

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 20/11/2015

Ημερομηνία Παράδοσης: 4/12/2015

Άσκηση 1. Δείξτε ότι η καθυστέρηση ομάδας ενός ΓΧΑ συστήματος που χαρακτηρίζεται από τη φασματική απόκριση $H(e^{j\omega})$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\text{grad}[H(e^{j\omega})] = \Re \left\{ j \frac{dH(e^{j\omega})}{d\omega} \right\}$$

Άσκηση 2. Αντιστοιχεί η συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(z+3)(z-2)}{(z-\frac{1}{4})(z+\frac{1}{2})}$$

σε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης; Αν δεν είναι ελάχιστης φάσης, κατασκευάστε ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $G(z)$ τέτοιο ώστε $|H(e^{j\omega})| = |G(e^{j\omega})|$. Υπολογίστε τις αντίστοιχες κρουστικές αποκρίσεις $h[n]$ και $g[n]$, και βρείτε τις τιμές τους για τις χρονικές στιγμές $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Για ποιές τιμές του m ισχύει ότι

$$\sum_{n=0}^m |g[n]|^2 \geq \sum_{n=0}^m |h[n]|^2$$

Άσκηση 3. Ένα φίλτρο FIR τρίτης τάξης έχει συνάρτηση μεταφοράς $G(z)$

$$G(z) = (6 - z^{-1} - 12z^{-2})(2 + 5z^{-1})$$

(α) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις μεταφοράς $H_i(z)$ όλων των FIR φίλτρων που οι αποκρίσεις πλάτους τους, $|H_i(e^{j\omega})|$, είναι ίδιες με αυτή του $G(z)$.

(β) Ποιά από αυτές τις συναρτήσεις μεταφοράς είναι ελάχιστης φάσης και ποιά είναι μέγιστης φάσης;¹

Άσκηση 4. Τα διαγράμματα πόλων-μηδενικών του Σχήματος (1) περιγράφουν έξι διαφορετικά απαιτά ΓΧΑ συστήματα. Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα. Η απάντηση “κανένα” ή “όλα”, θεωρείται αποδεκτή όπου χρειάζεται.

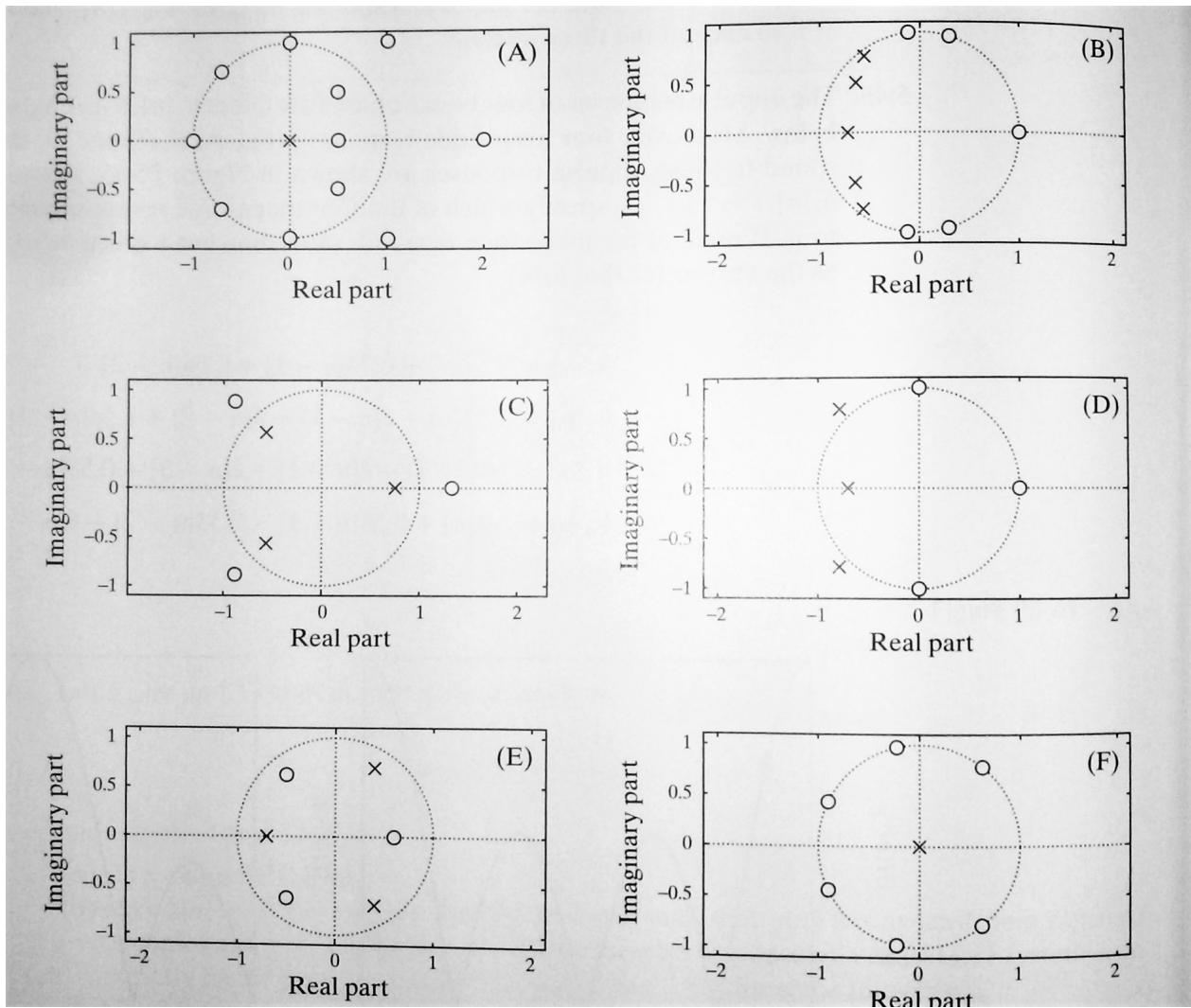
(α) Ποιά συστήματα είναι IIR;

(β) Ποιά συστήματα είναι FIR;

(γ) Ποιά συστήματα είναι ευσταθή;

(δ) Ποιά συστήματα είναι ελάχιστης φάσης;

¹Υπενθυμίζεται ότι ένα σύστημα λέγεται μέγιστης φάσης όταν έχει όλα τα μηδενικά εκτός μοναδιαίου κύκλου, ενώ τους πόλους εντός μοναδιαίου κύκλου.

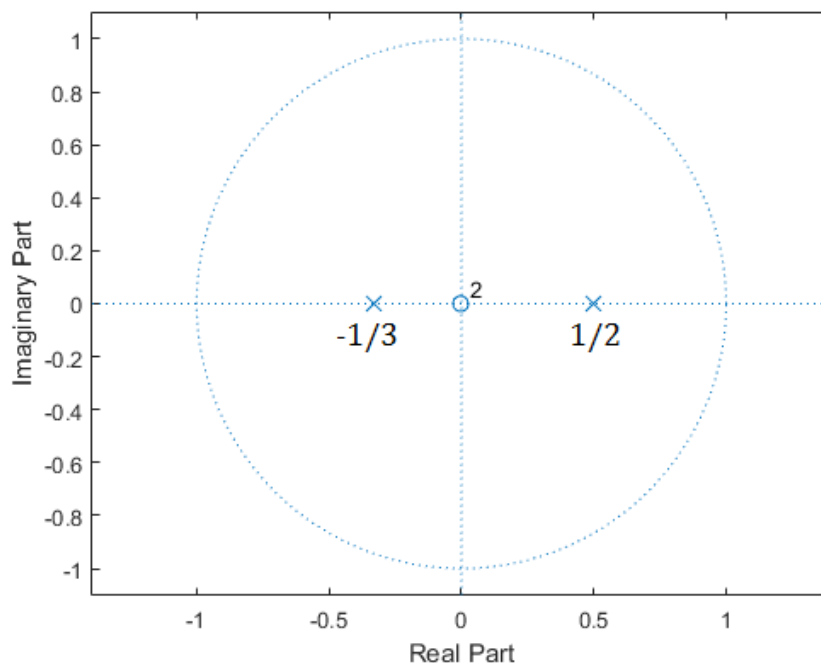


Σχήμα 1: Σχήμα Άσκησης 4.

- (ε) Ποιά συστήματα είναι γενικευμένης γραμμικής φάσης;
- (ς) Ποιά συστήματα έχουν $|H(e^{j\omega})| = \text{σταθερή}$, για κάθε ω ;
- (ζ) Ποιά συστήματα έχουν ευσταθή και αιτιατά αντίστροφα συστήματα;
- (η) Ποιό σύστημα έχει την ελάχιστη - σε διάρκεια - κρουστική απόκριση;
- (θ) Ποιά συστήματα έχουν φασματική απόκριση που έχει χαμηλοπερατή συμπεριφορά;
- (ι) Ποιά συστήματα έχουν ελάχιστη καθυστέρηση ομάδας;

Άσκηση 5. Η συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ ενός *αιτιατού* ΓΧΑ συστήματος έχει διάγραμμα πόλων-μηδενικών όπως στο Σχήμα (2). Δίνεται επίσης ότι $H(1) = 6$.

- (α) Βρείτε το $H(z)$.
- (β) Βρείτε την κρουστική απόκριση $h[n]$.
- (γ) Βρείτε την έξοδο $y[n]$ όταν η είσοδος είναι $x[n] = u[n] - \frac{1}{2}u[n-1]$.



Σχήμα 2: Σχήμα Άσκησης 5.

Άσκηση 6. Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 0.8z^{-1})(1 + 9z^{-2})}{(1 - 0.81z^{-2})}$$

- (α) Γράψτε το $H(z)$ ως το γινόμενο ενός συστήματος ελάχιστης φάσης $H_1(z)$ κι ενός all-pass συστήματος, $H_{ap}(z)$.
- (β) Γράψτε το $H(z)$ ως το γινόμενο ενός διαφορετικού συστήματος ελάχιστης φάσης $H_2(z)$ και ενός συστήματος γενικευμένης γραμμικής φάσης $H_{lin}(z)$.

Άσκηση 7. Η σχέση εισόδου εξόδου ενός μη γραμμικού συστήματος διακριτού χρόνου δίνεται στο χώρο της συχνότητας ως

$$Y(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^a e^{j\mathcal{L}X(e^{j\omega})}$$

όπου $0 < a < 1$ και $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ είναι οι μετασχ. Fourier της εισόδου και της εξόδου αντίστοιχα. Βρείτε μια έκφραση για τη φασματική απόκριση

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

και δείξτε ότι έχει μηδενική φάση².

Άσκηση 8. Βρείτε μια έκφραση για την φασματική απόκριση $H(e^{j\omega})$ του *αιτιατού* IIR ΓΧΑ συστήματος που περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = x[n] + ay[n - R], \quad |a| < 1$$

όπου $y[n]$ και $x[n]$ η έξοδος και η είσοδος του συστήματος.

²Ο παραπάνω μετασχηματισμός έχει χρησιμοποιηθεί για βελτίωση εικόνας.

- (α) Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της απόκρισης πλάτους, $|H(e^{j\omega})|$.
- (β) Πόσα μέγιστα και πόσα ελάχιστα υπάρχουν στο φάσμα πλάτους στο διάστημα $[0, 2\pi)$;
- (γ) Σε ποιές συχνότητες ω συμβαίνουν τα παραπάνω ακρότατα;
- (δ) Σχεδιάστε το φάσμα πλάτους και το φάσμα φάσης για $R = 5$.