Συνέλιξη

Επιμέλεια: Γιώργος Π. Καφεντζης
Δρ. Επιστήμης Η/Υ Πανεπιστημίου Κρήτης
Δρ. Επεξεργασίας Σήματος Πανεπιστημίου Rennes 1

6 Οκτωβρίου 2015

1 Εισαγωγή

Η συνέλιξη αποτελεί μια πράξη πολύ σημαντική, γιατί σχετίζεται με την ανάλυση και απόκριση συστημάτων. Η συνέλιξη, λόγω του ότι εμπλέκει τον υπολογισμό ένος αθροίσματος έχει μια δυσκολία. Η δυσκολία έγκειται στο ότι στην πράξη εμπεριέχεται το γινόμενο δυο σημάτων, εκ των οποίων το ένα έχει υποστεί *ανάκλαση και μετατόπιση*.

2 Η συνέλιξη διακριτού χρόνου αναλυτικά

Εδώ θα ξεδιαλύνουμε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης. Ας δούμε τον ορισμό:

$$c_{xy}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] \tag{1}$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι το άθροισμα έχει ως μεταβλητή το k! ΌΧΙ το n. Το n το θεωρούμε σταθερό μέσα στο άθροισμα. Έπειτα, το άθροισμα αυτό περιέχει δυο σήματα: το $x[k]$ και το $y[n-k]$. Το πρώτο είναι αυτούσιο το σήμα, δεν έχει κάποια μεταβολή. Το δεύτερο όμως, βλέπετε ότι έχει υποστεί δυο είδη επεξεργασίας: *ανάκλαση και μετατόπιση*. Η ακολουθία μετατροπής είναι η εξής:

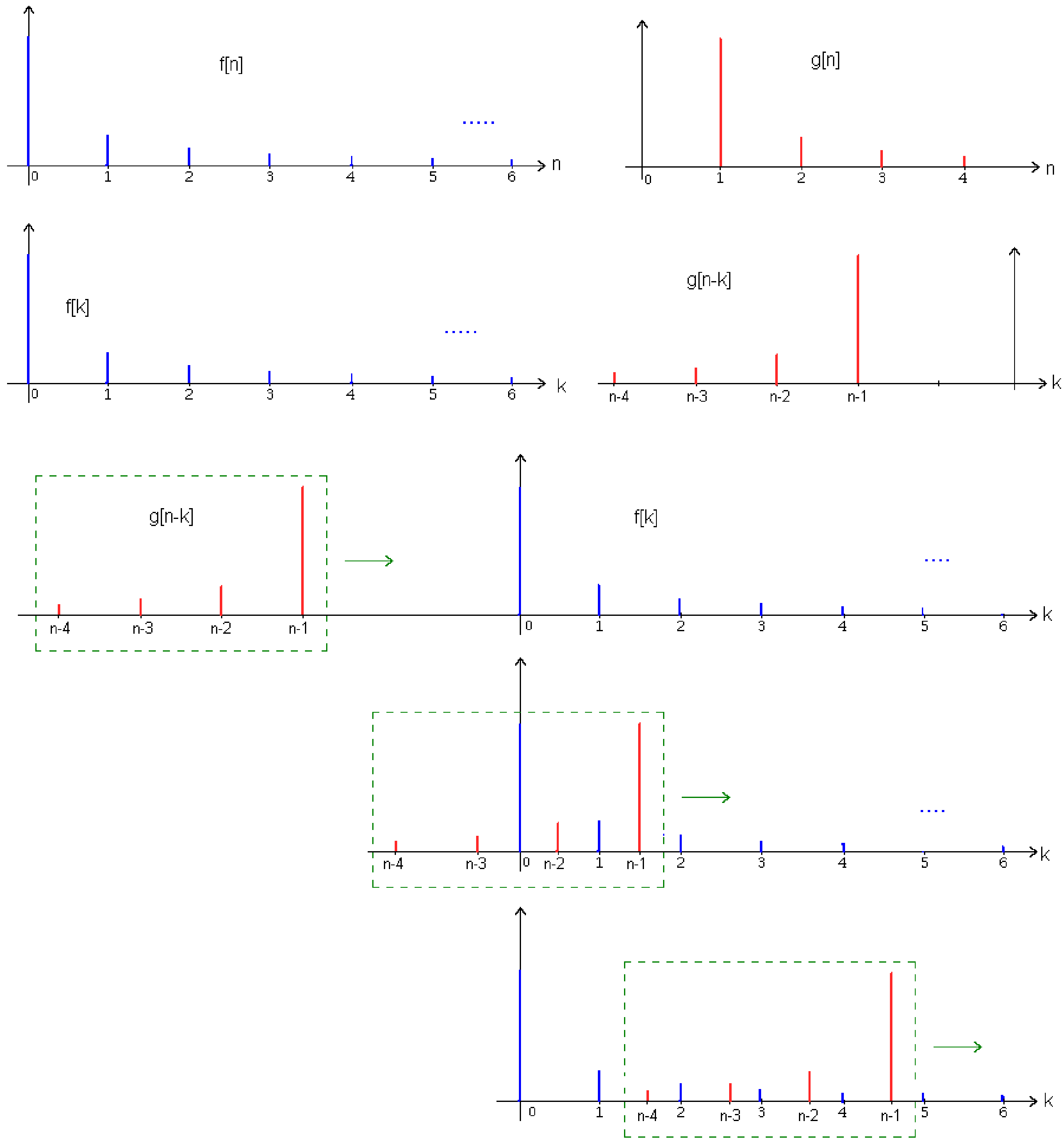
$$y[n] \rightarrow y[k] \rightarrow y[-k] \rightarrow y[-k+n] = y[n-k] \tag{2}$$

Οπότε το σήμα που χρησιμοποιείται στο άθροισμα της συνέλιξης έχει υποστεί μια *ανάκλαση* ως προς τον κατακόρυφο άξονα και ακολούθως μια *μετατόπιση ως προς* n. Το σήμα που προκύπτει πολλαπλασιάζεται με το $x[k]$ και αθροίζεται ως προς n.

2.1 Γραφική λύση

Συχνά προτιμάται η γραφική λύση της συνέλιξης, λόγω οπτικής ευκολίας, και ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στο Σχήμα (1). Ας πούμε ότι εδώ η $f[n] = a^n u[n], \ \ |a| < 1$ και ότι η $g[n] = a^{n-1}, |a| < 1, 1 \leq n \leq 4$.

- Παρατηρήστε ότι έχουμε δυο σήματα, το $f[n]$ και το $g[n]$ στην πρώτη γραμμή του σχήματος. Επιλέγουμε να παίξουμε με το $g[n]$, δηλ. αυτό θα μετατοπίσουμε και θα ανακλάσουμε.
- Στη δεύτερη γραμμή, έχουμε ξανά τα δυο σήματα, μόνο που τώρα είναι συναρτήσει του k και όχι του n, όπως ακριβώς επιτάσσει το άθροισμα της συνέλιξης, και το $g[k]$ έχει ανακλαστεί ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και έχει μετατοπιστεί κατά n. Θυμίζω ότι αυτό το n το χειριζόμαστε ως



Σχήμα 1: *Διαδικασία συνέλιξης διακριτού χρόνου*

σταθερά. Δείτε την αλλαγή στα άκρα του $g[k]$, και πώς αυτά προσαρμόστηκαν μετά την ανάκλαση και τη μετατόπιση.

- Στην τρίτη γραμμή, παίρνουμε το $g[n-k]$ που μόλις φτιάξαμε και ξεκινάμε να το ''σέρνουμε'' πάνω στον ίδιο άξονα με το $f[k]$, ξεκινώντας από το $-\infty$ και προς το $+\infty$.
- Στην πορεία (τέταρτη γραμμή), βλέπετε ότι συναντάει κάποια στιγμή το $f[k]$. Όταν το συναντάει,

έχουμε γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων και άρα αρχίζουμε να υπολογίζουμε το άθροισμα της συνέλιξης. Άρα, αυτές οι διακριτές χρονικές στιγμές είναι όταν το δεξί άκρο του $g[n-k]$ συναντά το αριστερό άκρο του $f[k]$ και πέρα, ΚΑΙ όταν το αριστερό άκρο του $g[n-k]$ ΔΕΝ έχει περάσει το 0, δηλ. όταν

$$n-1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1 \text{ και } n-4 \leq 0 \Rightarrow n \leq 4 \tag{3}$$

οπότε τότε η συνέλιξη υπολογίζεται στο διάστημα από 0 ως $n-1$, εκεί δηλαδή που υπάρχει γινόμενο μεταξύ των δυο σημάτων, ως

$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= \sum_{k=0}^{n-1} f[k]g[n-k] = \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} & (4) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = a^{n-1}(n-1-0+1) = na^{n-1},\ \ 1 \leq n \leq 4 & (5) \end{aligned}$$

- Στην πέμπτη γραμμή, το $g[n-k]$ έχει μπει ολόκληρο μέσα στο $f[k]$, πράγμα που δεν είχε συμβεί παραπάνω, άρα είναι διαφορετική περίπτωση. Εδώ, η συνέλιξη ορίζεται όταν το αριστερό άκρο της $g[n-k]$ περάσει το 0, δηλ. όταν

$$n-4 > 0 \Rightarrow n > 4 \tag{6}$$

και η συνέλιξη υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= \sum_{k=n-4}^{n-1} f[k]g[n-k] = \sum_{k=n-4}^{n-1} a^k a^{n-k-1} & (7) \\ &= \sum_{k=n-4}^{n-1} a^{n-1} = a^{n-1}(n-1-(n-4)+1) = 4a^{n-1},\ \ n > 4 & (8) \end{aligned}$$

- Άλλη περίπτωση δεν υπάρχει, οπότε για κάθε άλλο n εκτός από τα παραπάνω, η συνέλιξη είναι μηδέν, άρα

$$c_{fg}[n] = 0,\ \ n < 1 \tag{9}$$

- Οπότε συγκεντρωτικά θα είναι:

$$c_{fg}[n] = \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \leq n \leq 4 \\ 4a^{n-1}, & n > 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{10}$$

2.2 Αλγεβρικοί τρόποι

Ας δούμε αν ο αλγεβρικός τρόπος μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα... θα υπολογίσουμε τη συνέλιξη αλγεβρικά με τρεις τρόπους ($f[n] * g[n], g[n] * f[n]$, συν ένας ακόμα τρόπος που υπάρχει λόγω του ότι το δεύτερο σήμα είναι πεπερασμένης διάρκειας). Αρχικά, ας προσέξουμε ότι

$$g[n] = a^{n-1},\ 1 \leq n \leq 4 \Leftrightarrow g[n] = a^{n-1}(u[n-1] - u[n-5]) \tag{11}$$

2.2.1 Συνέλιξη $f[n] * g[n]$

Θα είναι:

$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u[k] a^{n-k-1}(u[n-k-1]-u[n-k-5]) && (12) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-1] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-5] && (13) \end{aligned}$$

Το πρώτο γινόμενο βηματικών είναι 1 όταν $k \leq n-1, k \geq 0$, ενώ το δεύτερο όταν $k \leq n-5, k \geq 0$. Άρα θα έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-1] = \sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-k-1} = a^{n-1}(n-1-0+1),\ \ 0 \leq k \leq n-1 \qquad (14)$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-5] = -\sum_{k=0}^{n-5} a^k a^{n-k-1} = -a^{n-1}(n-5-0+1),\ \ 0 \leq k \leq n-5 \quad (15)$$

οπότε θα είναι

$$na^{n-1},\ \ 0 \leq k \leq n-1 \Leftrightarrow na^{n-1},\ \ n \geq 1 \qquad (16)$$

και

$$-(n-4)a^{n-1},\ \ 0 \leq k \leq n-5 \Leftrightarrow -(n-4)a^{n-1},\ \ n \geq 5 \qquad (17)$$

αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι υπάρχει επικάλυψη στα διαστήματα. Μπορούμε όμως να γράψουμε την παραπάνω σχέση, γράφοντας τους περιορισμούς στα διαστήματα ως βηματικές, ως

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-1] = na^{n-1}u[n-1] \qquad (18)$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k a^{n-k-1} u[k]u[n-k-5] = -(n-4)a^{n-1}u[n-5] \qquad (19)$$

και άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= na^{n-1}u[n-1] - (n-4)a^{n-1}u[n-5] && (20) \\ &= na^{n-1}(u[n-1]-u[n-5]) + 4a^{n-1}u[n-5] && (21) \\ &= \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \leq n \leq 4 \\ 4a^{n-1}, & n \geq 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} && (22) \end{aligned}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το γραφικό τρόπο λύσης.

2.2.2 Συνέλιξη $g[n] * f[n]$

Θα είναι:

$$\begin{aligned} c_{fg}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}(u[k-1]-u[k-5])a^{n-k}u[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-1]u[n-k] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-5]u[n-k] && (23) \end{aligned}$$

Το πρώτο γινόμενο των βηματικών είναι 1 όταν $k \le n, k \ge 1$, ενώ το δεύτερο όταν $k \le n, k \ge 5$. Άρα θα έχουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-1]u[n-k] = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}a^{n-k} = a^{n-1}(n-1+1),\ 1 \le k \le n \tag{24}$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-5]u[n-k] = -\sum_{k=5}^{n} a^{k-1}a^{n-k} = -a^{n-1}(n-5+1),\ 5 \le k \le n \tag{25}$$

οπότε θα είναι

$$na^{n-1},\ 1 \le k \le n \Leftrightarrow na^{n-1},\ n \ge 1 \tag{26}$$

και

$$-(n-4)a^{n-1},\ 5 \le k \le n \Leftrightarrow -(n-4)a^{n-1},\ n \ge 5 \tag{27}$$

Βλέπουμε κι εδώ ότι υπάρχει επικάλυψη στα διαστήματα, αλλά μπορούμε και πάλι να γράψουμε αυτούς τους περιορισμούς ως βηματικές συναρτήσεις, δηλ.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-1]u[n-k] = na^{n-1}u[n-1] \tag{28}$$

και

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{k-1}a^{n-k}u[k-5]u[n-k] = -(n-4)a^{n-1}u[n-5] \tag{29}$$

και άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} c_{gf}[n] &= na^{n-1}u[n-1] - (n-4)a^{n-1}u[n-5] && (30)\\ &= na^{n-1}(u[n-1] - u[n-5]) + 4a^{n-1}u[n-5] && (31)\\ &= \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \le n \le 4 \\ 4a^{n-1}, & n \ge 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} && (32) \end{aligned}$$

που είναι ξανά το ίδιο αποτέλεσμα με το γραφικό τρόπο λύσης αλλά και την προηγούμενη αλγεβρική μέθοδο.

2.2.3 Τρίτος τρόπος

Είναι

$$c_{gf}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g[n-k] = \sum_{k=1}^{4} a^{k-1}a^{n-k}u[n-k] \tag{33}$$

Εδώ εκμεταλλευτήκαμε ότι το $g[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και αλλάξαμε τα άκρα επιτόπου. Όμως πρέπει να δούμε τι θα γίνει με το $u[n-k]$. Προφανώς η συνάρτηση αυτή είναι 1 όταν $k \le n$. Αφού $1 \le k \le 4$, θα έχουμε επίσης ότι

$$1 \le k \le n \le 4$$

Ή

$$1 \le k \le 4 < n$$

Άρα θα έχουμε αντίστοιχα,

$$c_{gf}[n] = \sum_{k=1}^{n} a^{k-1}a^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a^{n-1} = a^{n-1}(n-1+1) = na^{n-1}, \; 1 \leq n \leq 4 \tag{34}$$

ή

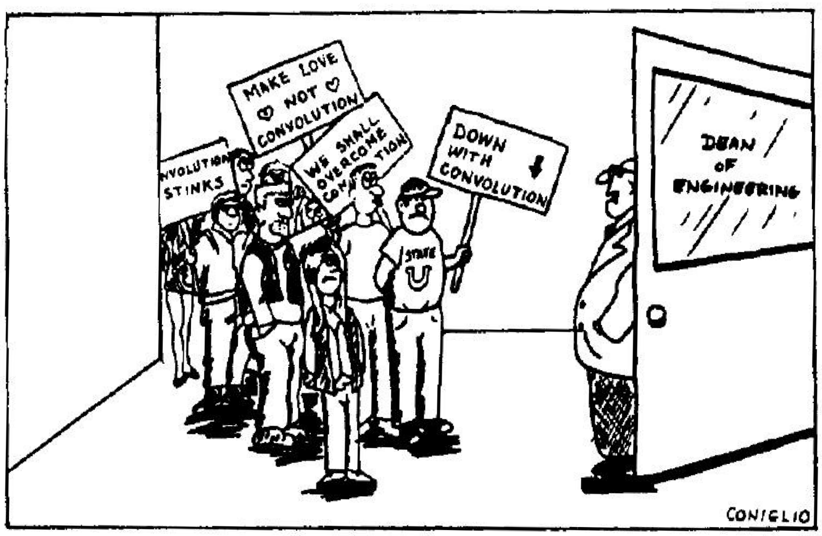
$$c_{gf}[n] = \sum_{k=1}^{4} a^{k-1}a^{n-k} = \sum_{k=1}^{4} a^{n-1} = a^{n-1}(4-1+1) = 4a^{n-1}, \; n > 4 \tag{35}$$

Άρα συγκεντρωτικά

$$c_{gf}[n] = \begin{cases} na^{n-1}, & 1 \leq n \leq 4 \\ 4a^{n-1}, & n > 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{36}$$

που είναι το ίδιο αποτέλεσμα με τα προηγούμενα.

Ας δούμε μερικές παρατηρήσεις...



Σχήμα 2: *Πολύς κόσμος έχει ταλαιπωρηθεί από τη συνέλιξη...*

1. Προφανώς, το Σχήμα (1) δεν είναι ακριβές γιατί οι μετακινήσεις του αριστερού σήματος γίνονται ανά ακέραιες χρονικές στιγμές, οπότε τα δείγματα του ενός σήματος πέφτουν πάντα πάνω στα δείγματα του άλλου. Απλά τα έχουμε ξεχωρίσει για οπτικούς λόγους.

2. Όπως βλέπετε, το πιο σημαντικό πράγμα είναι να μπορείτε να υπολογίσετε το μετατοπισμένο σήμα και να βλέπετε σωστά τις περιπτώσεις και τα άκρα του αθροίσματος, όσον αφορά τη γραφική λύση. Οι πράξεις μετά είναι απλά μαθηματικά.

3. Η συνέλιξη, όπως ξέρετε, είναι αντιμεταθετική πράξη, ισχύει δηλ. ότι

$$c_{fg}[n] = f[n] * g[n] = g[n] * f[n] = c_{gf}[n] \tag{37}$$

δηλ. αν παίζαμε στη γραφική λύση με το $f[n]$ αντί για το $g[n]$, θα είχαμε πάλι το ίδιο αποτέλεσμα. Το είδατε άλλωστε στην αλγεβρική μέθοδο.

4. Προτιμούμε να παίξουμε με το μικρότερο σε διάρκεια σήμα, γιατί συνήθως είναι πιο εύκολη η διαδικασία. Αν και τα δυο σήματα είναι άπειρης διάρκειας, προτιμούμε όποιο θέλουμε.

5. Χρήσιμη παρατήρηση για πεπερασμένης διάρκειας σήματα είναι η εξής: αν το ένα εκ των δυο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$ και το άλλο είναι μη μηδενικό στο διάστημα $[c, d]$, τότε η συνέλιξή τους είναι μη μηδενική στο διάστημα $[a + c, b + d]$. Είναι χρήσιμη παρατήρηση για να μπορούμε να ελέγχουμε τα αποτελέσματά μας. Για παράδειγμα, αν στο Σχήμα (1), είχαμε συνέλιξη της $g[n]$ με τον εαυτό της, δηλ. $c_{gg}[n] = g[n] * g[n]$, τότε το αποτέλεσμα θα ήταν μη μηδενικό στο διάστημα $[2, 8]$.

6. Ο τρόπος που προτιμά ο καθένας για την επίλυση της συνέλιξης εξαρτάται από τον ίδιο. Διαλέξτε έναν τρόπο και μάθετέ τον καλά. Συνήθως, στο διακριτό χρόνο προτιμούμε κάποια αλγεβρική μέθοδο, ενώ στο συνεχή χρόνο είναι σύνηθες να βλέπουμε γραφικές λύσεις - φυσικά αυτό δε δεσμεύει κανέναν. :-)

7. Η γραφική επίλυση που συζητήσαμε εδώ φαίνεται εκ πρώτης όψεως περίπλοκη και αποθαρρύνει το φοιτητή. Πράγματι, κάποιοι ισχυρίζονται ότι η συνέλιξη έχει οδηγήσει πολλούς προπτυχιακούς σε τμήματα Μηχανικών Η/Υ να ενστερνιστούν τη Θεολογία, είτε για σωτηρία ψυχής είτε ως εναλλακτική καριέρα!! :-) (δείτε το περιοδικό IEEE Spectrum, Μάρτιος 1991, σελ. 60).

Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα, λιγότερο εποπτικό και περισσότερο πρακτικό.

<u>Παράδειγμα:</u>
Έστω το σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = u[n] - u[n - N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{38}$$

Η είσοδος είναι

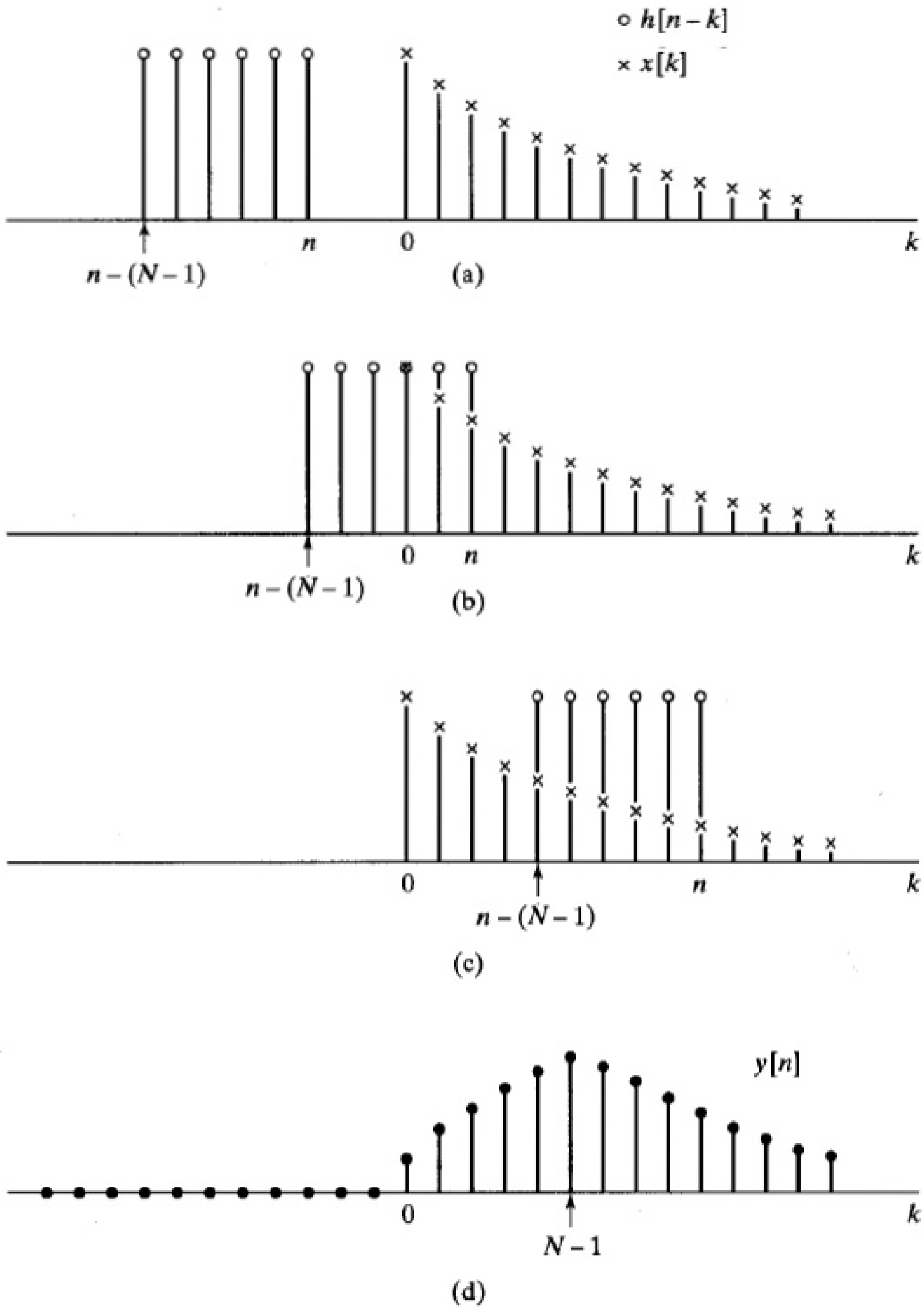
$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = a^n u[n] \tag{39}$$

Υπολογίστε τη συνέλιξη των δυο.

<u>Λύση:</u>
Αρχικά, ας σχεδιάσουμε τα σήματα $x[n]$ και $h[n - k]$ ως συναρτήσεις του k. Δείτε το Σχήμα (3).

- Παρατηρήστε ότι όλες οι αρνητικές τιμές του n δε δίνουν γινόμενο των δυο σημάτων (δηλ. δίνουν γινόμενο ίσο με μηδέν - Σχήμα (3a). Άρα έχουμε ότι
$$y[n] = 0, \quad n < 0 \tag{40}$$

- Στο Σχήμα (3b), φαίνονται τα δυο σήματα με το $h[n - k]$ να έχει πλησιάσει περισσότερο το $x[k]$, και συγκεκριμένα αναπαριστάται η θέση των δυο σημάτων όταν $n \geq 0$ (δηλ. το δεξί ''άκρο'' του σήματος $h[n - k]$ έχει επικάλυψη με το $x[k]$) και $n - N + 1 \leq 0$ (δηλ. όταν το αριστερό ''άκρο'' του σήματος $h[n - k]$ δεν έχει επικάλυψη με το σήμα $x[k]$). Αυτές οι δυο συνθήκες μπορούν να ενωθούν στην εξής μια,
$$0 \leq n \leq N - 1 \tag{41}$$
Για αυτό το διάστημα, βλέπουμε στο Σχήμα ότι
$$x[k]h[n - k] = a^k, \quad 0 \leq k \leq n \tag{42}$$
αφού τα δείγματα που θα αθροιστούν δίνουν γινόμενο μόνο στο $0 \leq k \leq n$, κι αυτό συμβαίνει όταν $0 \leq n \leq N - 1$. Άρα έχουμε ότι
$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad 0 \leq n \leq N - 1 \tag{43}$$



Σχήμα 3: *Σήματα $x[n]$ και $h[n-k]$ για τον υπολογισμό συνέλιξης. Στα $(a-c)$ βλέπετε τα σήματα $x[n]$ και $h[n-k]$ ως συνάρτηση του k για διάφορες τιμές του n. Στο (d) βλέπετε το σήμα εξόδου ως συνάρτηση του n.*

- Τέλος, στο Σχήμα (3c), ολόκληρο το σήμα $h[n-k]$ έχει επικάλυψη με το $x[k]$, που αυτό συμβαίνει όταν $0 < n - N + 1 \Leftrightarrow n > N - 1$. Κάνοντας όπως προηγουμένως,

$$x[k]h[n-k] = a^k, \quad n - N + 1 \leq k \leq n \tag{44}$$

και άρα

$$y[n] = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a} = a^{n-N+1}\Big(\frac{1-a^N}{1-a}\Big), \;\; n > N-1 \tag{45}$$

Μαζεύοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα σε μια συνάρτηση, έχουμε ότι το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^{n-N+1}\Big(\dfrac{1-a^N}{1-a}\Big), & n > N-1 \end{cases} \tag{46}$$

και φαίνεται στο Σχήμα (3d).

Εξασκηθείτε στη συνέλιξη υπολογίζοντας αλγεβρικά - χωρίς Σχήμα - το παραπάνω πρόβλημα! :-)

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα, αυτή τη φορά με αποκλειστικά αλγεβρική λύση.

Παράδειγμα:
Έστω το σήμα

$$h[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \tag{47}$$

Βρείτε τη συνέλιξη με τον εαυτό του.

Λύση:
Θα έχουμε

$$\begin{aligned} c[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k u[k] a^{n-k} u[n-k] && (48) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^n u[k]u[n-k] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k] && (49) \end{aligned}$$

Όμως

$$u[k] = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{50}$$

και

$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & n-k \geq 0 \Longleftrightarrow k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{51}$$

και άρα

$$u[k]u[n-k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{52}$$

Άρα η συνέλιξη γράφεται ως

$$c[n] = a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]u[n-k] = a^n \sum_{k=0}^{n} 1 = a^n(n+1) \tag{53}$$

για $n \geq 0$. Προφανώς, $c[n] = 0, \;\; n < 0$. Άρα τελικά

$$c[n] = \begin{cases} a^n(n+1), & n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{54}$$