168)$$

<sup>9</sup>Για κάθε τυπο συστήματος γραμμικής φάσης, υποθέτουμε ότι έχει πραγματικό  $h[n]$  και ότι το  $h[0]$  είναι το πρώτο μη μηδενικό δείγμα του  $h[n]$



## 7.2 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου II

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης τυπου II έχει συμμετρική χροστική απόκριση

$$h[n] = h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (169)$$

και το  $M$  είναι περιττό. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο  $a = M/2$ , που ΔΕΝ είναι ακέραιος αριθμός. Η απόκριση σε συχνότητα ενός τυπου I συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = e^{-jM\omega/2} \sum_{k=0}^{(M+1)/2} b_k \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \quad (170)$$

με

$$b_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)/2 \quad (171)$$

## 7.3 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου III

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης τυπου III έχει αντισυμμετρική χροστική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (172)$$

και το  $M$  είναι άρτιο. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο  $a = M/2$ , που είναι ακέραιος αριθμός. Η απόκριση σε συχνότητα ενός τυπου III συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jM\omega/2} \sum_{k=1}^{M/2} c_k \sin(k\omega) = e^{-j(M\omega/2 + \pi/2)} \sum_{k=1}^{M/2} c_k \sin(k\omega) \quad (173)$$

με

$$c_k = 2h\left[\frac{M}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, M/2 \quad (174)$$

## 7.4 Συστήματα Γραμμικής Φάσης Τύπου IV

Ένα σύστημα γραμμικής φάσης τυπου IV έχει αντισυμμετρική χροστική απόκριση

$$h[n] = -h[M - n], \quad 0 \leq n \leq M \quad (175)$$

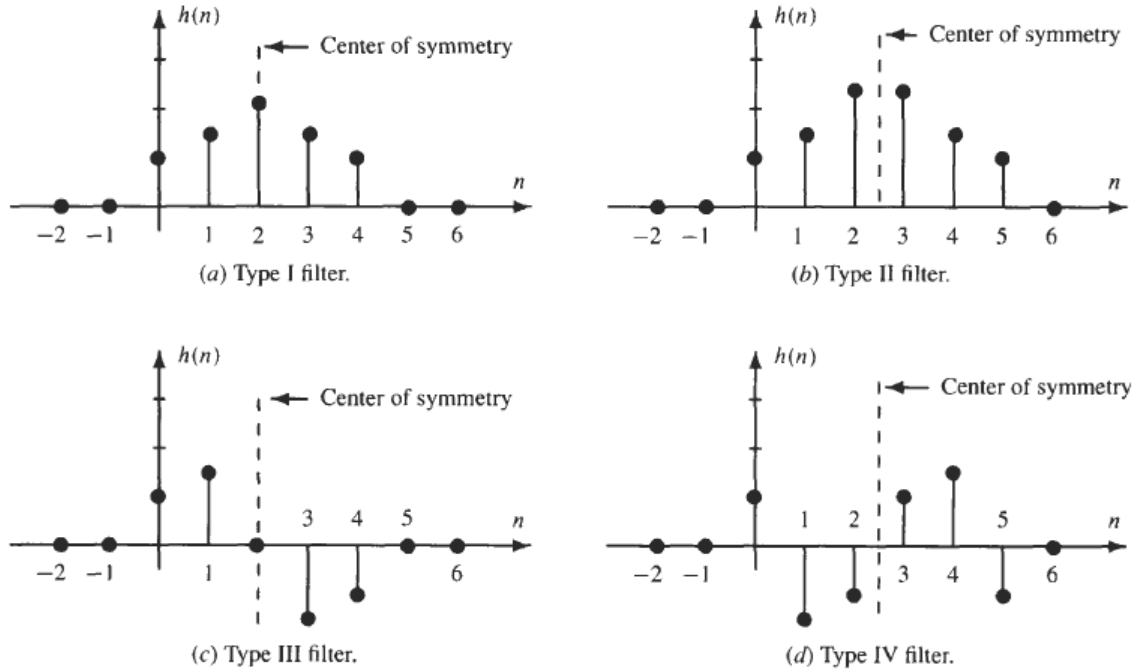
και το  $M$  είναι περιττό. Το κέντρο συμμετρίας είναι το σημείο  $a = M/2$ , που ΔΕΝ είναι ακέραιος αριθμός. Η απόκριση σε συχνότητα ενός τυπου IV συστήματος γραμμικής φάσης μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = je^{-jM\omega/2} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right) = e^{-j(M\omega/2 + \pi/2)} \sum_{k=1}^{(M+1)/2} d_k \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \quad (176)$$

με

$$d_k = 2h\left[\frac{M+1}{2} - k\right], \quad k = 1, 2, \dots, (M+1)/2 \quad (177)$$

Συνοπτικά, παραδείγματα των παραπάνω συστημάτων φαίνονται στο Σχήμα (28).



Σχήμα 28: Τύποι Συστημάτων Γραμμικής Φάσης.

## 7.5 Η φάση στα Συστήματα Τύπου I, II, III, IV

Από τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι κάθε σύστημα γραμμικής φάσης γράφεται στη μορφή

$$H(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} \sum p_k f_k(e^{j\omega}) = e^{j\phi(\omega)} A(e^{j\omega}) \quad (178)$$

όπου  $p_k$  οι εκάστοτε συντελεστές  $a_k, b_k, c_k, d_k$ , και  $f_k(e^{j\omega})$  η τριγωνομετρική συνάρτηση του  $k$ . Αυτά τα αθροίσματα είναι πραγματικές συναρτήσεις του  $\omega$ , και τα συμβολίζουμε με  $A(e^{j\omega})$ , ενώ τα ονομάζουμε “ψευδοπλάτη”.

Η φάση των συστημάτων ορίζεται από το μιγαδικό εκθετικό που βρίσκεται έξω από το άθροισμα, εκτός από την περίπτωση που το ψευδοπλάτος  $A(e^{j\omega})$  είναι αρνητικό. Τότε, στη φάση του μιγαδικού εκθετικού προστίθεται μια φάση  $\theta = \pi$ . Άρα γενικά η φάση των συστημάτων γραμμικής φάσης είναι

$$\phi(\omega) = \begin{cases} -\omega M/2 & , \text{ για τύπου I, II και } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\omega M/2 + \pi & , \text{ για τύπου I, II και } A(e^{j\omega}) < 0 \\ -\omega M/2 + \pi/2 & , \text{ για τύπου III, IV και } A(e^{j\omega}) > 0 \\ -\omega M/2 + \pi/2 + \pi & , \text{ για τύπου III, IV και } A(e^{j\omega}) < 0 \end{cases} \quad (179)$$

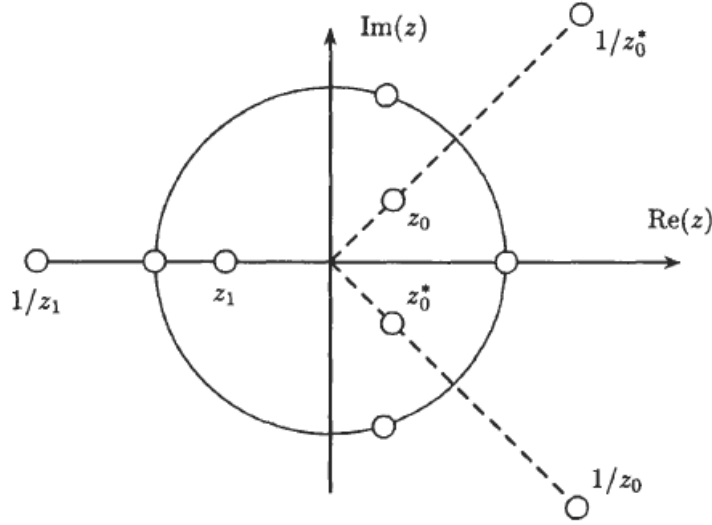
## 7.6 Ο μετασχ. Z Συστημάτων Γραμμικής Φάσης

Οι συμμετρίες της κρουστικής απόκρισης ενός συστήματος γραμμικής φάσης που είδατε παραπάνω θέτουν κάποιους περιορισμούς στη θέση των μηδενικών στο χώρο του Z. Για τα συστήματα Τύπου I ή II, ισχύει

$$h[n] = h[M - n] \longleftrightarrow H(z) = z^{-M} H(z^{-1}) \quad (180)$$

Όμοια, για συστήματα Τύπου III ή IV, ισχύει

$$h[n] = -h[M - n] \longleftrightarrow H(z) = -z^{-M} H(z^{-1}) \quad (181)$$



Σχήμα 29: Περιορισμοί μηδενικών για συστήματα γραμμικής φάσης.

Και στις δυο περιπτώσεις, αν το  $H(z)$  είναι μηδέν στη θέση  $z = z_0$ , τότε το  $H(z)$  πρέπει να είναι μηδέν και στη θέση  $z = \frac{1}{z_0}$ . Άρα, τα μηδενικά του  $H(z)$  έρχονται σε ζεύγη, που το ένα είναι εντός και το άλλο εκτός του μοναδιαίου κύκλου, σε αμοιβαίες<sup>10</sup> θέσεις. Επιπλέον, αν το  $h[n]$  είναι πραγματικό, τα μιγαδικά μηδενικά έρχονται επίσης σε συζυγή ζεύγη. Έτσι, καταλαβαίνετε ότι έχουμε τους εξής περιορισμούς στις θέσεις των μηδενικών:

1. Το  $H(z)$  μπορεί να έχει ένα ή περισσότερα μηδενικά στη θέση  $z = \pm 1$ .
2. Το  $H(z)$  μπορεί να έχει συζυγή μιγαδικά μηδενικά πάνω στο μοναδιαίο κύκλο, στις θέσεις  $z = e^{\pm j\omega_k}$  ή αμοιβαία μηδενικά στον πραγματικό άξονα, στις θέσεις  $z = a$  και  $z = 1/a$ .
3. Αν το σύστημα είναι πραγματικό, το  $H(z)$  μπορεί να έχει ομάδες τεσσάρων μηδενικών σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη στις θέσεις  $z = r_k e^{\pm j\omega_k}$  και  $z = \frac{1}{r_k} e^{\pm j\omega_k}$ .

Αυτούς τους περιορισμούς τους βλέπετε στο Σχήμα (29). Οι θέσεις  $z = 1$  και  $z = -1$  αξίζουν ιδιαίτερης μνείας. :-) Αν υπολογίσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς στη θέση  $z = -1$ , για ένα τύπου II σύστημα, θα έχουμε

$$H(-1) = (-1)^M H(-1) \quad (182)$$

Επειδή το  $M$  είναι περιττό, συνεπάγεται ότι

$$H(-1) = -H(-1) \quad (183)$$

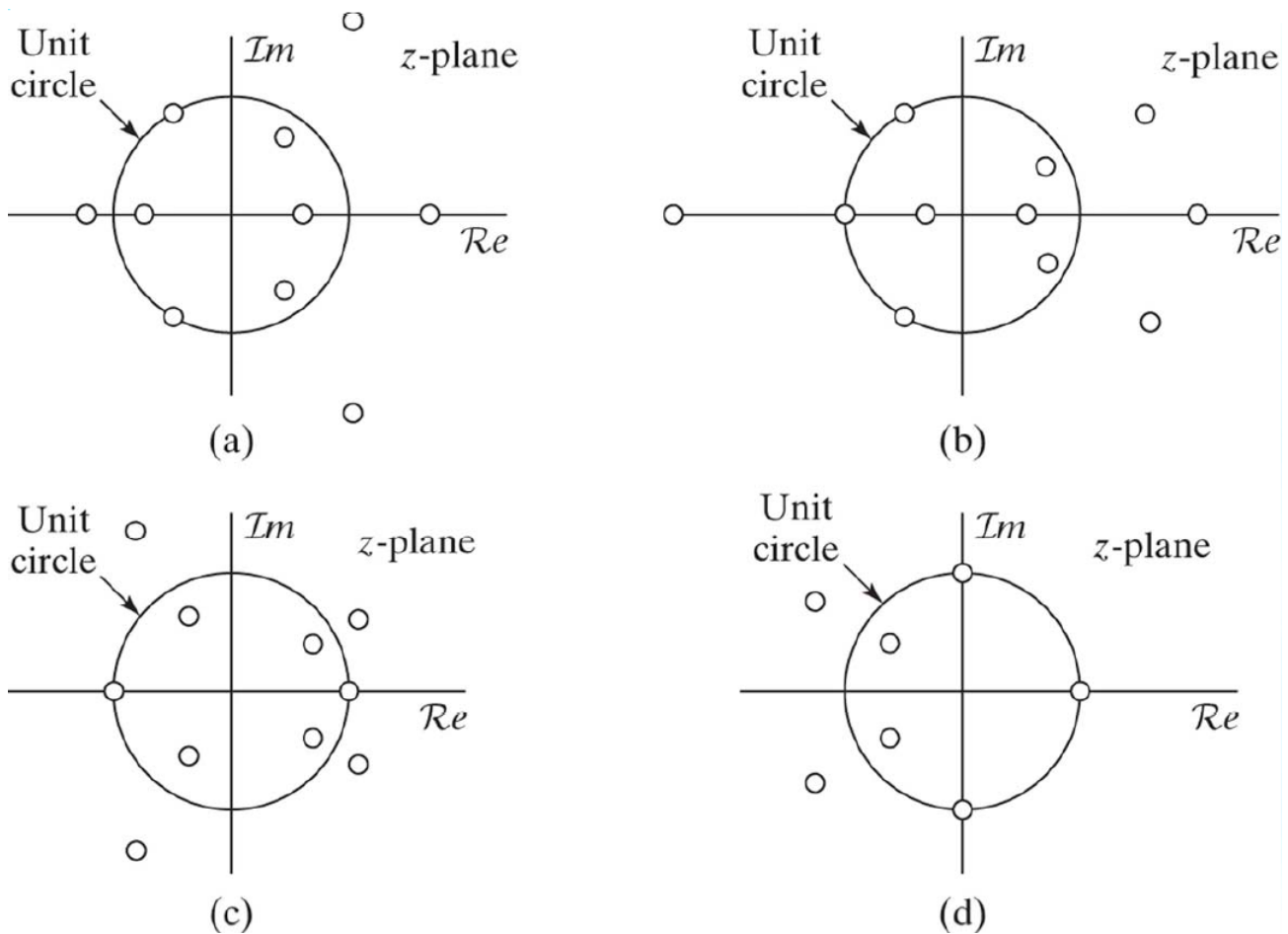
που ισχύει μόνο αν  $H(-1) = 0$ . Άρα ένα τυπου II σύστημα πρέπει να έχει ένα μηδενικό στη θέση  $z = -1$ . Παρομοια, αν υπολογίσουμε το  $H(z)$  στη θέση  $z = -1$  για ένα τύπου III σύστημα γραμμικής φάσης, θα έχουμε

$$H(-1) = -(-1)^M H(-1) \quad (184)$$

και επειδή το  $M$  είναι άρτιο, πρέπει να υπάρχει ένα μηδενικό στη θέση  $z = -1$ . Επειδή η συνάρτηση μεταφοράς υπολογισμένη στη θέση  $z = -1$  είναι ίση με την απόκριση σε συχνότητα για  $\omega = \pi$ , τότε

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\pi} = 0 \quad (185)$$

<sup>10</sup>Όχι συζυγείς αμοιβαίες!



Σχήμα 30: Τύποι Συστημάτων Γραμμικής Φάσης: Διαγράμματα πόλων-μηδενικών (a) Τύπου I, (b) Τύπου II, (c) Τύπου III, (d) Τύπου IV.

για τύπου II και III συστήματα γραμμικής φάσης.

Για τύπου III και IV συστήματα, αν κάνουμε το ίδιο για τη θέση  $z = 1$ , βρίσκουμε ότι

$$H(1) = -H(1) \quad (186)$$

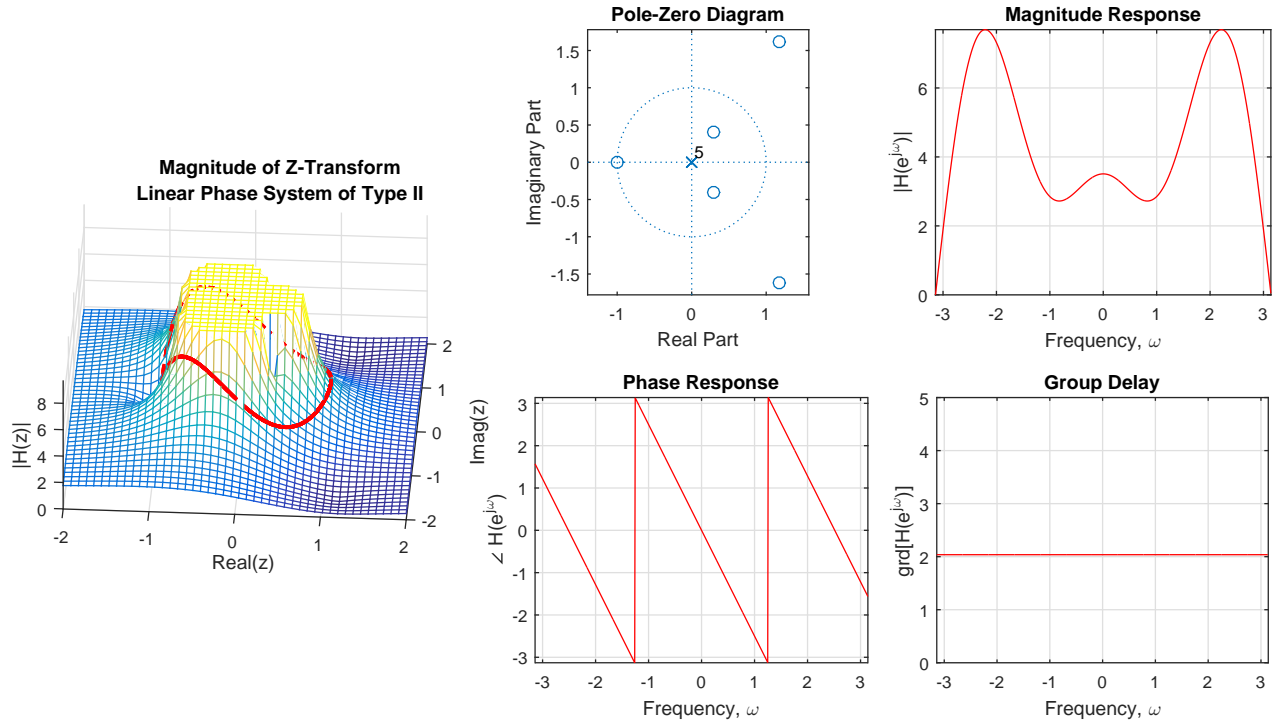
το οποίο ισχύει μόνον αν  $H(z) = 0$  για  $z = 1$ . Άρα, τυπου III και IV συστήματα γραμμικής φάσης πρέπει να έχουν ένα μηδενικό στη θέση  $z = 1$ , άρα

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = 0 \quad (187)$$

για τύπου III και IV συστήματα γραμμικής φάσης.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στο Σχήμα (30), όπου φαίνονται οι τέσσερις τύποι συστημάτων γραμμικής φάσης, και οι θέσεις των μηδενικών τους.

Ένα παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης τύπου II φαίνεται στο Σχήμα (31). Ένα παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης τύπου IV φαίνεται στο Σχήμα (32). Παρατηρήστε τις αποκρίσεις πλάτους και φάσης, καθώς και την καθυστέρηση ομάδας και στα δυο συστήματα.



Σχήμα 31: Παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης Τύπου II.

## 7.7 Σχέση Συστημάτων Γραμμικής Φάσης με Συστήματα Ελάχιστης Φάσης

Η προηγούμενη κουβέντα κατέδειξε ότι όλα τα FIR συστήματα γραμμικής φάσης με πραγματική χρονοστική απόκριση έχουν μηδενικά είτε επάνω στο μοναδιαίο κύκλο είτε σε συζυγή αμοιβαίες θέσεις. Έτσι, μπορούμε να δείξουμε εύκολα ότι οποιοδήποτε FIR σύστημα γραμμικής φάσης,  $H_{lin}(z)$ , μπορεί να γραφεί ως παράγοντας τριών όρων,

- ενός όρου ελάχιστης φάσης,  $H_{min}(z)$
- ενός όρου μέγιστης φάσης<sup>11</sup>,  $H_{max}(z)$
- ενός όρου με μηδενικά επάνω στο μοναδιαίο κύκλο,  $H_{uc}(z)$

δηλ.

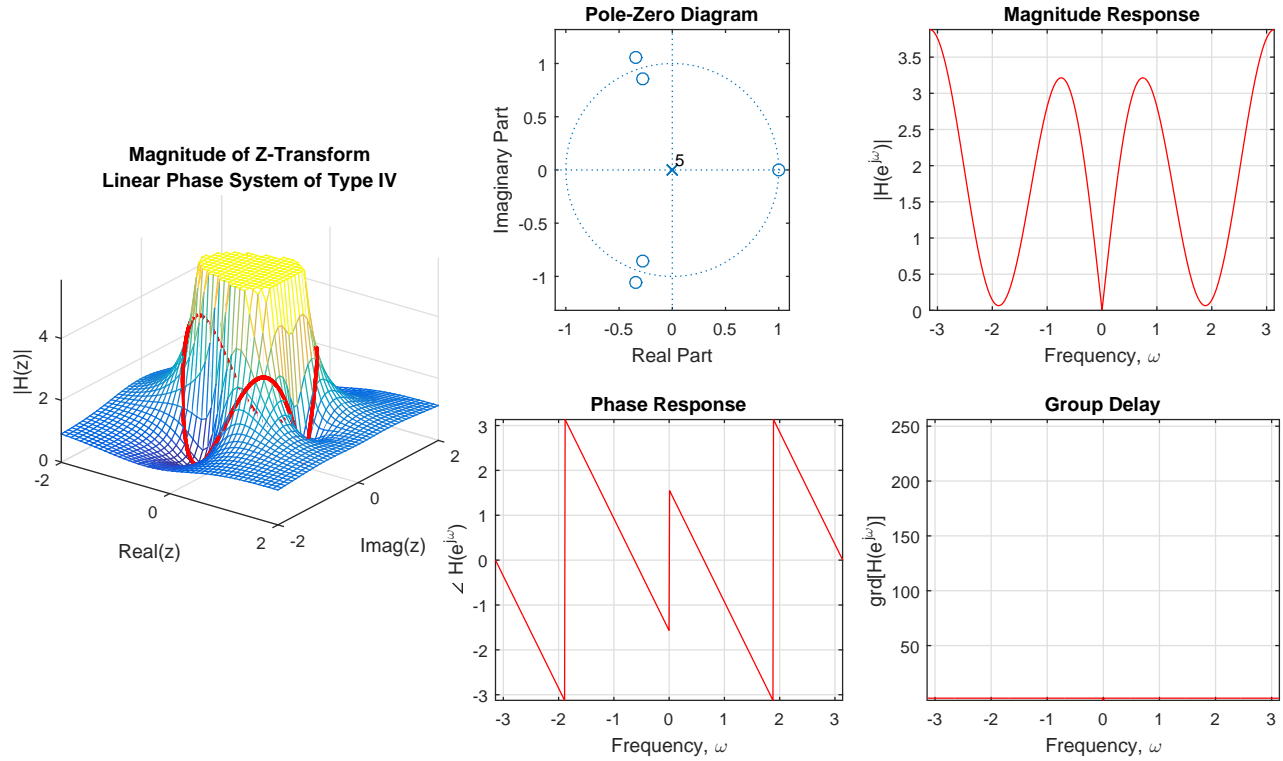
$$H_{lin}(z) = H_{min}(z)H_{uc}(z)H_{max}(z) \quad (188)$$

όπου

$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1})z^{-M_i} \quad (189)$$

όπου  $M_i$  είναι ο αριθμός των μηδενικών του  $H_{min}(z)$ . Στη Σχέση (188), το σύστημα ελάχιστης φάσης έχει όλα τα  $M_i$  μηδενικά του μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, και το  $H_{uc}(z)$  έχει όλα τα  $M_o$  μηδενικά του επάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Το σύστημα μέγιστης φάσης,  $H_{max}(z)$ , έχει όλα τα  $M_i$  μηδενικά του εκτός μοναδιαίου κύκλου. Από τη Σχέση (189), καταλαβαίνουμε ότι τα μηδενικά του συστήματος μέγιστης φάσης είναι τα αμοιβαία των  $M_i$  μηδενικών του συστήματος ελάχιστης φάσης,  $H_{min}(z)$ . Έτσι, η τάξη του συστήματος  $H_{lin}(z)$  είναι  $2M_i + M_o$ .

<sup>11</sup>Ένα σύστημα μέγιστης φάσης έχει τους πόλους εντός μοναδιαίου κύκλου, αλλά όλα τα μηδενικά εκτός του μοναδιαίου κύκλου.



Σχήμα 32: Παράδειγμα συστήματος γραμμικής φάσης Τύπου IV.

Πιο γενικά, η παραπάνω Σχέση (188) μπορεί να γραφεί ως

$$H_{lin}(z) = \prod_{k=1}^{M_i/2} (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_o/2} (1 - e^{j\theta} z^{-1})(1 - e^{-j\theta} z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_i/2} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*) \quad (190)$$

με  $|c_k| < 1$ . Άρα το  $H_{max}(z)$  μπορεί να γραφεί ως

$$H_{max}(z) = \prod_{k=1}^{M_i/2} (z^{-1} - c_k)(z^{-1} - c_k^*) \quad (191)$$

$$= \prod_{k=1}^{M_i/2} z^{-2} (1 - c_k z)(1 - c_k^* z) \quad (192)$$

$$= z^{-M_i} \prod_{k=1}^{M_i/2} (1 - c_k z)(1 - c_k^* z) \quad (193)$$

$$= z^{-M_i} H_{min}(z^{-1}) \quad (194)$$

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα

Έστω το σύστημα ελάχιστης φάσης, που είδαμε νωρίτερα,

$$H_{min}(z) = (1.25)^2 (1 - 0.9e^{j0.6\pi} z^{-1})(1 - 0.9e^{-j0.6\pi} z^{-1}) \times \quad (195)$$

$$\times (1 - 0.8e^{-j0.8\pi} z^{-1})(1 - 0.8e^{j0.8\pi} z^{-1}) \quad (196)$$

Άρα το σύστημα μέγιστης φάσης που θα μας δώσει ένα σύστημα γραμμικής φάσης κατά την παραγοντοποίηση βρίσκεται από

$$H_{max}(z) = z^{-4} H_{min}(z^{-1}) \quad (197)$$

$$= z^{-4} (1.25)^2 (e^{j0.8\pi} e^{-j0.8\pi}) (1 - 0.9e^{j0.6\pi} z) (1 - 0.9e^{-j0.6\pi} z) \times \quad (198)$$

$$\times (1 - 0.8e^{j0.8\pi} z) (1 - 0.8e^{-j0.8\pi} z) \quad (199)$$

$$= (1.25)^2 (e^{j0.8\pi} e^{-j0.8\pi}) (z^{-1} - 0.9e^{j0.6\pi}) (z^{-1} - 0.9e^{-j0.6\pi}) \times \quad (200)$$

$$\times (z^{-1} - 0.8e^{j0.8\pi}) (z^{-1} - 0.8e^{-j0.8\pi}) \quad (201)$$

$$= (z^{-1} - 0.9e^{j0.6\pi}) (z^{-1} - 0.9e^{-j0.6\pi}) (1.25e^{-j0.8\pi} z^{-1} - 1) (1.25e^{j0.8\pi} z^{-1} - 1) \quad (202)$$

$$= (z^{-1} - 0.9e^{j0.6\pi}) (z^{-1} - 0.9e^{-j0.6\pi}) (1 - 1.25e^{-j0.8\pi} z^{-1}) (1 - 1.25e^{j0.8\pi} z^{-1}) \quad (203)$$

$$= (0.9)^2 (1 - 1.11e^{-j0.6\pi} z^{-1}) (1 - 1.11e^{j0.6\pi} z^{-1}) \times \quad (204)$$

$$\times (1 - 1.25e^{-j0.8\pi} z^{-1}) (1 - 1.25e^{j0.8\pi} z^{-1}) \quad (205)$$

Οπότε το ένα σύστημα γραμμικής φάσης με παράγοντες τα παραπάνω συστήματα γράφεται ως

$$H_{lin}(z) = H_{min}(z) H_{max}(z) \quad (206)$$

$$= (1.125)^2 (1 - 0.9e^{j0.6\pi} z^{-1}) (1 - 0.9e^{-j0.6\pi} z^{-1}) \times \quad (207)$$

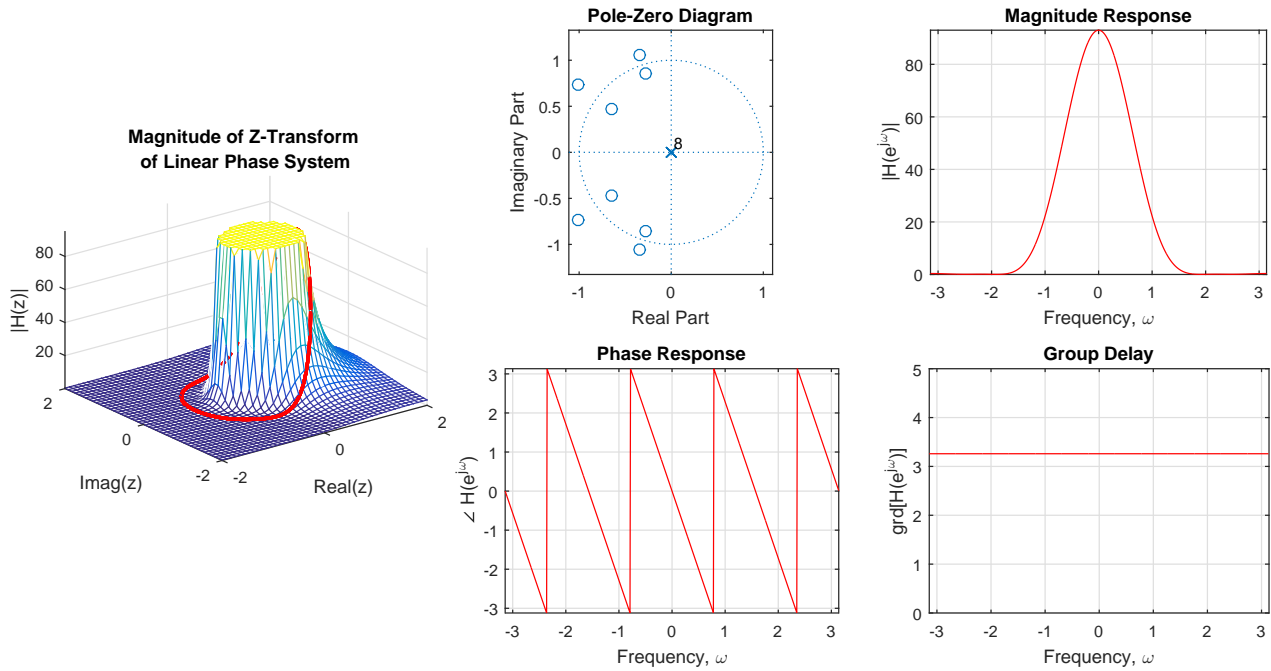
$$\times (1 - 0.8e^{-j0.8\pi} z^{-1}) (1 - 0.8e^{j0.8\pi} z^{-1}) \times \quad (208)$$

$$\times (1 - 1.11e^{-j0.6\pi} z^{-1}) (1 - 1.11e^{j0.6\pi} z^{-1}) \times \quad (209)$$

$$\times (1 - 1.25e^{-j0.8\pi} z^{-1}) (1 - 1.25e^{j0.8\pi} z^{-1}) \times \quad (210)$$

$$(211)$$

Τα χαρακτηριστικά του συστήματος γραμμικής φάσης που προκύπτει φαίνονται στο Σχήμα (33).



Σχήμα 33: Σύστημα Γραμμικής Φάσης που προκύπτει από παραγοντοποίηση ενός συστήματος ελαχίστης και ενός μέγιστης φάσης.

Άρα

$$H_{lin}(e^{j\omega}) = H_{min}(e^{j\omega})H_{max}(e^{j\omega}) \quad (212)$$

και

$$|H_{lin}(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})||H_{max}(e^{j\omega})| = 2|H_{min}(e^{j\omega})| \quad (213)$$

Επίσης,

$$\angle H_{lin}(e^{j\omega}) = \angle H_{min}(e^{j\omega}) + \angle H_{max}(e^{j\omega}) \quad (214)$$

και λόγω της Σχέσης (189), έχουμε

$$\angle H_{max}(e^{j\omega}) = -4\omega - \angle H_{min}(e^{j\omega}) \quad (215)$$

και άρα

$$\angle H_{lin}(e^{j\omega}) = -4\omega \quad (216)$$

Τέλος, η καθυστέρηση ομάδας θα είναι

$$grad[H_{lin}(e^{j\omega})] = 4 \quad (217)$$