

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών  
**ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος**  
**Χειμερινό Εξάμηνο 2015**  
**Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής**

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/12/2015

Ημερομηνία Παράδοσης: 18/12/2015

**Άσκηση 1.**

Βάζοντας ενδιάμεσες μεταβλητές στην έξοδο κάθε αθροιστή, έχουμε:

$$w_1[n] = x[n] - aw_3[n-1] \quad (1)$$

$$w_2[n] = w_1[n] - \delta w_2[n-1] \quad (2)$$

$$w_3[n] = \epsilon w_2[n] + w_2[n-1] \quad (3)$$

$$w_4[n] = y[n] = \beta w_1[n] + \gamma w_3[n-1] \quad (4)$$

Ο μετασχ. Ζ του παραπάνω συνόλου εξισώσεων είναι

$$W_1(z) = X(z) - az^{-1}W_3(z) \quad (5)$$

$$W_2(z) = W_1(z) - \delta z^{-1}W_2(z) \quad (6)$$

$$W_3(z) = \epsilon W_2(z) + z^{-1}W_2(z) \quad (7)$$

$$Y(z) = \beta W_1(z) + \gamma z^{-1}W_3(z) \quad (8)$$

Λύνοντας τις εξισώσεις καταλήγουμε στο

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\beta + (\beta\delta + \gamma\epsilon)z^{-1} + \gamma z^{-2}}{1 + (\delta + a\epsilon)z^{-1} + az^{-2}} \quad (9)$$

**Άσκηση 2.**

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2})(1 + \frac{1}{4}z^{-1})}$$

(α) Οι γράφοι είναι:

(α') Είναι

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{5}{24}z^{-2} + \frac{1}{12}z^{-3}} \quad (10)$$

και ο γράφοι φαίνονται στο Σχήμα (1) και στο Σχήμα (2).

(β) Είναι

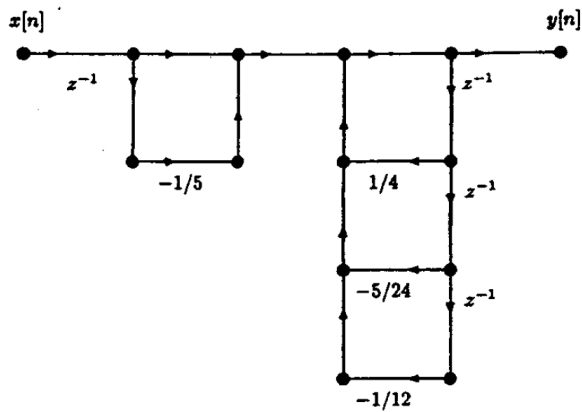
$$H(z) = \left( \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \right) \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \right) \quad (11)$$

και ο γράφος φαίνεται στο Σχήμα (3).

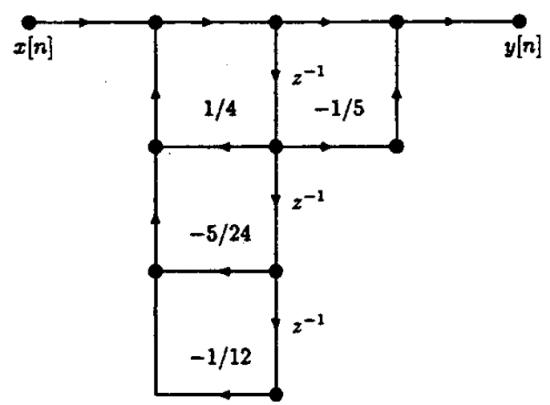
(γ) Είναι

$$H(z) = \frac{27}{125} + \frac{98}{125} - \frac{36}{125}z^{-1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \quad (12)$$

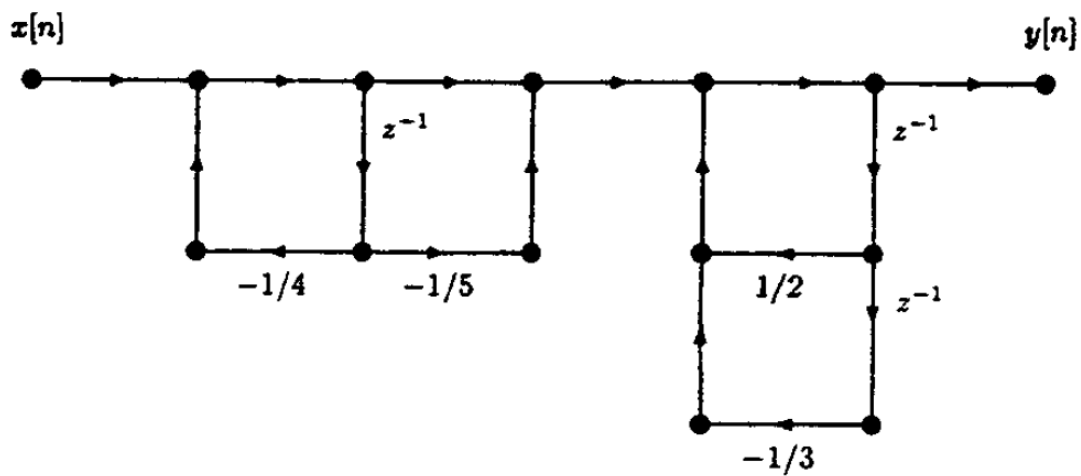
και ο γράφος φαίνεται στο Σχήμα (4).



Σχήμα 1: Direct Form I Γράφος Άσκησης 2.



Σχήμα 2: Direct Form II Γράφος Άσκησης 2.



Σχήμα 3: Cascade Form Γράφος Άσκησης 2.

(δ) Ο Transposed Form II γράφος φαίνεται στο Σχήμα (5).

(β) Οι εξισώσεις του γράφου είναι

$$w_1[n] = x[n] + w_2[n-1] \quad (13)$$

$$w_2[n] = \frac{1}{4}y[n] + w_3[n-1] - \frac{1}{5}x[n] \quad (14)$$

$$w_3[n] = -\frac{5}{24}y[n] - \frac{1}{12}y[n-1] \quad (15)$$

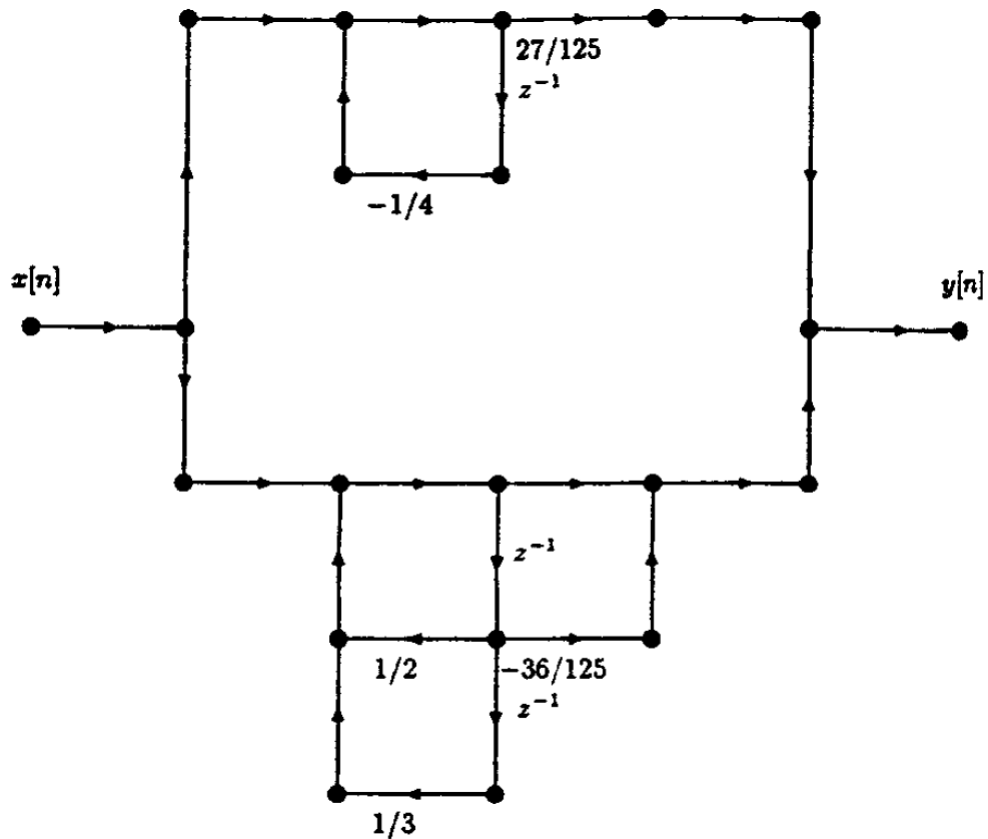
$$y[n] = w_1[n] \quad (16)$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα, καταλήγουμε στο

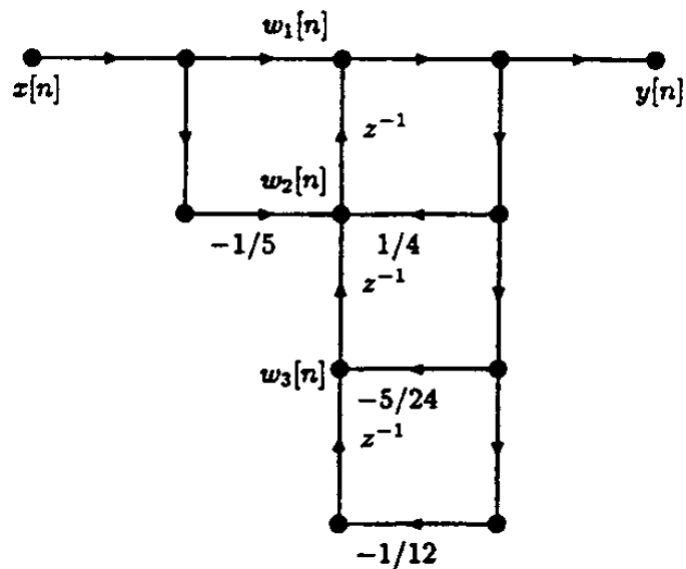
$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{5}{24}y[n-2] + \frac{1}{12}y[n-3] = x[n] - \frac{1}{5}x[n-1] \quad (17)$$

και με χρήση μετασχ. Z, έχουμε

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{5}{24}z^{-2} + \frac{1}{12}z^{-3}} \quad (18)$$



Σχήμα 4: Παράλληλος Γράφος Άσκησης 2.



Σχήμα 5: Transposed Form II Γράφος Άσκησης 2.

**Άσκηση 3.**

Είναι

$$H(z) = \frac{(1 - 3z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}{(1 + 2z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}$$

(α) Με τη γνωστή διαδικασία διάσπασης, έχουμε ότι

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}{(1 + 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (19)$$

$$H_{min}(z) = \frac{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (20)$$

Το all-pass σύστημα γράφεται ως

$$H_{ap}(z) = \frac{(1 + \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})}{(1 + 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} = 3 \frac{(2 + z^{-1})(-\frac{1}{2} + z^{-1})(-\frac{1}{3} + z^{-1})}{(1 + 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (21)$$

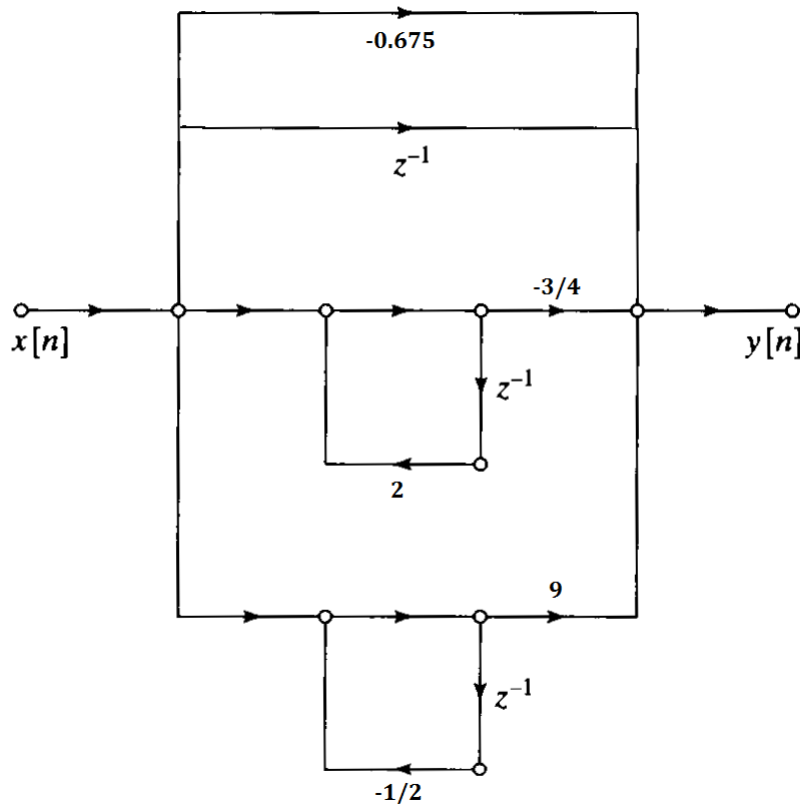
και μεταφέροντας τη σταθερά 3 στο ελάχιστης φάσης, είναι

$$H_{min}(z) = 3 \frac{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (22)$$

(β) Αναπτύσσοντας το  $H(z)$  σε μερικά κλάσματα, έχουμε

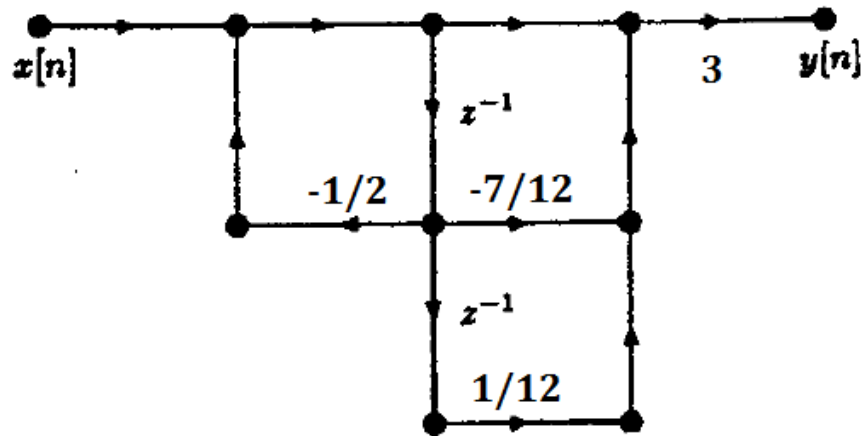
$$H(z) = -0.675 + z^{-1} - \frac{3}{4} \frac{1}{1 - 2z^{-1}} + 9 \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (23)$$

Ένας παράλληλος γράφος φαίνεται στο Σχήμα (6).



Σχήμα 6: Παράλληλος γράφος Άσκησης 3 για το  $H(z)$ .

(γ) Ο γράφος με τις λιγότερες μνήμες για το  $H_{min}(z)$  είναι ο Direct Form II και φαίνεται στο Σχήμα (7).

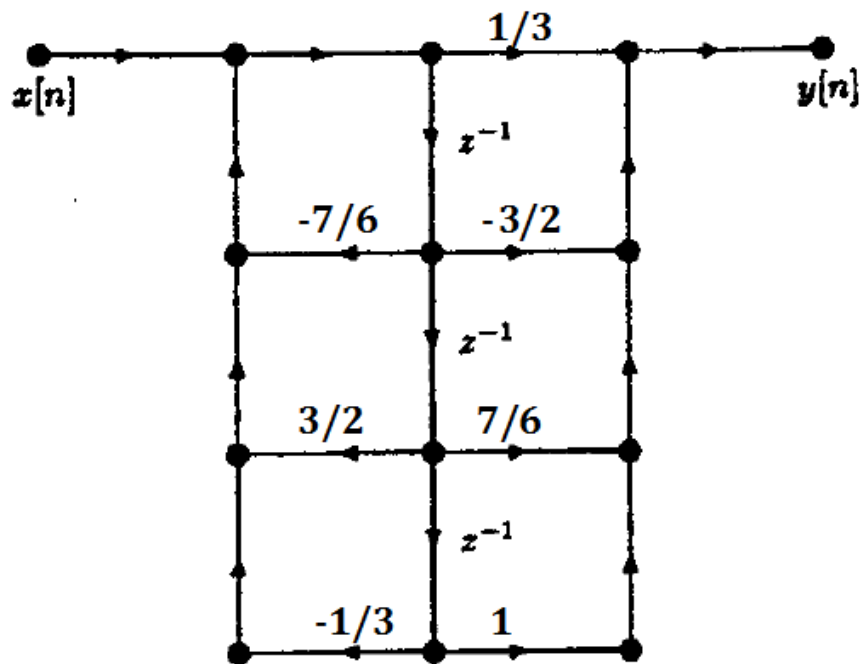


Σχήμα 7: Direct Form II Γράφος Άσκησης 3 για το ελάχιστης φάσης σύστημα.

(δ) Είναι

$$H_{ap}(z) = \frac{(2 + z^{-1})(-\frac{1}{2} + z^{-1})(-\frac{1}{3} + z^{-1})}{(1 + 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \quad (24)$$

και ο ζητούμενος γράφος είναι αυτός του Σχήματος (8).



Σχήμα 8: Direct Form Γράφος Άσκησης 3 για το all-pass σύστημα.

**Άσκηση 4.** Αν θεωρήσουμε τους δυο μικρούς βρόχους ως έναν, με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(z) = \frac{2(1 + z^{-1})}{1 + \frac{1}{5}z^{-1}} \quad (25)$$

τότε η συνάρτηση μεταφοράς  $H(z)$  θα είναι

$$H(z) = \frac{G(z)}{1 + \frac{1}{2}G(z)} \quad (26)$$

και άρα

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.6z^{-1}} \quad (27)$$

**Άσκηση 5.** Βάζοντας ενδιάμεσες μεταβλητές στους κόμβους άθροισης, καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$w_1[n] = x[n] - \frac{1}{2}w_3[n-1] \quad (28)$$

$$w_2[n] = w_1[n] - \frac{1}{4}w_2[n-1] \quad (29)$$

$$w_3[n] = \frac{1}{4}w_2[n] + w_2[n-1] \quad (30)$$

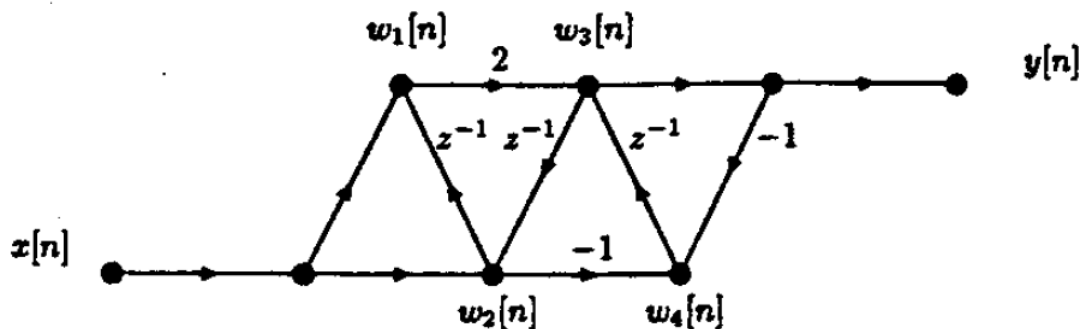
$$w_4[n] = \frac{1}{2}w_1[n] + w_3[n-1] \quad (31)$$

$$y[n] = 2w_2[n] + w_3[n] + 2w_4[n] \quad (32)$$

που δίνουν

$$H(z) = \frac{2 + \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{13}{2}z^{-2}}{1 + \frac{3}{8}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \quad (33)$$

**Άσκηση 6.** Βάζοντας ενδιάμεσες μεταβλητές όπως στο Σχήμα (9), καταλήγουμε στις εξισώσεις:



Σχήμα 9: Σχήμα Άσκησης 6.

$$w_1[n] = x[n] + w_2[n-1] \quad (34)$$

$$w_2[n] = x[n] + w_3[n-1] \quad (35)$$

$$w_3[n] = 2w_1[n] + w_4[n-1] \quad (36)$$

$$y[n] = w_3[n] \quad (37)$$

$$w_4[n] = -y[n] - w_2[n] \quad (38)$$

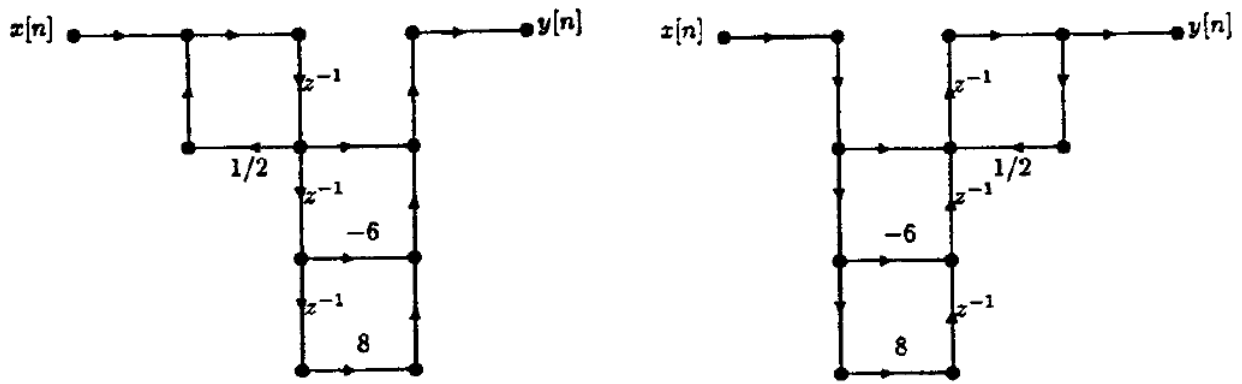
οι οποίες δίνουν τελικά

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 + z^{-1}}{1 + z^{-1} - z^{-2}} \quad (39)$$

**Άσκηση 7.** Το  $H(z)$  μπορεί να γραφεί ως

$$H(z) = \frac{z^{-1} - 6z^{-2} + 8z^{-3}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (40)$$

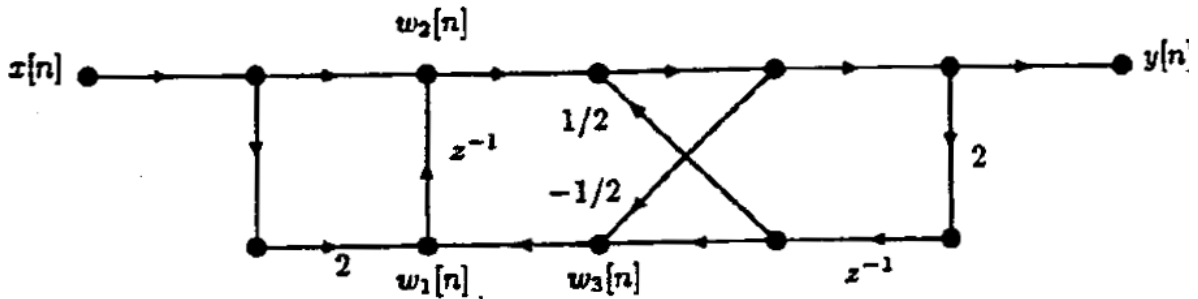
Οι δυο ζητούμενοι γράφοι φαίνονται στο Σχήμα (10).



Σχήμα 10: Γράφοι Άσκησης 7.

**Άσκηση 8.**

(α) Η transposed μορφή του γράφου φαίνεται στο Σχήμα (11).



Σχήμα 11: Σχήμα Άσκησης 8.

(β) Με χρήση των ενδιάμεσων μεταβλητών του σχήματος, έχουμε τις εξισώσεις:

$$w_1[n] = 2x[n] + w_3[n] \quad (41)$$

$$w_2[n] = x[n] + w_1[n - 1] \quad (42)$$

$$w_3[n] = -\frac{1}{2}y[n] + 2y[n - 1] \quad (43)$$

$$y[n] = w_2[n] + y[n - 1] \quad (44)$$

οι οποίες δίνουν εξίσωση διαφορών (πάντα μέσω του μετασχ.  $Z$ )

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n - 1] - 2y[n - 2] = x[n] + 2x[n - 1] \quad (45)$$

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι η

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - 2z^{-2}} \quad (46)$$

και άρα οι πόλοι βρίσκονται στις θέσεις

$$z = -\frac{8}{1 \pm \sqrt{33}} \quad (47)$$

οι οποίοι βρίσκονται εκτός μοναδιαίου κύκλου, άρα το σύστημα δεν είναι ευσταθές.

(δ) Είναι

$$y[3] = 0.5y[2] + 2y[1] + x[3] + 2x[2] \quad (48)$$

$$y[0] = x[0] = 1 \quad (49)$$

$$y[1] = x[1] + 2x[0] + 0.5y[0] = 1/3 + 2 + 0.5 = \frac{34}{12} \quad (50)$$

$$y[2] = x[2] + 2x[1] + 0.5y[1] + 2y[0] = 1/9 + 2/3 + (1/2) * (34/12) + 2 \approx 4.18 \quad (51)$$

και άρα  $y[3] \approx 8.02$ .