ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-370: Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος
Χειμερινό Εξάμηνο 2015
Διδάσκοντες: Γ. Στυλιανού - Γ. Καφεντζής

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Λύσεις

Άσκηση 1.
Είναι

$$\begin{aligned}
j\frac{\frac{d}{d\omega}H(e^{j\omega})}{H(e^{j\omega})} &= j\frac{\frac{d}{d\omega}\left(|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}\right)}{|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}} \\
&= j\frac{\frac{d}{d\omega}|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)} + \frac{d}{d\omega}e^{j\phi(\omega)}|H(e^{j\omega})|}{|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}} \\
&= j\frac{\frac{d}{d\omega}|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)} + j\frac{d}{d\omega}\phi(\omega)e^{j\phi(\omega)}|H(e^{j\omega})|}{|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}} \\
&= j\frac{\frac{d}{d\omega}|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}}{|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}} + j^2\frac{d}{d\omega}\phi(\omega)\frac{e^{j\phi(\omega)}|H(e^{j\omega})|}{|H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)}} \\
&= j\frac{\frac{d}{d\omega}|H(e^{j\omega})|}{|H(e^{j\omega})|} - \frac{d}{d\omega}\phi(\omega) \\
&= jIm\left\{\frac{j\frac{dH(e^{j\omega})}{d\omega}}{H(e^{j\omega})}\right\} + Re\left\{\frac{j\frac{dH(e^{j\omega})}{d\omega}}{H(e^{j\omega})}\right\}
\end{aligned}$$

Άρα $Re\left\{\frac{j\frac{dH(e^{j\omega})}{d\omega}}{H(e^{j\omega})}\right\} = -\frac{d}{d\omega}\phi(\omega) = grd\{H(e^{j\omega})\}$.

Άσκηση 2.

$$H(z) = \frac{(z+3)(z-2)}{(z-\frac{1}{4})(z=\frac{1}{2})}$$

Θα είναι Άρα

$$H_{min}(z) = \frac{(z+\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}$$

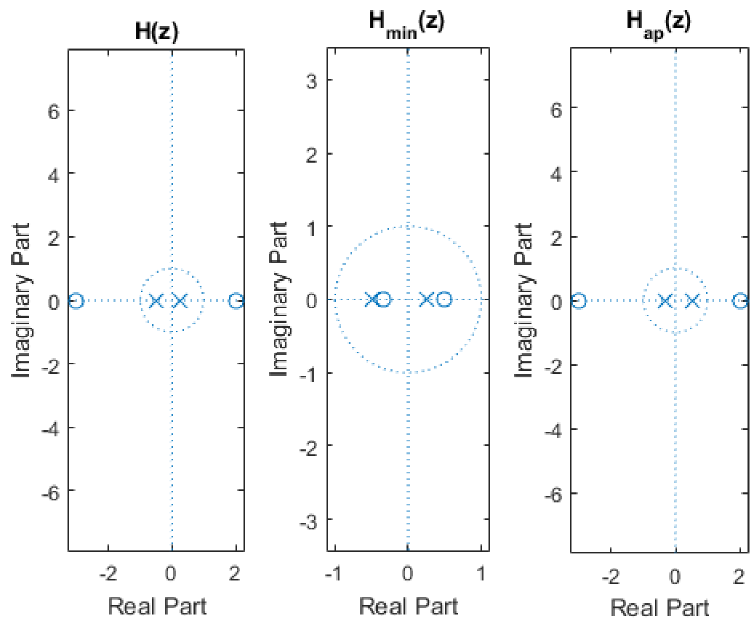
και

$$H_{ap}(z) = \frac{(z-2)(z+3)}{(z+\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})} = \frac{(z+3)(z-2)}{\frac{1}{3}(1+3z)(-\frac{1}{2})(1-2z)} = -6\frac{(z+3)(z-2)}{(1+3z)(1-2z)}$$

Η σταθερά -6 θα πάει στο ελάχιστης φάσης, άρα

$$H_{min}(z) = -6\frac{(z+\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}{(z+\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})} = \frac{(3z+1)(1-2z)}{(z-\frac{1}{4})(z+\frac{1}{2})}$$

Κάνοντας Ανάπτυγμα σε Μερικά Κλάσματα, έχουμε ότι οι 5 πρώτες τιμές του $h[n]$ είναι {1, 0.75, -6.0625, 1.6093, -1.16015} ενώ του $g[n]$ είναι {-6, 2.5, -0.375, 0.40625, -0.1484, 0.0879}
Βλέπουμε ότι $\sum_{n=0}^{m}|g[n]|^2 > \sum_{n=0}^{m}|h[n]|^2 \quad \forall \quad m = 0,1,2,3,4.$



Άσκηση 3.

1. Είναι
$$G(z) = (6 - z^{-1} - 12z^{-2})(2 + 5z^{-1}) = 30(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(1 + \frac{4}{3}z^{-1})(\frac{2}{5} + z^{-1})$$
Οι άλλες συναρτήσεις μεταφοράς με το ίδιο $|G(e^{j\omega})|$ είναι οι:
   - $H_1(z) = 30(-\frac{3}{2} + z^{-1})(1 + \frac{4}{3}z^{-1})(\frac{2}{5} + z^{-1})$
   - $H_2(z) = 30(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(\frac{4}{3} + z^{-1})(\frac{2}{5} + z^{-1})$
   - $H_3(z) = 30(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(\frac{4}{3} + z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$
   - $H_4(z) = 30(-\frac{3}{2} + z^{-1})(\frac{4}{3} + z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$
   - $H_5(z) = 30(-\frac{3}{2} + z^{-1})(1 + \frac{4}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$
   - $H_6(z) = 30(1 - \frac{3}{2}z^{-1})(1 + \frac{4}{3}z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$
   - $H_7(z) = 30(-\frac{3}{2} + z^{-1})(\frac{4}{3} + z^{-1})(1 + \frac{2}{5}z^{-1})$
2. Προφανώς, η $H_7(z)$ είναι ελάχιστης φάσης και η $G(z)$ της εκφώνησης είναι μέγιστης φάσης.

Άσκηση 4.

α) B, C, D, E

β) A, F

γ) A, B, C, E, F

δ) E

ε) A, F

ϛ) C

ζ) E

η) F

θ΄) C, F

ι΄) E

Άσκηση 5.

α΄) Είναι

$$H(z) = A\frac{z^2}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}$$

για $H(1) = 6 \iff A = 4$

β΄) Είναι

$$H(z) = \frac{4}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

με

$$A = H(z)(1-\frac{1}{2}z^{-1})\Big]_{z^{-1}=2} = \frac{4}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\Big]_{z^{-1}=2} = \frac{4}{1+\frac{2}{3}} = \frac{12}{5}$$

και

$$B = H(z)(1+\frac{1}{3}z^{-1})\Big]_{z^{-1}=-3} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big]_{z^{-1}=-3} = \frac{4}{1+\frac{3}{2}} = \frac{8}{5}$$

Άρα

$$H(z) = \frac{12}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

κι επειδή το σύστημα είναι αιτιατό,

$$h[n] = \frac{12}{5}(\frac{1}{2})^n u[n] + \frac{8}{5}(-\frac{1}{3})^n u[n]$$

γ΄) Είναι

$$X(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

άρα

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{4}{(1-z^{-1})(1+\frac{1}{3}z^{-1})} = \ = 3\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \xrightarrow{z^{-1}} y[n] = 3u[n] + (-\frac{1}{3})^n u[n]$$

Άσκηση 6.
Είναι

$$H(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(1+9z^{-2})}{1-0.81z^{-2}}$$

α΄) Είναι

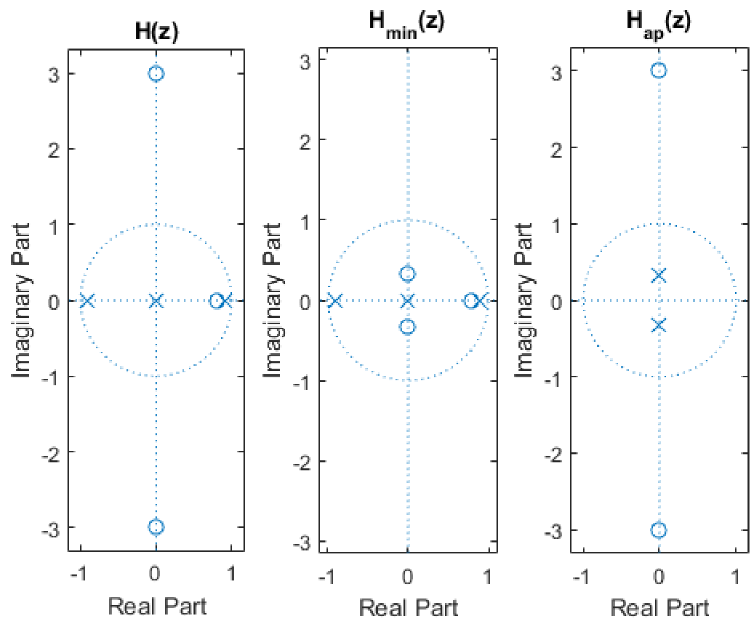
$$H(z) = \frac{(1-0.8z^{-1})(1+3jz^{-1})(1-3jz^{-1})}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})}$$

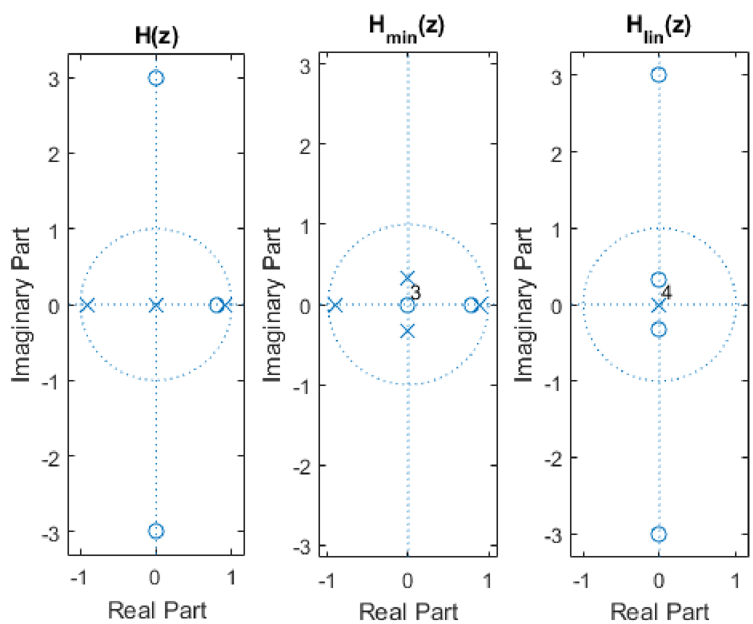
Οπότε

$$H_{ap}(z) = \frac{(1+3jz^{-1})(1-3jz^{-1})}{(1-j\frac{1}{3}z^{-1})(1+j\frac{1}{3}z^{-1})} = 9\frac{(z^{-1}+\frac{1}{3j})(z^{-1}-\frac{1}{3j})}{(1+j\frac{1}{3}z^{-1})(1-j\frac{1}{3}z^{-1})}$$

Η σταθερά $9 = (3j)(-3j)$ θα πάει στο ελάχιστης φάσης, άρα

$$H_1(z) = H_{min}(z) = 9\frac{(1-\frac{1}{3}jz^{-1})(1+\frac{1}{3}jz^{-1})(1-0.8z^{-1})}{(1-0.9z^{-1})(1+0.9z^{-1})}$$





β΄) Ένα σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης $H_{lin}(z)$ έχει μηδενικά στις θέσεις $z = \pm 1, z = 0, z = +\infty$, ή σε συζυγή αμοιβαία ζεύγη.

Το μόνο μηδενικό που είναι εκτός κύκλου είναι το $\pm 3j$ του $H(z)$. Αυτά θα πάνε στο σύστημα γραμμικής φάσης. Το σύστημα αυτό θα πρέπει να περιλαμβάνει και τα συζυγή αμοιβαία τους $\pm\frac{1}{3}j$. Άρα το σύστημα γραμμικής φάσης είναι το

$$H_{lin}(z) = (1 - 3jz^{-1})(1 + 3jz^{-1})(1 - \frac{1}{3}jz^{-1})(1 + \frac{1}{3}jz^{-1}) = (1 + 9z^{-2})(1 + \frac{1}{9}z^{-2})$$

ενώ το σύστημα ελάχιστς φάσης θα είναι το

$$H_2(z) = \frac{1 - 0.8z^{-1}}{(1 - 0.81z^{-2})(1 + \frac{1}{9}z^{-2})}$$

Άσκηση 7. Είναι

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\
&= \frac{|X(e^{j\omega})|^a e^{j\angle X(e^{j\omega})}}{|X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}} \\
&= |X(e^{j\omega})|^{a-1}
\end{aligned}
$$

που είναι πραγματικό και θετικό για $0 < a < 1$, άρα έχει μηδενική φάση.

Άσκηση 8.

α΄) Είναι

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] + ay[n-R] \overset{F}{\longleftrightarrow} Y(e^{j\omega}) - ae^{-j\omega R}Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \\
\Longleftrightarrow & \quad \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega R}} = H(e^{j\omega}) \\
\Rightarrow & \quad |H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|1 - ae^{-j\omega R}|} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega R + a^2}}
\end{aligned}
$$

Η μέγιστη τιμή είναι $\frac{1}{1-|a|}$, ένω η ελάχιστη είναι $\frac{1}{1+|a|}$.

β΄) Υπάρχουν R μέγιστα και ελάχιστα στο $[0, 2\pi)$, όσες και οι λύσεις του $\cos\omega R = \pm 1$

γ΄) Οι συχνότητες δίνονται από τη λύση του

$$\cos\omega R = 1 \Longleftrightarrow \cos\omega R = \cos 2\pi k \Longleftrightarrow \omega R = 2\pi k \Longleftrightarrow \omega = \frac{2\pi k}{R}$$

για τα μέγιστα και τη λύση του

$$\cos\omega R = -1 \Longleftrightarrow \cos\omega R = \cos(2k+1)\pi \Longleftrightarrow \omega R = (2k+1)\pi \Longleftrightarrow \omega = \frac{(2k+1)\pi}{R}$$

για τα ελάχιστα.

δ΄) Σχήματα